Ausarbeitung zum Vortrag über die Kaplansky Vermutung für geordnete und unique-product-Gruppen

Nils Friedrich

5. Dezember 2007

Inhaltsverzeichnis

Die Nullteiler-Vermutung von Kaplansky: Sei K ein nullteilerfreier Ring.

Falls G eine torsionsfreie Gruppe ist, so ist der Gruppenring KG nullteilerfrei.

1 Drei Fragen an einen Gruppenring

Sei K im folgenden ein Ring.

Definition: Sei G eine Gruppe und sei KG der Gruppenring über K. Falls a eine Einheit in K ist und $g \in G$, so ist $ag \in KG$ eine Einheit im Gruppenring KG und wird triviale Einheit genannt. Alle anderen Einheiten in KG heißen nicht-trivial.

Sei G eine torsionsfreie Gruppe, d.h. für beliebiges $g \in G, g \neq 1$, existiert keine natürliche Zahl n mit $g^n = 1$. Sei K ein nullteilerfreier Ring. Betrachte folgende Fragestellungen:

(U) Sind die Einheiten von KG trivial?

(R) Ist KG reduziert, d.h. existiert kein von Null verschiedenes Element aus KG welches nilpotent ist?

(D) Ist KG ein nullteilerfreier Ring?

Ziel dieses Kapitels ist es folgende Beziehung zwischen den drei gestellten Fragen zu zeigen:

Theorem:

$$(U) \Rightarrow (R) \Leftrightarrow (D).$$

Bemerkung: Falls K nicht nullteilerfrei ist, so ist KG nicht nullteilerfrei. Für a Nullteiler in K ist für belieges $g \in G$ das Element ag ein Nullteiler in KG.

Falls G nicht torsionsfrei ist, so ist KG nicht nullteilerfrei. Sei g ein Torsionselement in G, es exisitiert also eine natürliche Zahl n mit $g^n = 1$. Dann gilt in KG:

$$(g-1)(g^{n-1} + \cdots + g + 1) = 0.$$

Desweiteren ist ein nullteilerfreier Ring immer reduziert. Nehme an, dass dies nicht der Fall sei, es also ein von Null verschiedenes $a \in K$ gibt mit $a^n = 0$ für eine natürliche Zahl n. Betrachte hier das minimale n, so dass $a^n = 0$ gilt. Dann folgt $aa^{n-1} = 0$, wobei $a^{n-1} \neq 0$, was ein Widerspruch zur Nullteilerfreiheit ist.

Die Bemerkung liefert offensichtlich

$$(D) \Rightarrow (R).$$

Lemma: Sei K ein Ring und G eine nicht-triviale Gruppe derart, dass KG nur triviale Einheiten besitzt. Falls K reduziert ist und G kein Element der

Ordnung 2 hat, so ist KG reduziert. Insbesondere gilt also

$$(U) \Rightarrow (R).$$

Beweis: Zeige für beliebiges $\alpha \in KG$, dass folgendes gilt: $\alpha^2 = 0 \Rightarrow \alpha = 0$. Dieses liefert die Behauptung, denn somit gilt $\alpha^n = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ für $n > 1$, also existiert kein von Null verschiedenes nilpotentes Element in KG, d.h. KG ist reduziert.
Da $\alpha^2 = 0$ folgt

$$(1 - \alpha)(1 + \alpha) = 1 - \alpha^2 = 1,$$

somit ist $1 - \alpha$ eine Einheit in KG. Da laut Voraussetzung alle Einheiten von KG trivial sind, gilt also $1 - \alpha = ag$, wobei a Einheit in K und $g \in G$. Nehme an, dass $g \neq 1$ gilt. Laut Voraussetzung gilt $g^2 \neq 1$. Also $g^2 \neq 1 \neq g$. Betrachte

$$0 = \alpha^2 = (1 - ag)^2 = 1 - 2ag + a^2g^2.$$

Dieser Term kann aber nicht Null sein, da $g^2 \neq 1 \neq g$. Somit muss $g = 1$ gelten. Also $\alpha = 1 - a \in K$. Da K reduziert ist, folgt die Behauptung.
Nun bleibt zu zeigen, dass aus $\alpha^2 = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ schon folgt, dass ein nilpotentes Element in KG die Null sein muss. Sei also $\alpha^n = 0$ für ein $n > 1$. Sei n hierbei minimal gewählt. Annahme: $\alpha \neq 0$.
1. Fall: Sei n gerade. Dann gilt aufgrund der Minimalität von n folgendes:

$$0 \neq \alpha^{n/2} =: \beta \Rightarrow 0 \neq \beta^2 = \alpha^n.$$

Widerspruch zu $\alpha^n = 0$.
2. Fall: Sei n ungerade, also $n = 2l + 1$. Somit gilt $\alpha^n\alpha = \alpha^{2l+2} = 0$. Nun ist aber $(2l + 2)/2 = l + 1 < 2l + 1 = n$ und somit aufgrund der Minimalität von n der Ausdruck $\alpha^{l+1} \neq 0$. Also ist auch das Quadrat von α^{l+1} ungleich Null, somit $\alpha^{2l+2} \neq 0$. Widerspruch zu $\alpha^{2l+2} = 0$. □

Bemerkung: Der Beweis von $(R) \Rightarrow (D)$ bedarf einiger gruppentheoretischer Vorbereitung und wird an dieser Stelle ausgelassen.

2 Geordnete Gruppen

Da nun die Beziehung zwischen den Fragstellungen aus dem letzten Abschnitt geklärt ist, ist es naheliegend nach Gruppen zu suchen, für die das Problem (U), d.h. ob die Einheiten von KG trivial sind, gelöst werden kann. Natürlich sind damit laut dem letzten Theorem auch die Probleme (R) und (D) gelöst. Im folgenden werden dazu geordnete Gruppen betrachtet.

Definition: Eine Gruppe G heißt geordnet oder kurz O-Gruppe, falls eine lineare Ordnung "$<$" auf G existiert derart, dass für alle $x, y, z \in G$ gilt

$$x < y \Rightarrow xz < yz \text{ und } zx < zy.$$

Bemerkung: Sei X eine Menge. Eine lineare Ordnung "$<$" auf X ist wie folgt definiert: Für alle $x, y, z \in X$ gilt

$\neg\, x < x$ (Irreflexivität)
$x < y < z \Rightarrow x < z$ (Transitivität)
$x < y$ oder $y < x$ oder $x = y$ (Konnexität).

Beispiel: Die multiplikative Gruppe $\mathbb{R}_{>0}$ mit der gewöhnlichen Ordnung ist eine O-Gruppe. Die additiven Gruppen $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ sind O-Gruppen.

Definition: Sei "$<$" eine Ordnung auf einer Gruppe G. Definiere den positiven Kegel P von G als

$$P = \{x \in G : x > 1\}.$$

Der positive Kegel ist keine Untergruppe, da $1 \notin P$!

Lemma 2.1: Sei G eine geordnete Gruppe mit positivem Kegel P. Dann gilt
a) $P \cdot P \subseteq P$
b) $G \setminus \{1\} = P \cup P^{-1} = \{x^{-1} : x \in P\}$. Diese Vereinigung ist disjunkt.
c) $zPz^{-1} \subseteq P$ für alle $z \in G$.

Beweis: a) Seien $x, y \in P$, also $x, y > 1$. Dann gilt $xy > x > 1$ und $yx > y > 1$ und es folgt $xy \in P$ und $yx \in P$.
b) Sei $x \in G \setminus \{1\}$. Also $x > 1$ oder $x < 1$. Falls $x > 1$, so $x \in P$. Außerdem $1 = x^{-1}x > x^{-1}$, also $x^{-1} \notin P$. Andernfalls $x < 1$, also $x \notin P$. Es folgt $1 = xx^{-1} < x^{-1}$, also $x^{-1} \in P$.
c) Sei $y \in P$, also $y > 1$. Es folgt $zy > z$, also $zyz^{-1} > zz^{-1} = 1$, somit $zyz^{-1} \in P$. □

Bemerkung: Sei $P \subseteq G$ für eine Gruppe G und P erfülle a) bis c) aus dem letzten Lemma. Definiere "$<$" auf G durch

$$x < y \Leftrightarrow x^{-1}y \in P \Leftrightarrow yx^{-1} \in P.$$

Dann wird G zur O-Gruppe mit positivem Kegel P. Insbesondere reicht es also aus einen positiven Kegel P einer Gruppe G anzugeben um jene zu ordnen.

Beweis: Zeige zuerst, dass "$<$" eine lineare Ordnung auf G ist.
Die Irreflexivität ist offensichtlich.
Seien $x, y, z \in G$. Außerdem sei $x < y < z$, also per Definition $yx^{-1}, zy^{-1} \in P$. Eigenschaft a) liefert $(zy^{-1})(yx^{-1}) = zx^{-1} \in P$, also $x < z$. Somit "$<$" transitiv.
Seien $x, y \in G$. Eigenschaft b) liefert $yx^{-1} \in P$ oder $yx^{-1} = 1$ oder $xy^{-1} = (yx^{-1})^{-1} \in P$. Also per Definition $y > x$ oder $y = x$ oder $x > y$. Somit "$<$" konnex und insgesamt eine lineare Ordnung.
Seien $x, y, z \in G$, $x < y$. Somit $yx^{-1} \in P$, Eigenschaft c) liefert $(zy)(zx)^{-1} = z(yx^{-1})z^{-1} \in P$. Außerdem $(yz)(xz)^{-1} = yx^{-1} \in P$. Also $zx < zy$ und $xz < yz$. Somit G geordnete Gruppe.
Da $y1^{-1} = y \in P \Leftrightarrow 1 < y$ ist P positiver Kegel von G. □

Bemerkung: Jede O-Gruppe $(G, <)$ ist torsionsfrei, denn für $g \in G$ gilt:
Falls $g > 1$, so

$$1 < g < g^2 < g^3 < \ldots,$$

falls $g < 1$, so

$$1 > g > g^2 > g^3 > \ldots,$$

also $g^n \neq 1$ für alle natürliche Zahlen n. □

Beispiel: Es existieren torsionsfreie Gruppen, die nicht geordnet werden können, z.B.

$$G =< x, y \mid yxy^{-1} = x^{-1} > .$$

Der positive Kegel P von G muss entweder x oder x^{-1} enthalten, sonst ist Eigenschaft b) verletzt. Enthält P aber x bzw. x^{-1}, so folgt mit Eigenschaft c) und der gegebenen Relation, dass P auch x^{-1} bzw. x enthält und somit aus Eigenschaft a), dass $xx^{-1} = x^{-1}x = 1 \in P$ gilt, was per Defintion von P ausgeschlossen ist. Der Beweis, dass G torsionsfrei ist, wird an dieser Stelle ausgelassen.

Das folgende Theorem zeigt, dass O-Gruppen das Problem (U) lösen.

Theorem: Sei K ein nullteilerfreier Ring, $(G, <)$ eine O-Gruppe. Dann hat KG nur triviale Einheiten und ist somit nullteilerfei.

Beweis: Betrachte ein Produkt $\alpha\beta \in KG$ mit

$$\begin{aligned} \alpha &= a_1g_1 + \cdots + a_mg_m, \quad g_1 < g_2 < \cdots < g_m, \quad a_i \neq 0 \text{ für } 1 \leq i \leq m, \\ \beta &= b_1h_1 + \cdots + b_nh_n, \quad h_1 < h_2 < \cdots < h_n, \quad b_j \neq 0 \text{ für } 1 \leq j \leq n. \end{aligned}$$

Nun gilt $g_1h_1 \leq g_ih_j$, Gleichheit tritt ein genau dann wenn $i = j = 1$. Das "kleinste" Gruppenelement in $\alpha\beta$ ist also g_1h_1 (mit Koeffizienten $0 \neq a_1b_1 \in K$) und das "größte" Gruppenelement in $\alpha\beta$ ist g_mh_n (mit Koeffizienten $0 \neq a_mb_n \in K$). Somit $\alpha\beta \neq 0$ und falls $\alpha\beta = \beta\alpha = 1$ gilt, muss $m = n = 1$ gelten. Also $\alpha = a_1g_1$, $\beta = b_1h_1$ mit $a_1b_1 = b_1a_1 = 1 \in K$ und $g_1h_1 = h_1g_1 = 1 \in G$. Somit folgt die Behauptung. $\square$

Levis Theorem: Sei G eine torsionsfreie und abelsche Gruppe. Dann lässt sich G ordnen.

Beweis: Sei G eine torsionsfreie und abelsche Gruppe. Da G abelsch ist, lässt sich G als $\mathbb{Z}$-Modul auffassen. Somit lässt sich das Tensorprodukt $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} G =: G_1$ bilden. G_1 ist ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Da G torsionsfrei ist, lässt sich G in G_1 einbetten via $g \mapsto 1 \otimes g$. Es reicht also G_1 zu ordnen, denn G erbt somit eine Ordnung in dem man für $x, y \in G$ setzt $x <_G y \Leftrightarrow 1 \otimes x <_{G_1} 1 \otimes y$. Es wird nun ein positiver Kegel P für G_1 angegeben. Da G_1 ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum ist, besitzt G_1 eine Basis. Sei $\{g_i : i \in I\}$ eine Basis für G_1 und "$<$" eine Ordnung auf I. Fasse G_1 additiv auf und setze

$$P = \{a_1g_{i1} + \cdots + a_ng_{in} : i_1 < \cdots < i_n \text{ in } I, \quad a_1 > 0 \text{ in } \mathbb{Q}\}.$$

Es bleiben die Eigenschaften a) bis c) eines positiven Kegels zu verifizieren.
a) $P + P \subseteq P$: Seien $a = a_1g_{i1} + \cdots + a_ng_{in}$, $b = b_1g_{j1} + \cdots + b_mg_{jm} \in P$. Betrachte $a + b$. Es lassen sich Basiselemente mit gleichem Index zusammen fassen und die restlichen der Größe nach sortieren. Außerdem ist der Koeffizient des kleinsten Basiselements größer 0, da $a_1, b_1, a_1 + b_1 > 0$ gilt.
b) $G_1 \setminus \{0\} = P \cup P^{-1}$:

$$P^{-1} = \{a_1g_{i1} + \cdots + a_ng_{in} : i_1 < \cdots < i_n \text{ in } I, \quad a_1 < 0 \text{ in } \mathbb{Q}\}.$$

Offensichtlich gilt $0 \notin P \cup P^{-1}$ und die Vereinigung ist disjunkt. Die Gleichheit der Mengen ist sofort einsehbar, da $\{g_i : i \in I\}$ eine Basis für G_1 ist.

c) $z + P + z^{-1} \subseteq P$ für alle $z \in G_1$: Da G_1 als Vektorraum insbesondere die Struktur einer abelschen Gruppe besitzt, ist dieser Punkt offensichtlich. $\square$

Theorem von Birkhoff, Iwasawa und Neumann: Sei G eine freie Gruppe. Dann lässt sich G ordnen.

3 Unique Product Groups

Im folgenden sei K ein Körper.

3.1 Rechtsgeordnete Gruppen

Definition: Sei G eine Gruppe. G heißt rechtsgeordnet oder kurz G ist eine RO-Gruppe genau dann, wenn eine lineare Ordnung "$<$" auf G existiert derart, dass für alle $x, y, z \in G$ gilt

$$x < y \Rightarrow xz < yz.$$

Definiere den positiven Kegel P einer RO-Gruppe G als

$$P = \{x \in G : 1 < x\}.$$

Bemerkung: Jede O-Gruppe ist auch eine RO-Gruppe. Offensichtlich ist auch jede RO-Gruppe torsionsfrei.

Folgendes Lemma zeigt, dass P wie im Fall einer RO-Gruppe wiederum die Ordnung definiert.

Lemma 3.1: Sei G eine Gruppe. Falls G eine RO-Gruppe mit positivem Kegel P ist, so gilt
a) $P \cdot P \subseteq P$
b) $G \setminus \{1\} = P \cup P^{-1} = \{x^{-1} : x \in P\}$. Diese Vereinigung ist disjunkt.
Umgekehrt gilt: Sei $P \subseteq G$ mit a) und b). Dann wird G zu einer RO-Gruppe mittels

$$x < y \Leftrightarrow yx^{-1} \in P$$

und P ist positiver Kegel von G.

Beweis: Analog zum Fall der O-Gruppen.

Lemma 3.2: Sei G eine Gruppe. Sei $N \subseteq G$ eine normale Untergruppe.
Falls N und G/N beide RO-Gruppen sind, so auch G.

Beweis: Sei $\bar{\ }: G \to G/N$ die Projektion.
Da N und G/N beide RO-Gruppen sind, existieren positive Kegel für die beiden Gruppen. Seien P_N und $P_{G/N}$ jene. Definiere

$$P_G = \{x \in G : \overline{x} \in P_{G/N} \text{ oder } x \in P_N\}.$$

Somit offensichtlich a) und b) aus Lemma 3.1 erfüllt und damit ist G eine RO-Gruppe. $\square$

Als Anwendung des letzten Lemmas betrachte man

Lemma 3.3: Sei G eine Gruppe. Falls G eine endliche Subnormalreihe

$$\{1\} = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_n = G$$

mit torsionsfreien und abelschen Faktoren G_{i+1}/G_i besitzt, so ist G eine RO-Gruppe.

Beweis von Lemma 3.4: Betrachte die oben angegebene Subnormalreihe von G. Da die Faktoren G_{i+1}/G_i torsionsfrei und abelsch sind, sind sie O-Gruppen (nach Levis Theorem), insbesondere RO-Gruppen. Somit liefert Lemma 3.2, dass G ebenfalls eine RO-Gruppe ist.

3.2 Unique Product Groups

Definition: Eine Gruppe G wird u.p.-Gruppe genannt (u.p. steht für unique product) genau dann, wenn für zwei beliebige nicht-leere endliche Teilmengen A, B von G gilt, dass ein $x \in G$ existiert, welches eine eindeutige Darstellung der Form $x = ab$ für $a \in A$, $b \in B$ hat.

Eine Gruppe G wird t.u.p.-Gruppe genannt (t.u.p. steht für two unique products) genau dann, wenn für zwei beliebige nicht-leere endliche Teilmengen A, B von G mit $|A| + |B| \geq 3$ gilt, dass $x, y \in G$, $x \neq y$ existieren, welche jeweils eine eindeutige Darstellung der Form $x = ab$, $y = cd$ für $a, c \in A$, $b, d \in B$ haben.

Bemerkung: Eine t.u.p.-Gruppe ist immer eine u.p.-Gruppe.

Lemma 3.5: Falls G eine RO-Gruppe ist, so ist G eine t.u.p.-Gruppe.

Falls A, B zwei nicht-leere endliche Teilmengen von G sind, so gilt insbesondere, dass Elemente $b', b'' \in B$ existieren derart, dass die Produkte $a_{\max}b'$ und $a_{\min}b''$ genau eine Darstellung in AB haben. Mit $a_{\max}$ bzw. $a_{\min}$ wird das größte bzw. kleinste Element der endlichen geordneten Menge A bezeichnet.

Beweis: Sei G eine RO-Gruppe, seien A, B zwei nicht-leere endliche Teilmengen von G. Wähle $b' \in B$, sodass $a_{\max}b'$ das größte Element in $a_{\max}B$ ist und wähle $b'' \in B$, sodass $a_{\min}b''$ das kleinste Element in $a_{\min}B$ ist. Seien $a \in A$, $b \in B$. Dann folgt aus $a_{\min} \leq a \leq a_{\max}$, dass $a_{\min}b \leq ab \leq a_{\max}b$ gilt und somit

$$a_{\min}b'' \leq a_{\min}b \leq ab \leq a_{\max}b \leq a_{\max}b'.$$

Falls $a_{\min}b'' = ab$, so folgt $a_{\min} = a$ und somit $b'' = b$.
Falls $a_{\max}b' = ab$, so folgt $a_{\max} = a$ und somit $b' = b$.
Also besitzen $a_{\max}b'$ und $a_{\min}b''$ jeweils genau eine Darstellung in AB. $\square$

Bemerkung: Es ist ein offenes Problem, ob eine u.p.-Gruppe existiert, die keine RO-Gruppe ist (Stand April 2007).

Lemma 3.6: Sei G eine Gruppe, H eine normale Untergruppe von G und K ein Körper.

a) Falls KH nullteilerfrei und G/H eine u.p.-Gruppe ist, so hat KG keine Nullteiler.
b) Falls KH nur triviale Einheiten hat, H torsionsfrei ist und G/H eine t.u.p.-Gruppe ist, so hat KG nur triviale Einheiten.

Bemerkung: Jede u.p.-Gruppe G ist torsionsfrei.

Beweis: Sei H eine endliche Untergruppe von G. Da G eine u.p.-Gruppe ist, gibt es ein Element in $H \cdot H = H$, das sich auf genau eine Weise darstellen lässt. Da sich aber jedes $h \in H$ als $h \cdot 1 = 1 \cdot h$ schreiben lässt, muss H trivial sein und somit sind alle endlichen Untergruppen von G trivial, also ist G torsionsfrei. $\square$

Bemerkung: Es existieren torsionsfreie Gruppen, die keine u.p.-Gruppen sind. Ein Beispiel hierfür ist

$$G =< x, y \mid x^{-1}y^2x = y^{-2}, y^{-1}x^2y = x^{-2} > .$$

Beweis: Siehe [4].

Theorem 3.7: Sei G eine Gruppe, sei

$$\{1\} = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_n = G$$

eine endliche Subnormalreihe von G mit torsionsfreien und abelschen Faktoren G_{i+1}/G_i. Falls K ein Körper ist, so hat KG keine Nullteiler und nur triviale Einheiten.

Beweis: Lemma 3.3 liefert, dass G eine RO-Gruppe ist. Somit liefert Lemma 3.5, dass G eine t.u.p.-Gruppe ist. Nun kann man Lemma 3.6 b) anwenden, in dem man H trivial wählt und erhält, dass KG nur triviale Einheiten enthält und somit natürlich auch keine Nullteiler. $\square$

3.3 Zusammenfassung der Ergebnisse

Die Ergebnisse aus Kapitel 3 lassen sich wie folgt zusammenfassen. Sei G eine Gruppe und K ein Körper.

$$\begin{array}{c}
G \text{ O-Gruppe} \\
\Big\Downarrow {\scriptstyle \text{Def.}} \\
G \text{ RO-Gruppe} \\
\Big\Downarrow {\scriptstyle 3.5} \\
G \text{ t.u.p.-Gruppe} \\
\Big\Downarrow {\scriptstyle \text{Def.}} \\
G \text{ u.p.-Gruppe} \\
\Big\Downarrow {\scriptstyle 3.6\text{ a)}} \\
KG \text{ hat keine Nullteiler} \\
\Big\Downarrow {\scriptstyle \text{Bemerkung in 1}} \\
G \text{ torsionsfrei}
\end{array}$$

4 Ausblick

In Theorem 3.7 wird eine Gruppe G betrachtet, die eine endliche Subnormalreihe mit torsionsfreien und abelschen Faktoren besitzt. Der Gruppenring KG ist dann nullteilerfrei. Es stellt sich heraus, dass Gruppen, die eine gewisse endliche Normalreihe bzw. Subnormalreihe haben, das Nullteilerproblem lösen. Betrachte dazu folgende Definition:

Definition: Eine Gruppe G heißt auflösbar, falls G eine endliche Subnormalreihe mit abelschen Faktoren besitzt.
G heißt polyzyklisch, falls G eine endliche Subnormalreihe mit zyklischen Faktoren besitzt.
G heißt superauflösbar, falls G eine endliche Normalreihe mit zyklischen Faktoren besitzt.

Bemerkung: Offensichtlich gilt

$$G \text{ superauflösbar } \Rightarrow G \text{ polyzyklisch } \Rightarrow G \text{ auflösbar.}$$

Definition: Eine Gruppe G heißt virtuell polyzyklisch, falls sie eine Untergruppe von endlichem Index besitzt, die polyzyklisch ist.

Theorem von Formanek: Sei G eine torsionsfreie superauflösbare Gruppe und K ein Körper, dann hat KG keine Nullteiler.

Theorem von Farkas und Snider: Sei G eine torsionsfreie virtuell polyzyklische Gruppe und K ein Körper der Charakteristik Null. Dann hat KG keine Nullteiler.

Literatur

[1] Carter, W.: Non-unique Product Groups on Two Generators, Blacksburg, Virginia, 2007, Master Thesis submitted to the Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University

[2] Lam, T. Y., A first course in noncommutative rings, Second edition, Graduate Texts in Mathematics, 131. Springer-Verlag, New York, 2001

[3] Passman, D. S.: The algebraic structure of group rings, Wiley-Interscience, New York, 1977

[4] Promislow, S. D.: A simple example of a torsion-free, non unique product group, Bull. London Math. Soc. 20 (1988), no. 4, 302-304. MR MR940281 (89e:20064)