Übungen zur Algebra II

Prof. Dr. S. Bosch/C. Löh Blatt 6 vom 22. Mai 2008

Aufgabe 1 (Bosch „Algebra,“ 5.3.7**).** Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Zeigen Sie, dass die Zyklen $(1,2)$ und $(1,2,\dots,n)$ die symmetrische Gruppe S_n erzeugen.

Aufgabe 2 (Konjugation von Zyklen; Bosch „Algebra,“ 5.3.6**).**

1. Sei $n \in \mathbb{N}$, sei $r \in \{1,\dots,n\}$, und sei $\pi := (x_1,\dots,x_r) \in S_n$ ein r-Zyklus. Zeigen Sie, dass $\sigma \circ \pi \circ \sigma^{-1} = \big(\sigma(x_1),\dots,\sigma(x_r)\big)$ für alle $\sigma \in S_n$.
2. Folgern Sie, dass die Kleinsche Vierergruppe ein Normalteiler in S_4 ist.

Aufgabe 3 (Diedergruppen**).**

1. Bestimmen Sie für $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ die Abelianisierung der Diedergruppe D_n, d.h. bestimmen Sie die Gruppe $D_n/[D_n, D_n]$.
2. Für welche $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ sind alle Sylowgruppen von D_n zyklisch?

Aufgabe 4 (Das 14/15-Puzzle**).** Beim 14/15-*Puzzle* sind fünfzehn numerierte Plättchen und eine „Lücke“ auf einem quadratischen Brett verteilt (siehe Abbildung (a)). Ist die Position in Abbildung (b) durch Verschieben der Plättchen aus Position (a) erreichbar?

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

(a)

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

(b)

Aufgabe 5 (Gruppenhomologie und Abelianisierung**).** Die erste Homologiegruppe ist das kovariante Analogon der ersten Kohomologiegruppe: Sei G eine Gruppe und sei $G \longrightarrow \operatorname{Aut}(A)$ eine Operation auf einer abelschen Gruppe A. Dann ist die *erste Homologiegruppe von G mit Koeffizienten in A* definiert als

$$H_1(G,A) := \ker \partial_1 / \operatorname{im} \partial_2,$$

wobei $C_n(G,A) := \bigoplus_{G^n} A = \bigoplus_{g \in G^n} A \cdot e_g$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\begin{aligned} \partial_1 \colon C_1(G,A) &\longrightarrow C_0(G,A) \\ a \cdot e_{g_1} &\longmapsto g_1^{-1} \cdot a - a, \\ \partial_2 \colon C_2(G,A) &\longrightarrow C_1(G,A) \\ a \cdot e_{(g_1,g_2)} &\longmapsto (g_1^{-1} \cdot a) \cdot e_{g_2} - a \cdot e_{g_1 \cdot g_2} + a \cdot e_{g_1}. \end{aligned}$$

(Zur Erinnerung: $G^0 := \{1\}$).

Zeigen Sie: Ist G eine Gruppe, so ist $H_1(G,\mathbb{Z}) \cong G/[G,G]$, wobei G auf $\mathbb{Z}$ trivial operiert.

Abgabe bis zum 29. Mai 2008, 8:00 Uhr