Übungen zur Algebra II

Prof. Dr. S. Bosch/C. Löh — Blatt 0 vom 7. April 2008

Aufgabe 1 (Körperhomomorphismen).

1. Gibt es einen Körperhomomorphismus $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \longrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$? Hierbei bezeichnen $\sqrt{2}$ und $\sqrt[3]{2}$ die positiven, reellen Wurzeln.
2. Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $\alpha^4 + 6 \cdot \alpha^2 - 2 = 0$. Gibt es einen Körperhomomorphismus $\mathbb{Q}(\alpha) \longrightarrow \mathbb{Q}(\alpha)$, der nicht die Identität ist?

Aufgabe 2 (Hauptsatz der Galoistheorie).

1. Wiederholen Sie den *Haupsatz der Galoistheorie* und insbesondere auch die Begriffe *normal* und *separabel*.
2. Geben Sie eine Galoiserweiterung mit Galoisgruppe S_3 an, und illustrieren Sie an diesem Beispiel den Hauptsatz der Galoistheorie.

Aufgabe 3 (Galoisgruppe einer Gleichung). Bestimmen Sie die Galoisgruppe des Polynoms $X^3 - 3 \cdot X^2 + X + 3$ über $\mathbb{Q}$, über $\mathbb{F}_{13}$, und über $\mathbb{Q}(i \cdot \sqrt{19})$; hierbei bezeichnet $\sqrt{19}$ die positive reelle Wurzel aus 19.

Aufgabe 4 (Galoiserweiterungen von $\mathbb{Q}$ von ungeradem Grad).

1. Sei $K/\mathbb{Q}$ mit $K \subset \mathbb{C}$ eine Galoiserweiterung von endlichem, ungeradem Grad. Zeigen Sie, dass dann $K \subset \mathbb{R}$ gilt.

   Hinweis. Betrachten Sie die komplexe Konjugation.
2. Geben Sie ein Beispiel für einen Teilkörper $K \subset \mathbb{C}$ derart, dass die Erweiterung $K/\mathbb{Q}$ galoissch ist und Grad 3 besitzt.

Diese Aufgaben müssen nicht schriftlich abgegeben werden,
werden aber in der ersten Übung besprochen.