

Die Atiyah-Hirzebruch Spektralsequenz

Dies ist eine kurze Anleitung zu Berechnungen mit der Atiyah-Hirzebruch Spektralsequenz im Rahmen des Diplomanden-Seminars zur Topologie am 12.12.2007 von Pascal Fabig.

Definition. Eine *Spektralsequenz* E ist

- eine Folge $(E^k)_{k \in \mathbb{N}}$ von abelschen Gruppen zusammen mit
- Endomorphismen $d^k : E^k \rightarrow E^k$ die $d^k \circ d^k = 0$ erfüllen und
- Isomorphismen $\alpha : H(E^k) = (\ker d^k / \text{im } d^k) \rightarrow E^{k+1}$

Definition. Eine *verallgemeinerte Homologietheorie* (\mathcal{H}, ∂) ist eine Familie von Funktoren $\mathcal{H}_n : \text{SPACES}^2 \rightarrow \text{Ab}$, $n \in \mathbb{Z}$ zusammen mit einer Familie von natürlichen Transformationen $\partial_n : \mathcal{H}_n \rightarrow \mathcal{H}_{n-1} \circ R$. Dabei ist $R : \text{SPACES}^2 \rightarrow \text{SPACES}^2$ der Shift-Funktor mit $R(X, A) = (A, \emptyset) = A$. Diese Daten sollen die folgenden Axiome erfüllen.

- Sind $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ und $g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ homotop, so induzieren sie die selben Abbildungen auf Homologie, also $\mathcal{H}_n(f) = \mathcal{H}_n(g) : \mathcal{H}_n(X, A) \rightarrow \mathcal{H}_n(Y, B)$.
- Ist $X = A \cup B$ mit A, B abgeschlossen in X und sind $A \rightarrow X$ sowie $A \cup B \rightarrow B$ Kofaserungen, so induziert die Inklusion $i : (B, B \cap A) \rightarrow (X, A)$ Isomorphismen $\mathcal{H}_n(i)$ auf Homologie.
- Sei (X, A) ein Raumpaard in SPACES^2 . Die Inklusionen $i : A \rightarrow X$ und $j : X \rightarrow (X, A)$ liefern zusammen mit den Randabbildungen $\partial_n(X, A) : \mathcal{H}_n(X, A) \rightarrow \mathcal{H}_{n-1}(A)$ eine lange exakte Sequenz

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_{n+1}(X, A)} \mathcal{H}_n(A) \xrightarrow{\mathcal{H}_n(i)} \mathcal{H}_n(X) \xrightarrow{\mathcal{H}_n(j)} \mathcal{H}_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n(X, A)} \cdots$$

Diese drei Axiome reichen aus um sinnvoll mit der verallgemeinerten Homologietheorie \mathcal{H} zu arbeiten. Arbeitet man mit Spektralsequenzen, so benötigt man ausserdem das Axiom der Additivität:

- Ist (X_α, A_α) , $\alpha \in I$ eine Familie von Raumpaaren, so induzieren die Inklusionen $i_\alpha : (X_\alpha, A_\alpha) \rightarrow \coprod_{\alpha \in I} (X_\alpha, A_\alpha)$ einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{\alpha \in I} \mathcal{H}_n(i_\alpha) : \bigoplus_{\alpha \in I} \mathcal{H}_n(X_\alpha, A_\alpha) \longrightarrow \mathcal{H}_n(\coprod_{\alpha \in I} (X_\alpha, A_\alpha))$$

Bemerkung (Was macht eigentlich die Atiyah-Hirzebruch Spektralsequenz?). Sei X ein CW-Komplex und \mathcal{H} eine verallgemeinerte Homologietheorie. Die Atiyah-Hirzebruch Spektralsequenz berechnet in diesem Fall aus den sogenannten *Koeffizienten*

$$\mathcal{H}_q(\text{pkt.}), q \in \mathbb{Z}$$

von \mathcal{H} und den singulären Homologiegruppen

$$H_p^{\text{sing}}(X), p \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

von X die verallgemeinerte Homologie

$$\mathcal{H}_n(X), n \in \mathbb{Z}$$

von X .

Bemerkung (Wie wendet man die Atiyah-Hirzebruch Spektralsequenz an?). Sei X ein CW-Komplex und \mathcal{H} eine verallgemeinerte Homologietheorie. Folgende Handlungsschritte sind durchzuführen.

1. Berechne die abelschen Gruppen $\mathcal{H}_q(\text{pkt.})$ (oder schlage sie in einer Tabelle nach). Im Folgenden setzen wir als (grausame) Abkürzung $\mathcal{H}_q := \mathcal{H}_q(\text{pkt.})$.
2. Berechne die singuläre Homologie von X mit AlgTop-Methoden.
3. Berechne mit Hilfe des universellen Koeffiziententheorems der AlgTop die singulären Homologiegruppen $H_p^{\text{sing}}(X; \mathcal{H}_q)$ mit Koeffizienten in den abelschen Gruppen \mathcal{H}_q .
4. Setze (aus historischen Gründen) $E_{p,q}^2 = H_p^{\text{sing}}(X; \mathcal{H}_q)$. Fasse alle Gruppen $E_{p,q}^2$ zu der bigraduierten Gruppe $E^2 = (E_{p,q}^2)_{p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}}$ zusammen.
5. Berechne nun *rekursiv* aus der Gruppe E^k die Gruppe E^{k+1} nach folgendem Schema:

- (a) Akzeptiere, dass es Differentiale gibt, beachte jedoch die folgenden Warnhinweise: Frage nicht, woher die Differentiale kommen. Akzeptiere, dass du fast nie weißt, wie die Differentiale konkret aussehen. Benutze also nur die nachfolgende Information: Für jedes $k \in \mathbb{N}$ existiert ein Endomorphismus $d^k : E^k \rightarrow E^k$. Da d^k die Gruppe $E_{p,q}^k$ nach $E_{p-k, q+k-1}^k$ abbildet gilt $d^k = (d_{p,q}^k)_{p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}}$.
- (b) Berechne für feste $p, q \in \mathbb{Z}$ die abelsche Gruppe

$$E_{p,q}^{k+1} = \ker d_{p,q}^k / \text{im } d_{p+k, q-k+1}^k$$

wenn du kannst. Wenn nicht (so etwas passiert häufiger mal) muss man irgendwie damit *klarkommen*.

- (c) Fasse alle Gruppen $E_{p,q}^{k+1}$ zu $E^{k+1} = (E_{p,q}^{k+1})_{p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}}$ zusammen.
6. Für feste $p, q \in \mathbb{Z}$ betrachte den Kolimes der Folge $(E_{p,q}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ und nenne diesen $E_{p,q}^\infty$. Häufig stagniert die Folge, also gilt $E_{p,q}^l = E_{p,q}^{l+1} = \dots := E_{p,q}^\infty$ für ein $l \in \mathbb{N}$.
7. Um $\mathcal{H}_n(X)$ zu berechnen betrachtet man nur die Gruppen $E_{p,q}^\infty$ mit $p+q = n$. Es gibt jetzt (akzeptiere es erstmal) eine Folge $(F_p)_{p \in \mathbb{N}}$ von abelschen Gruppen mit $\text{colim}_{p \in \mathbb{N}} F_p = \mathcal{H}_n(X)$ und $F_p/F_{p-1} \cong E_{p, n-p}^\infty$. Wir setzen dabei $F_{-1} := 0$. Um die abelschen Gruppen $F_p, p \in \mathbb{Z}$ zu berechnen tut man folgendes:

- Betrachte zuerst die kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow F_0 = E_{0,n}^\infty \rightarrow F_1 \rightarrow E_{1,n}^\infty \rightarrow 0$$

Dabei sind $E_{0,n}^\infty$ und $E_{1,n}^\infty$ bekannt. Bis auf dieses *Erweiterungsproblem* ist F_1 damit bekannt.

- Ist F_m bekannt, so kann man F_{m+1} mit Hilfe der exakten Sequenz

$$0 \rightarrow F_m \rightarrow F_{m+1} \rightarrow E_{m+1, n-(m+1)}^\infty \rightarrow 0$$

bestimmen.

Die Visualisierung des E^2 -Terms erfolgt als Gitter von abelschen Gruppen. Die Differentiale haben Grad $(-2, 1)$, liegen also wie folgt:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \cdots & H_{p-1}^{\text{sing}}(X; \mathcal{H}_{q+1}) & & H_p^{\text{sing}}(X; \mathcal{H}_{q+1}) & & H_{p+1}^{\text{sing}}(X; \mathcal{H}_{q+1}) & \cdots \\
 & & & \swarrow d_{p+1, q}^2 & & & \\
 \cdots & H_{p-1}^{\text{sing}}(X; \mathcal{H}_q) & & H_p^{\text{sing}}(X; \mathcal{H}_q) & & H_{p+1}^{\text{sing}}(X; \mathcal{H}_q) & \cdots \\
 & & & & & & \\
 \cdots & H_{p-1}^{\text{sing}}(X; \mathcal{H}_{q-1}) & & H_p^{\text{sing}}(X; \mathcal{H}_{q-1}) & & H_{p+1}^{\text{sing}}(X; \mathcal{H}_{q-1}) & \cdots \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

Für $p < 0$ verschwinden die Gruppen $E_{p, q}^2$. Es bleiben also nur auf der rechten Halbebene nichttriviale Daten.