

Übungen zur Algebra II

Prof. Dr. S. Bosch/C. Löh

Blatt 10 vom 19. Juni 2008

Aufgabe 1. Sei L/K eine Körpererweiterung mit Transzendenzgrad 1, für die es ein Element $x \in L$ mit $[L : K(x)] = 2$ gibt. Beweisen oder widerlegen Sie: Ist $y \in L$ über K transzendent, so ist auch $[L : K(y)] = 2$.

Aufgabe 2 (Bosch „Algebra“, 7.1.4).

1. Zeigen Sie, dass jeder Körper der Charakteristik 0 eine Vereinigung von Teilkörpern ist, die zu Teilkörpern von \mathbb{C} isomorph sind.
2. Gilt die entsprechende Aussage auch für \mathbb{R} statt \mathbb{C} ?

Aufgabe 3 (Endlich erzeugte Erweiterungen; Bosch „Algebra“, 7.1.6). Sei L/K eine endlich erzeugte Körpererweiterung und sei L' ein Zwischenkörper von L/K . Zeigen Sie, dass dann auch die Erweiterung L'/K endlich erzeugt ist.

Aufgabe 4. Finden Sie in der Literatur einen Beweis der Transzendenz von π über \mathbb{Q} und geben Sie (in eigenen Worten) eine Zusammenfassung des Beweises und der wichtigsten Beweisschritte.

Aufgabe 5.

1. Gibt es einen Körperhomomorphismus $\mathbb{C}(X) \rightarrow \mathbb{C}$?
2. Gibt es eine lineare Ordnung \leq auf $\mathbb{R}(X)$, die die normale Ordnung auf \mathbb{R} fortsetzt, und die Eigenschaft besitzt, dass $(\mathbb{R}(X), \leq)$ ein angeordneter Körper ist (s. Blatt 9) und dass es einen ordnungserhaltenden Körperhomomorphismus $\mathbb{R}(X) \rightarrow \mathbb{R}$ gibt? (Hierbei betrachten wir \mathbb{R} mit der normalen Ordnung.)

Abgabe bis zum 26. Juni 2008, 8:00 Uhr