Übungen zur Algebra II

Prof. Dr. S. Bosch/C. Löh — Blatt 11 vom 26. Juni 2008

Aufgabe 1. Sind die folgenden Ringhomomorphismen endlich bzw. von endlichem Typ bzw. ganz?

1. Die Inklusion $\mathbb{F}_2 \longrightarrow \mathbb{F}_2[X]$.
2. Die Projektion $\mathbb{F}_2[X] \times \mathbb{F}_2[X] \longrightarrow \mathbb{F}_2[X]$ auf die erste Komponente.

Aufgabe 2 (Ganzer Abschluss; Bosch „Algebra,“ 3.3.2)**.** Sei $\varphi \colon A \longrightarrow B$ ein Ringhomomorphismus und sei $\overline{A}$ die Menge aller Elemente aus B, die über A ganz sind. Zeigen Sie, dass $\overline{A}$ ein *ganzer Abschluss von A in B* ist, d.h.:

1. Es ist $\overline{A}$ ein Unterring von B.
2. Der Homomorphismus $\varphi \colon A \longrightarrow B$ schränkt sich zu einem ganzen Homomorphismus $A \longrightarrow \overline{A}$ ein.
3. Der Ring $\overline{A}$ ist ganz abgeschlossen, d.h. ist $b \in B$ über $\overline{A}$ ganz, so ist bereits $b \in \overline{A}$.

Aufgabe 3 (Minimalpolynome und ganze Erweiterungen)**.** Sei A ein faktorieller Ring, sei K der Quotientenkörper von A und sei L/K eine algebraische Körpererweiterung. Zeigen Sie, dass ein Element $\alpha \in L$ genau dann über A ganz ist (bezüglich der Inklusion $A \longrightarrow K \longrightarrow L$), wenn das Minimalpolynom von α über K bereits in $A[X]$ liegt.

Aufgabe 4 (Ganzer Abschluss, Fortsetzung)**.**

1. Ein Integritätsring A heißt *normal*, wenn er im Quotientenkörper $Q(A)$ ganz abgeschlossen ist, also wenn der ganze Abschluss von A bezüglich der Inklusion $A \longrightarrow Q(A)$ mit A übereinstimmt.

   Zeigen Sie, dass faktorielle Ringe normal sind.
2. Bestimmen Sie den ganzen Abschluss der Inklusion $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}(i)$.

Aufgabe 5. Sei A ein Ring und sei G eine endliche Gruppe mit einer Operation $G \longrightarrow \operatorname{Aut}(A)$ auf A durch Ringautomorphismen. Sei

$$A^G := \{a \in A \mid \forall_{g \in G} \quad g \cdot a = a\}$$

der Fixring.

1. Zeigen Sie, dass die Inklusion $A^G \longrightarrow A$ ganz ist.
2. Geben Sie ein Beispiel für eine Operation einer endlichen Gruppe G auf einem Ring A, so dass die Inklusion $A^G \longrightarrow A$ nicht von endlichem Typ ist (nicht ganz einfach).

Abgabe bis zum 3. Juli 2008, 8:00 Uhr