Seminar „Geometrische Gruppentheorie“

PD Dr. M. Joachim/C. Löh Februar 2008

Der abstrakte Gruppenbegriff ist aus dem Studium von Isometrien geometrischer Objekte hervorgegangen – umgekehrt können wir jede Gruppe als Gruppe von Isometrien geeigneter metrischer Räume interpretieren.

In vielen Situationen liefert die Frage welche Gruppen auf welchen Räumen „schön“ operieren können ein interessantes Zusammenspiel zwischen algebraischen Aspekten der betrachteten Gruppen und geometrischen Eigenschaften der involvierten Räume. Zum Beispiel liefert die Charakterisierung freier Gruppen durch freie Operationen auf Bäumen einen eleganten Zugang zu der naheliegenden Frage, ob Untergruppen von freien Gruppen frei sind; ein Problem, das mit algebraischen Methoden nicht einfach zu lösen ist.

In der geometrischen Gruppentheorie werden (endlich erzeugte) Gruppen selbst als geometrische Objekte aufgefaßt. Dabei wird untersucht, welche algebraischen Eigenschaften der Gruppe sich in der Geometrie der Gruppe widerspiegeln. Zentral ist dabei der Begriff der Quasiisometrie und das Finden von Eigenschaften metrischer Räume, die quasiisometrieinvariant sind.

Dieses Seminar bietet einen Einstieg in die Grundbegriffe und die Methoden der geometrischen Gruppentheorie. Wir werden zunächst freie Gruppen, Gruppenpräsentationen und Gruppenoperationen betrachten. Insbesondere werden wir Gruppenoperationen auf Bäumen genauer studieren. Im zweiten Teil werden wir uns mit Quasiisometrieinvarianten von endlich erzeugten Gruppen beschäftigen.

Themen

Vorträge, die mit einem Stern gekennzeichnet sind, erfordern bei der Vorbereitung etwas mehr Hintergrundwissen in den entsprechenden Gebieten.

Vortrag 1 (Freie Gruppen und Gruppenpräsentationen; 9.4.2008**).** Definition und universelle Eigenschaft freier Gruppen, Präsentationen von Gruppen, Diedergruppen, Wortproblem, der Cayleygraph zu einem Erzeugendensystem einer Gruppe.
Literatur: [13, Kapitel III.5–III.7], [12, Kapitel I.12], [1, Kapitel 4 und 27], [16, p. 16f]

Vortrag 2 (Gruppenoperationen; 16.4.2008**).** Gruppenoperationen auf Mengen, Standgruppen, Bahnen, freie Operationen, Diedergruppen, Satz von Cayley, Bahnengleichung, Beweis der Sylow-Sätze durch Gruppenoperationen.
Literatur: Diese Inhalte finden sich in den meisten Algebra-Lehrbüchern [1, p. 41, Kapitel 17, 18, und 20], [2, Kapitel 5.1 und 5.2], [12, Kapitel I.5 und I.6], [10, Kapitel I.12 und I.13]

Vortrag 3 (Musikalische Operationen von Diedergruppen; 23.4.2008**).** Die Diedergruppe der Ordnung 24 operiert auf zwei verschiedene – duale – Weisen auf der Menge der Dur- und Molldreiklänge. An diesem Beispiel können die

grundlegenden Begriffe über Gruppenoperationen noch einmal schön illustriert werden.
Literatur: [4]

Vortrag 4 (Topologische Gruppenoperationen; 30.4.2008**).** Grundbegriffe aus der metrischen Geometrie und Topologie, Gruppenoperationen auf metrischen bzw. topologischen Räumen, eigentliche Operationen, Wortmetrik und Operation auf dem Cayleygraph, Diedergruppen als Isometriegruppen.
Literatur: [11, Kapitel 1 und 3], [8, Kapitel IV.A], [3, p. 131f], [1, Kapitel 4]

Vortrag 5 (Pflasterungen der euklidischen Ebene; 7.5.2008**).** Wiederholung euklidische Geometrie, Definition von Pflasterungen, Klassifikation der Pflasterungen der euklidischen Ebene.
Literatur: [1, Kapitel 24–26]

Vortrag 6 (Gruppenoperationen auf Bäumen; 21.5.2008**).** Graphen und Bäume, Gruppenoperationen auf Graphen/Bäumen, Charakterisierung freier Gruppen durch freie Operationen auf Bäumen, Satz von Nielsen-Schreier.
Literatur: [16, Kapitel I.2 und I.3], [1, Kapitel 28]

Vortrag 7 (Gruppenoperationen auf Bäumen, Fortsetzung; 28.5.2008**).** Amalgamierte Produkte von Gruppen, Charakterisierung von amalgamierten Produkten durch Operationen auf Bäumen, Folgerungen (dargestellt am Beispiel der Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$).
Literatur: [16, Kapitel I.1 und I.4.1–I.4.3]

Vortrag 8 (Die Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$ und der Bruhat-Tits-Baum*; 4.6.2008**).** Übersicht über die nötigen Begriffe aus der Algebra, Konstruktion des Bruhat-Tits-Baumes für $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Satz von Ihara über diskrete, torsionsfreie Untergruppen von $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$.
Literatur: [16, Kapitel II.1]

Vortrag 9 (Quasiisometrie von Gruppen; 11.6.2008**).** Definition von Quasiisometrien, Wohldefiniertheit des Quasiisometrietyps endlich erzeugter Gruppen (via Cayleygraph), Satz von Schwarz/Milnor.
Literatur: [8, Kapitel IV], [3, p. 138f]

Vortrag 10 (Enden von Gruppen*; 18.6.2008**).** Enden von metrischen Räumen und von endlich erzeugten Gruppen, Quasiisometrieinvarianz von Enden, Hauptsatz über die Anzahl der Enden von Gruppen, Kombination mit dem Satz von Schwarz/Milnor.
Literatur: [3, p. 144ff]

Vortrag 11 (Wachstum von Gruppen*; 25.6.2008**).** Wachstumstypen, Quasiisometrieinvarianz der Wachstumstypen, Wachstumsverhalten von $\mathbf{Z}^n$, Ausblick auf den Satz von Gromov über virtuell nilpotente Gruppen.
Literatur: [8, Kapitel VI, VII], [3, p. 148ff], [7]

Vortrag 12 (Hyperbolische Geometrie; 2.7.2008**).** Der n-dimensionale hyperbolische Raum, Eigenheiten der hyperbolischen Geometrie, dünne Dreiecke, Operation von $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ auf der hyperbolischen Ebene.
Literatur: [14, Kapitel 4], [15, Kapitel 3], [3, p. 18ff]

Vortrag 13 (Hyperbolische Gruppen; 9.7.2008**).** Definition hyperbolischer metrischer Räume und hyperbolischer Gruppen, Invarianz unter Quasiisometrie, Beispiele für Gruppen, die hyperbolisch sind und Beispiele für Gruppen, die nicht hyperbolisch sind.
Literatur: [3, p. 399ff, p. 407ff], [5, p. 239], [6, Kapitel 3]

Vortrag 14 (Hyperbolische Gruppen, Fortsetzung*; 16.7.2008**).** Charakterisierung hyperbolischer Gruppen durch die lineare isoperimetrische Ungleichung, Lösbarkeit des Wortproblems, Ausblick: Zusammenhang mit Starrheitssätzen aus der Riemannschen Geometrie.
Literatur: [3, p. 417ff, p. 448ff, p. 494ff]

Ablauf des Seminars

Notwendig für den Scheinerwerb sind:

- Ein 80-minütiger Vortrag; die verbleibenden 10 Minuten der Sitzung werden wir für die Diskussion verwenden.
- Regelmäßige Anwesenheit.
- Eine schriftliche Ausarbeitung des Vortrags; diese muß bis spätestens eine Woche nach dem Vortrag abgegeben werden.
- Ein Handout von ein bis zwei Seiten zu Ihrem Vortrag, das die wichtigsten Aspekte des Vortrags und ein paar kleine Übungsaufgaben für die anderen Teilnehmer enthält; diese Aufgaben sollen dazu anregen, sich nochmal mit den Inhalten des Vortrags zu beschäftigen.
- Für Studenten des Studiengangs Zwei-Fach-Bachelor wird der Vortrag benotet; für alle anderen Teilnehmer wird der Schein nicht benotet.

Hinweise zur Vorbereitung

- Beginnen Sie frühzeitig mit der Vorbereitung und nutzen Sie Sprechstunden und sonstige Betreuungsangebote.
- Versuchen Sie, Definitionen geometrisch zu motivieren. Oft können im Vortrag auch komplizierte Rechnungen durch geeignete geometrische Argumente ersetzt werden.
- Alle eingeführten Begriffe sollten durch Beispiele illustriert werden.
- Berücksichtigen Sie bei der Vorbereitung, was in den Vorträgen vor bzw. nach Ihrem eigenen Vortrag vorgesehen ist – im Zweifel sollten Sie sich mit den anderen Votragenden absprechen, damit es nicht zu Lücken, Inkosistenzen oder Überschneidungen kommt.
- Sie können die Ausarbeitung und das Handout handschriftlich abgeben. Andererseits bieten die Ausarbeitung und das Handout aber auch eine gute Gelegenheit, das Textsatzsystem LaTeX besser kennenzulernen [9]; wir werden für das Handout eine LaTeX-Vorlage zur Verfügung stellen.

– Weitere Hinweise zur Vorbereitung bzw. zum Halten von Seminarvorträgen finden sich demnächst auch auf der Homepage von A. Bartels: http://www.math.uni-muenster.de/u/bartelsa.

Literatur

[1] M.A. Armstrong. *Groups and Symmetry*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 1988.

[2] S. Bosch. *Algebra*, 6. Auflage, Springer, 2006.

[3] M.R. Bridson, A. Haefliger. *Metric Spaces of Non-positive Curvature*, Band 319 der *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, Springer, 1999.

[4] A.S. Crans, T.M. Fiore, R. Satyendra. Musical actions of dihedral groups, Preprint, 2007. Online erhältlich auf arXiv:0711.1873.

[5] M. Davis. *Geometry and Topology of Coxeter Groups*, Band 32 von *London Mathematical Society Series*, Princeton University Press, 2008.

[6] E. Ghys, P. de la Harpe. *Sur les groupes hyperboliques d'aprés Mikhael Gromov*, Band 83 von *Progress in Mathematics*, Birkhäuser, 1990.

[7] M. Gromov. Groups of polynomial growth and expanding maps, IHES Publ. Math., Nr. 53, p. 53–73, 1981.

[8] P. de la Harpe. *Topics in Geometric Group Theory*, Chicago University Press, 2000.

[9] F. Mittelbach, M. Goossens, J. Braams, D. Carlisle, C. Rowley. *The LaTeX Companion*, zweite Auflage, Addison-Wesley, 2004.

[10] N. Jacobson. *Basic Algebra*, Band 1, zweite Auflage, W.H. Freedman and Co., 1985.

[11] K. Jänich. *Topologie*, achte Auflage, Springer, 2005.

[12] S. Lang. *Algebra*, zweite Auflage, Addison Wesley, 1984.

[13] W.S. Massey. *A Basic Course in Algebraic Topology*, Band 127 von *Graduate Texts in Mathematics*, Springer, 1991.

[14] A.I. Ramírez Galarza, J. Seade. *Introduction to Classical Geometries*, Übersetzung des spanischen Originals von 2002, Birkhäuser, 2007.

[15] J.G. Ratcliffe. *Foundations of Hyperbolic Manifolds*. Band 149 von *Graduate Texts in Mathematics*, Springer, 1994.

[16] J.-P. Serre. *Trees*, Übersetzt aus dem französischen Original von J. Stillwell. Korrigierte zweite Auflage der englischen Übersetzung von 1980, *Springer Monographs in Mathematics*, Springer, 2003.