Übungen zur Algebra II

Prof. Dr. S. Bosch/C. Löh — Blatt 9 vom 12. Juni 2008

Aufgabe 1 (Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal).

1. Zeigen Sie algebraisch, dass man aus den vier Ecken des Einheitsquadrats in $\mathbb{C}$ mit Zirkel und Lineal ein gleichseitiges Dreieck mit demselben Flächeninhalt konstruieren kann.
2. Beschreiben Sie geometrisch wie man mit Zirkel und Lineal aus den vier Ecken des Einheitsquadrats in $\mathbb{C}$ ein gleichseitiges Dreieck mit demselben Flächeninhalt konstruieren kann.

Aufgabe 2 (Bosch „Algebra," 6.4.3). Sei $K \subset \mathbb{C}$ die Menge aller mit Zirkel und Lineal aus $\{0, 1\}$ konstruierbaren Punkte in $\mathbb{C}$.

1. Zeigen Sie, dass $K/\mathbb{Q}$ eine unendliche Galoiserweiterung ist.
2. Zeigen Sie, dass K eine Vereinigung einer aufsteigenden Kette von Galoiserweiterungen von $\mathbb{Q}$ ist, deren Grad jeweils eine Potenz von 2 ist.

Aufgabe 3 (Fundamentalsatz der Algebra; Bosch „Algebra," 6.3.2).

1. Sei $f \in \mathbb{R}[X]$ ein nicht-konstantes Polynom vom Grad $n = 2^k \cdot m$ mit $2 \nmid m$. Zeigen Sie per Induktion nach k, dass f in $\mathbb{C}$ eine Nullstelle besitzt.

   Hinweis. Ist f normiert, so zerlegen Sie f über einem algebraischen Abschluss $\overline{\mathbb{R}}$ von $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren, etwa $f = \prod_{r=1}^{n}(X - a_r)$. Wenden Sie nun für $b \in \mathbb{R}$ die Induktionsvoraussetzung auf $g = \prod_{r<s}(X - a_{r,s})$ an, wobei $a_{r,s} := a_r + a_s + b \cdot a_r \cdot a_s$. Sie dürfen verwenden, dass jedes reelle Polynom ungeraden Grades eine Nullstelle in $\mathbb{R}$ hat, und dass jede nicht-negative reelle Zahl eine reelle Quadratwurzel besitzt.

2. Folgern Sie hieraus den Fundamentalsatz der Algebra.

Aufgabe 4 (Angeordnete Körper). Ein Körper K mit einer linearen Ordnung $\leq$ ist ein *angeordneter Körper*, wenn

$$a \leq b \Longrightarrow a + c \leq b + c, \quad \text{und} \quad (0 \leq a \wedge 0 \leq b) \Longrightarrow 0 \leq a \cdot b$$

für alle a, b, $c \in K$ gilt.

1. Zeigen Sie, dass jeder angeordnete Körper Charakteristik Null hat.
2. Gibt es eine Ordnung auf $\mathbb{R}(X)$ bezüglich der $\mathbb{R}(X)$ ein angeordneter Körper ist?

Aufgabe 5 (Maximal angeordnete Körper). Zeigen Sie, dass in einem maximal angeordneten Körper $(K, \leq)$ alle nichtnegativen Elemente eine Quadratwurzel in K besitzen.

Hierbei heißt ein angeordneter Körper $(K, \leq)$ *maximal angeordnet*, wenn sich die Ordnung $\leq$ auf keine echte algebraische Erweiterung L/K von K fortsetzen lässt (sodass L ein angeordneter Körper ist).

Abgabe bis zum 19. Juni 2008, 8:00 Uhr