Die Atiyah-Hirzebruch Spektralsequenz

Dies ist eine kurze Anleitung zu Berechnungen mit der Atiyah-Hirzebruch Spektralsequenz im Rahmen des Diplomanden-Seminars zur Topologie am 12.12.2007 von Pascal Fabig.

Definition. Eine *Speltralsequenz* E ist

- eine Folge $(E^k)_{k\in\mathbb{N}}$ von abelschen Gruppen zusammen mit
- Endomorphismen $d^k : E^k \to E^k$ die $d^k \circ d^k = 0$ erfüllen und
- Isomorphismen $\alpha : H(E^k) = (\ker d^k / \operatorname{im} d^k) \to E^{k+1}$

Definition. Eine *verallgemeinerte Homologietheorie* $(\mathcal{H}, \partial)$ ist eine Familie von Funktoren $\mathcal{H}_n$: SPACES^2 $\to$ Ab, $n \in \mathbb{Z}$ zusammen mit einer Familie von natürlichen Transformationen $\partial_n : \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_{n-1} \circ R$. Dabei ist R : SPACES^2 $\to$ SPACES^2 der Shift-Funktor mit $R(X, A) = (A, \emptyset) = A$. Diese Daten sollen die folgenden Axiome erfüllen.

- Sind $f : (X, A) \to (Y, B)$ und $g : (X, A) \to (Y, B)$ homotop, so induzieren sie die selben Abbildungen auf Homologie, also $\mathcal{H}_n(f) = \mathcal{H}_n(g) : \mathcal{H}_n(X, A) \to \mathcal{H}_n(Y, B)$.
- Ist $X = A \cup B$ mit A, B abgeschlossen in X und sind $A \to X$ sowie $A \cup B \to B$ Kofaserungen, so induziert die Inklusion $i : (B, B \cap A) \to (X, A)$ isomorphismen $\mathcal{H}_n(i)$ auf Homologie.
- Sei (X, A) ein Raumpaar in SPACES^2. Die inklusionen $i : A \to X$ und $j : X \to (X, A)$ liefern zusammen mit den Randabbildungen $\partial_n(X, A) : \mathcal{H}_n(X, A) \to \mathcal{H}_{n-1}(A)$ eine lange exakte Sequenz

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_{n+1}(X,A)} \mathcal{H}_n(A) \xrightarrow{\mathcal{H}_n(i)} \mathcal{H}_n(X) \xrightarrow{\mathcal{H}_n(j)} \mathcal{H}_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n(X,A)} \cdots$$

Diese drei Axiome reichen aus um sinnvoll mit der verallgemeinerten Homologietheorie $\mathcal{H}$ zu arbeiten. Arbeitet man mit Spektralsequenzen, so benötigt man ausserdem das Axiom der Additivität:

- Ist $(X_\alpha, A_\alpha), \alpha \in I$ eine Familie von Raumpaaren, so induzieren die inklusionen $i_\alpha : (X_\alpha, A_\alpha) \to \coprod_{\alpha\in I}(X_\alpha, A_\alpha)$ einen isomorphismus

$$\oplus_{\alpha\in I}\, \mathcal{H}_n(i_\alpha) : \oplus_{\alpha\in I}\, \mathcal{H}_n(X_\alpha, A_\alpha) \longrightarrow \mathcal{H}_n(\textstyle\coprod_{\alpha\in I}(X_\alpha, A_\alpha))$$

Bemerkung (Was macht eigentlich die Atiyah-Hirzebruch Spektralsequenz ?). Sei X ein CW-Komplex und $\mathcal{H}$ eine verallgemeinerte Homologietheorie. Die Atiyah-Hirzebruch Spektralsequenz berechnet in diesem Fall aus den sogenannten *Koeffizienten*

$$\mathcal{H}_q(\text{pkt.}), q \in \mathbb{Z}$$

von $\mathcal{H}$ und den singulären Homologiegruppen

$$H_p^{\text{sing}}(X), p \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

von X die verallgemeinerte Homologie

$$\mathcal{H}_n(X), n \in \mathbb{Z}$$

von X.

Bemerkung (Wie wendet man die Atiyah-Hirzebruch Spektralsequenz an ?). Sei X ein CW-Komplex und $\mathcal{H}$ eine verallgemeinerte Homologietheorie. Folgende Handlungsschritte sind durchzufüehren.

1. Berechne die abelschen Gruppen $\mathcal{H}_q(\text{pkt.})$ (oder schlage sie in einer Tabelle nach). Im Folgenden setzen wir als (grausame) Abkürzung $\mathcal{H}_q := \mathcal{H}_q(\text{pkt.})$.

2. Berechne die singuläre Homologie von X mit AlgTop-Methoden.

3. Berechne mit Hilfe des universellen Koeffiziententheorems der AlgTop die singulären Homologiegruppen $H_p^{\text{sing}}(X; \mathcal{H}_q)$ mit Koeffizienten in den abelschen Gruppen $\mathcal{H}_q$

4. Setze (aus historischen Gründen) $E^2_{p,q} = H_p^{\text{sing}}(X; \mathcal{H}_q)$. Fasse alle gruppen $E^2_{p,q}$ zu der bigraduierten Gruppe $E^2 = (E^2_{p,q})_{p\in\mathbb{Z},q\in\mathbb{Z}}$ zusammen.

5. Berechne nun *rekursiv* aus der Gruppe E^k die Gruppe E^{k+1} nach folgendem Schema:

   (a) Akzeptiere, dass es Differentiale gibt, beachte jedoch die folgenden Warnhinweise: Frage nicht, woher die Differentiale kommen. Akzeptiere, dass du fast nie weisst, wie die Differentiale konkret aussehen. Benutze also nur die nachfolgende Information: Für jedes $k \in \mathbb{N}$ existiert ein Endomorphismus $d^k : E^k \to E^k$. Da d^k die Gruppe $E^k_{p,q}$ nach $E^k_{p-k,q+k-1}$ abbildet gilt $d^k = (d^k_{p,q})_{p\in\mathbb{Z},q\in\mathbb{Z}}$.

   (b) Berechne für feste $p, q \in \mathbb{Z}$ die abelsche Gruppe

   $$E^{k+1}_{p,q} = \ker d^k_{p,q} / \operatorname{im} d^k_{p+k,q-k+1}$$

   wenn du kannst. Wenn nicht (so etwas passiert häufiger mal) muss man irgendwie damit *klarkommen*.

   (c) Fasse alle Gruppen $E^{k+1}_{p,q}$ zu $E^{k+1} = (E^k_{p,q})_{p\in\mathbb{Z},q\in\mathbb{Z}}$ zusammen.

6. Für feste $p, q \in \mathbb{Z}$ betrachte den Kolimes der Folge $(E^k_{p,q})_{k\in\mathbb{N}}$ und nenne diesen $E^\infty_{p,q}$. Häufig stagniert die Folge, also gilt $E^l_{p,q} = E^{l+1}_{p,q} = \ldots := E^\infty_{p,q}$ für ein $l \in \mathbb{N}$.

7. Um $\mathcal{H}_n(X)$ zu berechnen betrachtet man nur die Gruppen $E^\infty_{p,q}$ mit $p+q = n$. Es gibt jetzt (akzeptiere es erstmal) eine Folge $(F_p)_{p\in\mathbb{N}}$ von abelschen Gruppen mit $\operatorname{colim}_{p\in\mathbb{N}} F_p = \mathcal{H}_n(X)$ und $F_p/F_{p-1} \cong E^\infty_{p,n-p}$. Wir setzen dabei $F_{-1} := 0$. Um die abelschen Gruppen $F_p, p \in \mathbb{Z}$ zu berechnen tut man folgendes:

   - Betrachte zuerst die kurze exakte Sequenz

   $$0 \to F_0 = E^\infty_{0,n} \to F_1 \to E^\infty_{1,n} \to 0$$

   Dabei sind $E^\infty_{0,n}$ und $E^\infty_{1,n}$ bekannt. Bis auf dieses *Erweiterungsproblem* ist F_1 damit bekannt.

- Ist F_m bekannt, so kann man F_{m+1} mit Hilfe der exakten Sequenz

$$0 \to F_m \to F_{m+1} \to E^\infty_{m+1,n-(m+1)} \to 0$$

  bestimmen.

Die Visualisierung des E^2-Terms erfolgt als Gitter von abelschen Gruppen. Die Differentiale haben Grad $(-2,1)$, liegen also wie folgt:

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\cdots & H^{\text{sing}}_{p-1}(X;\mathcal{H}_{q+1}) & H^{\text{sing}}_{p}(X;\mathcal{H}_{q+1}) & H^{\text{sing}}_{p+1}(X;\mathcal{H}_{q+1}) & \cdots \\
\cdots & H^{\text{sing}}_{p-1}(X;\mathcal{H}_{q}) & H^{\text{sing}}_{p}(X;\mathcal{H}_{q}) & H^{\text{sing}}_{p+1}(X;\mathcal{H}_{q}) \arrow[ull, "d^2_{p+1,q}"'] & \cdots \\
\cdots & H^{\text{sing}}_{p-1}(X;\mathcal{H}_{q-1}) & H^{\text{sing}}_{p}(X;\mathcal{H}_{q-1}) & H^{\text{sing}}_{p+1}(X;\mathcal{H}_{q-1}) & \cdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Für $p < 0$ verschwinden die Gruppen $E^2_{p,q}$. Es bleiben also nur auf der rechten Halbebene nichttriviale Daten.