Übungen zur Algebra II

Prof. Dr. S. Bosch/C. Löh — Blatt 5 vom 8. Mai 2008

Aufgabe 1 (Sylowgruppen von S_4**).**

1. Bestimmen Sie alle Sylowgruppen der symmetrischen Gruppe S_4. Welche davon sind normal?
2. Sind alle 2-Gruppen abelsch?

Aufgabe 2 (Bosch „Algebra," 5.2.5**).**

1. Zeigen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung 56 einen nichttrivialen Normalteiler enthält.
2. Sei G eine Gruppe der Ordnung 165. Zeigen Sie, dass es einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $G \longrightarrow \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ gibt.

Aufgabe 3. Sei L/K eine Galoiserweiterung vom Grad 45 und sei L' ein Zwischenkörper von L/K. Zeigen Sie, dass auch L'/K eine Galoiserweiterung ist.

Aufgabe 4 (Kohomologie von p-Gruppen**).**

1. Sei G eine Gruppe, sei $H \subset G$ eine Untergruppe von endlichem Index, und sei A eine abelsche Gruppe (auf der G trivial operiert); dann induziert $H \hookrightarrow G$ einen Homomorphismus $\operatorname{res}^G_H \colon H^1(G,A) \longrightarrow H^1(H,A)$ (s. Aufgabe 4 von Blatt 3). Konstruieren Sie einen Homomorphismus
$$\operatorname{cor}^G_H \colon H^1(H,A) \longrightarrow H^1(G,A)$$
mit $\operatorname{cor}^G_H \circ \operatorname{res}^G_H = [G:H] \cdot \operatorname{id}_{H^1(G,A)}$.
2. Sei $p \in \mathbb{N}$ prim. Zeigen Sie: Ist G eine p-Gruppe und ist A eine endliche abelsche Gruppe (auf der G trivial operiert), so ist $H^1(G,A)$ auch eine p-Gruppe.

Aufgabe 5* (Kohomologie endlicher Gruppen**).** Zeigen Sie, dass die erste Kohomologiegruppe einer endlichen Gruppe durch die Kohomologiegruppen der Sylowgruppen berechnet werden kann; genauer: Sei G eine endliche Gruppe und sei A eine abelsche Gruppe, auf der G trivial operiert. Zeigen Sie, dass
$$H^1(G,A) \cong \bigoplus_{p \in P_G} H^1(G_p, A)^G.$$
Hierbei sei P_G die Menge der Primzahlen, die $\operatorname{ord} G$ teilen; zu $p \in P_G$ sei $G_p \subset G$ eine p-Sylowgruppe von G; die Kohomologie auf der rechten Seite wird bezüglich der trivialen Operation von G_p auf A berechnet.

Hinweis. Betrachten Sie die Homomorphismen $\operatorname{res}^G_{G_p}$ und $\operatorname{cor}^G_{G_p}$ aus Aufgabe 4.

Da die Aufgabe nicht korrekt gestellt war (das $\cdot^G$ fehlte), wird diese Aufgabe nicht in die Wertung einbezogen. Eine Definition von $\cdot^G$ in diesem Kontext und einen Beweis für die obige Zerlegung findet sich in K. Browns Buch *Cohomology of Groups* (GTM 87, Springer Verlag, Kapitel III.10).

Abgabe bis zum 23. Mai 2008, 8:00 Uhr