Übungen zur Algebra II

Prof. Dr. S. Bosch/C. Löh — Blatt 12 vom 3. Juli 2008

Aufgabe 1 (Algebraische Mengen von Matrizen)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$.

1. Zeigen Sie, dass $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ eine algebraische Teilmenge von $\mathbb{C}^{n \times n}$ ist.
2. Sind alle Teilmengen von $\mathbb{C}^{n \times n}$ algebraisch?

Aufgabe 2 (Maximale Ideale in $K[X_1, \dots, X_n]$; Bosch „Algebra," 3.9.3)**.** Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal in $K[X_1, \dots, X_n]$.

1. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{m} = (f_1, \dots, f_n)$, wobei f_j für $j \in \{1, \dots, n\}$ ein normiertes Polynom in X_j mit Koeffizienten in $K[X_1, \dots, X_{j-1}]$ ist.
2. Sind die Polynome $f_1, \dots, f_n$ durch die obigen Eigenschaften bereits eindeutig bestimmt?

Aufgabe 3 (Zariski-Topologie)**.** Sei K ein Körper, sei $\overline{K}$ ein algebraischer Abschluss von K und sei $n \in \mathbb{N}$.

1. Zeigen Sie, dass das System
$$\bigl\{\overline{K}^n - V(\mathfrak{a}) \bigm| \mathfrak{a} \text{ ist ein Ideal in } K[X_1, \dots, X_n]\bigr\}$$
eine Topologie auf $\overline{K}^n$ definiert (d.h., die angegebenen Mengen sind als die offenen Mengen aufzufassen), die sogenannte *Zariski-Topologie*.
2. Beschreiben Sie die Zariski-Topologie auf $\overline{K}^1$. Ist diese Topologie hausdorffsch?
3. Ist die Zariski-Topologie auf $\overline{K}^2$ die Produkttopologie der Zariski-Topologie auf $\overline{K}^1$?

Aufgabe 4 (Koordinatenringe)**.** Sei K ein Körper, sei $\overline{K}$ ein algebraischer Abschluss von K und sei $n \in \mathbb{N}$. Ist $U \subset \overline{K}^n$ eine algebraische Teilmenge, so ist der *Koordinatenring* von U der Quotient
$$A(U) := K[X_1, \dots, X_n]/I(U).$$

1. Sei $U := V(X_1 - X_2^2) \subset \overline{K}^2$. Zeigen Sie, dass $A(U) \cong K[X]$.
2. Sei $U := V(X_1 \cdot X_2 - 1) \subset \overline{K}^2$. Zeigen Sie, dass $A(U) \not\cong K[X]$.

Aufgabe 5 (Noethersche Ringe via Moduln)**.** Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Zeigen Sie, dass R genau dann noethersch ist, wenn jeder Untermodul eines endlich erzeugten R-Moduls endlich erzeugt ist.

Abgabe bis zum 10. Juli 2008, 8:00 Uhr