Übungen zur Algebra II

Prof. Dr. S. Bosch/C. Löh Blatt 3 vom 24. April 2008

Aufgabe 1 (Bosch „Algebra," 4.7.4)**.** Seien m und n zwei teilerfremde, positive, ganze Zahlen und sei L/K eine Körpererweiterung vom Grad m. Zeigen Sie: Besitzt $\alpha \in K$ eine n-te Wurzel in L, so besitzt α bereits eine n-te Wurzel in K.

Aufgabe 2.

1. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $c \in \mathbb{Q}$, und sei L ein Zerfällungskörper von $X^n - c \in \mathbb{Q}[X]$ über $\mathbb{Q}$. Ist dann die Erweiterung $L/\mathbb{Q}$ stets zyklisch?
2. Sei L ein Zerfällungskörper des Polynoms $X^3 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ über $\mathbb{Q}$ und sei $\alpha \in L$ mit $\alpha^3 = 2$. Bestimmen Sie die Spur $\mathrm{Sp}_{L/\mathbb{Q}}(\alpha^2 + 2 \cdot \alpha)$ und die Norm $\mathrm{N}_{L/\mathbb{Q}}(\alpha^2 + 2 \cdot \alpha)$.

Aufgabe 3 (Bosch „Algebra," 4.8.6)**.** Zeigen Sie, dass für zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{Q}$ genau dann $a^2 + b^2 = 1$ ist, wenn es $m, n \in \mathbb{Z}$ mit

$$a = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}, \quad \text{und} \quad b = \frac{2 \cdot m \cdot n}{m^2 + n^2}$$

gibt. Genauer:

1. Beweisen Sie diese Aussage unter Verwendung von Hilberts Satz 90.
2. Geben Sie einen elementaren Beweis dieser Aussage.

Aufgabe 4 (Kohomologie über Kettenkomplexe)**.** Sei G eine Gruppe und sei A eine abelsche Gruppe mit einer Operation von G auf A. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die abelsche Gruppe (wobei $G^0 := \{1\}$)

$$C^n(G, A) := \mathrm{Abb}(G^n, A).$$

1. Definieren Sie Gruppenhomomorphismen $\delta^0 \colon C^0(G, A) \longrightarrow C^1(G, A)$ und $\delta^1 \colon C^1(G, A) \longrightarrow C^2(G, A)$, so dass
$$H^1(G, A) \cong \ker \delta^1 / \operatorname{im} \delta^0.$$
2. Sei G' eine weitere Gruppe und sei $G' \longrightarrow G$ ein Gruppenhomomorphismus. Definieren Sie daraus eine zugehörige Operation von G' auf A. Welche Beziehung gibt es zwischen den entsprechenden Homomorphismen δ^0 bzw. δ^1 von G und G'?

Aufgabe 5 (Kohomologie endlicher Gruppen)**.**

1. Sei G eine endliche Gruppe und sei $G \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{Q})$ eine Operation von G auf $\mathbb{Q}$. Bestimmen Sie die Kohomologiegruppe $H^1(G, \mathbb{Q})$.
2. Geben Sie ein Beispiel für eine abelsche Gruppe A und eine Gruppenoperation $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Aut}(A)$, so dass $H^1(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, A)$ nicht die triviale Gruppe ist.

Abgabe bis zum 2. Mai 2008, 8:00 Uhr