Übungen zur Algebra II

Prof. Dr. S. Bosch/C. Löh — Blatt 2 vom 17. April 2008

Aufgabe 1 (Kreisteilungskörper von endlichen Körpern)**.**

1. Bestimmen Sie die Galoisgruppe des Polynoms $X^5 - 1$ über $\mathbb{F}_7$.
2. Bestimmen Sie die Galoisgruppe des Polynoms $X^{30} - 1$ über $\mathbb{F}_8$.

Aufgabe 2 (Kreisteilungskörper zu Primpotenzen; Bosch „Algebra," 4.5.7)**.** Sei p eine ungerade Primzahl und sei $r \in \mathbb{N}$.

1. Zeigen Sie, dass die Gruppe $(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})^\times$ zyklisch ist.

   Hinweis. Zeigen Sie induktiv, dass die Restklasse von $1 + p$ in $(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})^\times$ ein Element der Ordnung p^{r-1} ist. Betrachten Sie dann den kanonischen Homomorphismus $(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})^\times \longrightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$.

2. Schließen Sie hieraus, dass der p^r-te Kreisteilungskörper von $\mathbb{Q}$ eine zyklische Galoiserweiterung von $\mathbb{Q}$ ist.

Aufgabe 3 (Zyklische Erweiterungen über $\mathbb{Q}$ – Existenz)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade. Zeigen Sie, dass es eine Galoiserweiterung von $\mathbb{Q}$ gibt, deren Galoisgruppe zu $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ isomorph ist.
Hinweis. Verwenden Sie Aufgabe 2.

Aufgabe 4 (Charaktergruppen)**.** Zu einer Gruppe G bezeichnen wir mit $\widehat{G}$ die Gruppe der $\mathbb{C}$-wertigen Charaktere (bezüglich punktweiser Multiplikation), die sogenannte *Charaktergruppe* von G.

1. Zeigen Sie: Ist G eine endliche zyklische Gruppe, so sind die Gruppen G und $\widehat{G}$ isomorph.
2. Folgern Sie: Ist G eine endliche abelsche Gruppe, so sind die Gruppen G und $\widehat{G}$ isomorph.

   Hinweis. Verwenden Sie den Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen (Bosch „Algebra," Korollar 2.9/9 bzw. Bosch „Lineare Algebra," Korollar 6.4/4).

Aufgabe 5 ($\mathbb{C}$-wertige Charaktere von S_3)**.** Bestimmen Sie die Charaktergruppe der symmetrischen Gruppe S_3.

Abgabe bis zum 24. April 2008, 8:00 Uhr