

Die Theorie der Spingruppen

1 Clifford-Algebren

Definition 1 (Clifford-Algebra).

Sei V ein Vektorraum über k und sei q eine quadratische Form auf V . Eine **Tensoralgebra** wird durch

$$\mathcal{T}(V) = \sum_{r=0}^{\infty} \bigotimes^r V$$

bestimmt. Sei $\mathcal{I}_q(V)$ das Ideal in $\mathcal{T}(V)$, welches von allen Elementen der Form $v \otimes v + q(v)1$ für $v \in V$ erzeugt wird.

Die **Cliffordalgebra** $Cl(V, q)$ zu V und q ist eine assoziative Algebra mit Einheit, die durch

$$Cl(V, q) \equiv \mathcal{T}(V) / \mathcal{I}_q(V)$$

definiert ist.

Lemma 2. Es existiert eine natürliche Inklusion

$$V \hookrightarrow Cl(V, q),$$

welche das Bild der kanonischen Projektion

$$\pi_q : \mathcal{T}(V) \rightarrow Cl(V, q)$$

ist.

Die Algebra $Cl(V, q)$ wird durch den Vektorraum $V \subset Cl(V, q)$ und die Einheit 1 erzeugt. Es gilt die Relation

$$v \cdot v = -q(v)1 \tag{1.1}$$

für $v \in V$. Ist die Charakteristik von k ungleich zwei, so gilt für alle $v, w \in V$

$$v \cdot w + w \cdot v = -2q(v, w) \tag{1.2}$$

mit $2q(v, w) \equiv q(v+w) - q(v) - q(w)$ als **Polarisation** von q .

Die Gleichung (1.1) können wir dazu nutzen, die folgende universelle Eigenschaft der Algebra zu geben:

Lemma 3. *Sei $f : V \rightarrow \mathcal{A}$ eine lineare Abbildung in eine assoziative Algebra mit Einheit, so dass*

$$f(v) \cdot f(v) = -q(v)1 \quad (1.3)$$

für alle $v \in V$ gilt. Dann lässt sich f eindeutig zu einem k -Algebra-Homomorphismus $\tilde{f} : Cl(V, q) \rightarrow \mathcal{A}$ erweitern. Zudem ist $Cl(V, q)$ die einzige assoziative Algebra mit dieser Eigenschaft.

Beweis: Wir zeigen an dieser Stelle nur die Existenz von \tilde{f} . Jede lineare Abbildung $f : V \rightarrow \mathcal{A}$ lässt sich eindeutig zu einem Algebra-Homomorphismus $\bar{f} : \mathcal{T}(V) \rightarrow \mathcal{A}$ erweitern. Eigenschaft (1.3) bedeutet, dass $\bar{f} = 0$ auf $\mathcal{I}_q(V)$ ist und sich somit auf $Cl(v, q)$ einschränken lässt.

Im Folgenden sei Cl_n die Cliffordalgebra über \mathbb{R}^n und $q(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2$.

Lemma 4. *Sei e_1, \dots, e_n eine q -orthonormale Basis von $\mathbb{R}^n \subset Cl_n$. Dann wird Cl_n (als Algebra) durch die Elemente e_1, \dots, e_n mittels der Relation*

$$e_i e_j + e_j e_i = -2\delta_{ij}$$

erzeugt.

Beispiel 5. *Um den abstrakten Begriff der Cliffordalgebra verständlicher zu machen, wird an dieser Stelle die Berechnung von Cl_1 angeführt:*

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\mathbb{R}) &= (\mathbb{R})^{\otimes 0} \oplus (\mathbb{R})^{\otimes 1} \oplus (\mathbb{R})^{\otimes 2} \oplus \dots \\ &= \mathbb{R} \cdot 1_{\mathcal{T}(\mathbb{R})} \oplus \mathbb{R} \cdot 1_{\mathbb{R}} \oplus \mathbb{R} \cdot (1_{\mathbb{R}} \otimes 1_{\mathbb{R}}) \oplus \dots \end{aligned} \quad (1.4)$$

Da in Cl_1 die Relation (1.1) gilt, folgt:

$$\begin{aligned} 1_{\mathbb{R}} \otimes 1_{\mathbb{R}} &= -q(1_{\mathbb{R}}) \cdot 1_{Cl_1} \\ &= -1_{\mathbb{R}} \cdot 1_{Cl_1} \\ \Rightarrow \quad 1_{\mathbb{R}} \otimes 1_{\mathbb{R}} &= -1_{Cl_1} \end{aligned}$$

Benutzen wir dies zusammen mit (1.4), so erhalten wir:

$$\begin{aligned} Cl_1 &= \mathbb{R} \cdot 1_{Cl_1} + \mathbb{R} \cdot 1_{\mathbb{R}} + \mathbb{R} \cdot 1_{Cl_1} + \dots \\ &= \mathbb{R} \cdot 1_{Cl_1} + \mathbb{R} \cdot 1_{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

Die Cliffordalgebra ist isomorph zu \mathbb{C} . Ein Isomorphismus ist dadurch gegeben, dass $1 \in \mathbb{C}$ auf $1_{Cl_1} \in Cl_1$ (Isomorphiemuseigenschaft) und $i \in \mathbb{C}$ auf $1_{\mathbb{R}} \in Cl_1$ abgebildet wird. Die Homomorphie gilt, da $i^2 = -1$ in \mathbb{C} und $1_{\mathbb{R}} \otimes 1_{\mathbb{R}} = -1_{Cl_1}$ in Cl_1 .

An dieser Stelle wird eine Tabelle der Cliffordalgebren über \mathbb{R} gegeben:

n	Cl_n
1	\mathbb{C}
2	\mathbb{H}
3	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$
4	$\mathbb{H}(2)$
5	$\mathbb{C}(4)$
6	$\mathbb{R}(8)$
7	$\mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8)$
8	$\mathbb{R}(16)$

Tabelle 1: Cliffordalgebren über \mathbb{R}^n

$\mathbb{K}(m)$ ist der Raum der $m \times m$ -Matrizen über \mathbb{K} . Bei Cliffordalgebren gilt die Bott-Periodizität, d.h. $Cl_{n+8} \cong Cl_n \otimes \mathbb{R}(16)$. Eine etwas ausführlichere Berechnung wird in dem dritten und vierten Abschnitt des ersten Kapitels im Buch 'Spin geometry' gegeben [LM89].

Die Gruppe $O(n)$ lässt sich mit Lemma 3 kanonisch zu einer Gruppe von Automorphismen von Cl_n erweitern. Die Einbettung

$$O(n) \subset \text{Aut}(Cl_n)$$

liegt in der Untergruppe der inneren Automorphismen. Ein Element aus dieser Gruppe, welches im weiteren Verlauf von grösserer Bedeutung ist, stellt der Automorphismus

$$\alpha : Cl_n \rightarrow Cl_n,$$

der die Abbildung $\alpha(v) = -v$ für $v \in V$ erweitert, dar. Da $\alpha^2 = Id$, existiert eine Zerlegung

$$Cl_n = Cl_n^0 \oplus Cl_n^1 \quad (1.5)$$

mit $Cl_n^0 = \{\varphi \in Cl_n : \alpha(\varphi) = \varphi\}$ als den **geraden Teil** von Cl_n und $Cl_n^1 = \{\varphi \in Cl_n : \alpha(\varphi) = -\varphi\}$ als den **ungeraden Teil**.

2 Die Gruppen Pin und Spin

Definition 6 (P_n , getwistete, adjungierte Darstellung,).

Die Untergruppe von $Cl_n^\times = \{\varphi \in Cl_n : \exists \varphi^{-1} \text{ mit } \varphi\varphi^{-1} = \varphi^{-1}\varphi = 1\}$, die durch die Elemente $v \in \mathbb{R}^n$ mit $v \neq 0$ erzeugt wird, ist \mathbf{P}_n .

Die **getwistete, adjungierte Darstellung**

$$\widetilde{\mathbf{Ad}} : Cl_n^\times \rightarrow \text{GL}(Cl_n)$$

ist durch

$$\widetilde{\mathbf{Ad}}_\varphi(y) = \alpha(\varphi)y\varphi^{-1}$$

bestimmt.

Satz 7. Sei $v \in \mathbb{R}^n \subset Cl_n$ ein Element mit $q(v) \neq 0$. Dann gilt $\widetilde{\mathbf{Ad}}_v(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.

Es gilt zudem für alle $w \in \mathbb{R}^n$ die folgende Gleichung:

$$\widetilde{\mathbf{Ad}}_v(w) = w - 2\frac{q(v,w)}{q(v)}v \quad (2.1)$$

Beweis: Da $v^{-1} = -v/q(v)$ erhalten wir mit (1.2), dass

$$\begin{aligned} q(v)\widetilde{\mathbf{Ad}}_v(w) &= q(v)\alpha(v)wv^{-1} = v w v = -v^2 w - 2q(v,w)v \\ &= q(v)w - 2q(v,w)v \end{aligned}$$

□

Die rechte Seite der Gleichung (2.1) ist die Abbildung $\rho_v : V \rightarrow V$, welche die Spiegelung an der Hyperebene $v^\perp = \{w \in V : q(v,w) = 0\}$ darstellt. Das heisst, dass ρ_v trivial auf der Hyperebene operiert und v auf $-v$ abbildet.

Die Gruppe P_n hat verschiedene, wichtige Untergruppen:

Definition 8 (Pin- und Spingruppe).

Die Untergruppe **Pin** von P_n , die durch Elemente $v \in V$ mit der Eigenschaft $q(v) = \pm 1$ erzeugt wird, heisst **Pingruppe**. Die dazu assoziierte **Spingruppe**

von \mathbb{R}^n ist durch

$$\mathbf{Spin}_n = Pin_n \cap Cl_n^0$$

definiert.

Im Folgenden fassen wir Elemente in P_n als endliches Produkt von Elementen $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ mit $v_i \neq 0$ auf. Da $\widetilde{\text{Ad}}(\varphi_1\varphi_2) = \widetilde{\text{Ad}}(\varphi_1)\widetilde{\text{Ad}}(\varphi_2)$ für alle $\varphi_1, \varphi_2 \in Cl_n$ gilt, können wir die getwistete, adjungierte Darstellung als Abbildung von P_n auf eine endliche Hintereinanderausführung von Spiegelungen ρ_v an Hyperebenen v^\perp mit $v \in V$ interpretieren. Im Zusammenhang mit der Darstellung von P_n können wir zu den bisher genannten äquivalente Definitionen von Pin_n und $Spin_n$ finden:

$$\begin{aligned} Pin_n &= \{v_1 \cdots v_r \in P_n : q(v_i) = \pm 1 \text{ für alle } i\} \\ Spin_n &= \{v_1 \cdots v_r \in Pin_n : r \text{ ist gerade}\} \end{aligned}$$

Durch die bisherigen Erkenntnisse gepaart mit elementaren Berechnungen erhalten wir:

Theorem 9.

Es existieren die kurzen, exakten Sequenzen:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow Spin_n \xrightarrow{\widetilde{\text{Ad}}} SO(n) \rightarrow 1 \\ 0 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow Pin_n \xrightarrow{\widetilde{\text{Ad}}} O(n) \rightarrow 1 \end{aligned}$$

Für die weiteren Betrachtungen benötigen wir die

Definition 10 (Volumenelement).

*Sei auf \mathbb{R}^n eine Orientierung gewählt und sei e_1, \dots, e_n eine positiv orientierte, q -orthonormale Basis. Das dazu assoziierte, (**orientierte**) **Volumenelement** ist*

$$\omega = e_1 \cdots e_n.$$

Diese Definition ist (bis auf Orientierung) basisunabhängig.

Lemma 11. *Für ω aus Definition 10 gilt:*

$$\omega^2 = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \tag{2.2}$$

$$v\omega = (-1)^{n-1}\omega v \quad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^n \tag{2.3}$$

Ist also n ungerade, so ist ω zentral in Cl_n . Gilt dies nicht, so ist

$$\varphi\omega = \omega\alpha(\varphi)$$

für alle $\varphi \in Cl_n$.

Beweis: Da die Beweisführung bei allen Gleichungen analog verläuft, wird an dieser Stelle nur die erste Gleichung gezeigt: Sei e_1, \dots, e_n wie in Definition 10, dann gilt

$$\omega^2 = e_1 \cdots e_n \cdot e_1 \cdots e_n.$$

Benutzen wir nun Lemma 4, so erhalten wir :

$$\begin{aligned} e_1 \cdots e_n \cdot e_1 \cdots e_n &= - e_1 \cdots e_{n-1} \cdot e_1 \cdot e_n \cdot e_2 \cdots e_n \\ &\quad \vdots \\ &= (-1)^{n-1} e_1^2 \cdot e_2 \cdots e_n \cdot e_2 \cdots e_n \\ &= (-1)^n e_2 \cdots e_n \cdot e_2 \cdots e_n \end{aligned}$$

Führen wir diese Rechnung weiter in diesem Stile fort, so verifizieren wir den ersten Teil von (2.2). □

Lemma 12. Sei $n \equiv 3$ oder $4 \pmod{4}$ und

$$\pi^+ = \frac{1}{2}(1 + \omega) \text{ und } \pi^- = \frac{1}{2}(1 - \omega).$$

Dann erfüllen π^+ und π^- folgende Relationen:

$$\pi^+ + \pi^- = 1 \tag{2.4}$$

$$(\pi^+)^2 = \pi^+ \text{ und } (\pi^-)^2 = \pi^- \tag{2.5}$$

$$\pi^+ \pi^- = \pi^- \pi^+ = 0. \tag{2.6}$$

Dies führt zu den wichtigen Erkenntnissen:

Satz 13. Sei ω das Volumeelement und $n \equiv 3 \pmod{4}$. Dann können wir Cl_n in eine direkte Summe von isomorphen Unteralgebren zerlegen:

$$Cl_n = Cl_n^+ \oplus Cl_n^- \tag{2.7}$$

mit $Cl_n^\pm = \pi^\pm \cdot Cl_n = Cl_n \cdot \pi^\pm$ und $\alpha(Cl_n^\pm) = Cl_n^\mp$.

Beweis: Wegen (2.3) wissen wir, dass ω zentral ist. Somit sind auch π^+ und π^- zentral und es folgt aus (2.4), (2.5) und (2.6), dass (2.7) eine Zerlegung in Ideale ist. Da $\omega \in Cl_n^1$ aus (1.5), folgt $\alpha(\pi^\pm) = \pi^\mp$ und somit $\alpha(Cl_n^\pm) = Cl_n^\mp$. Beide Ideale sind isomorph (α ist ein Automorphismus auf Cl_n).

□

Satz 14. Sei $n \equiv 4 \pmod{4}$ und W ein Cl_n -Modul (d.h. V ist ein reeler Vektorraum mit einem Algebromorphismus $\rho : Cl_n \rightarrow \text{Hom}(W, W)$). Dann existiert eine Zerlegung

$$W = W^+ \oplus W^- \quad (2.8)$$

in $+1$ und -1 -Eigenräume der Anwendung von ω auf W (da $\omega^2 = 1$). Es sind

$$W^+ = \rho(\pi^+) \cdot W \quad \text{und} \quad W^- = \rho(\pi^-) \cdot W,$$

und wir erhalten durch die Anwendung von jedem $e \in \mathbb{R}^n$ mit $q(e) \neq 0$ einen Isomorphismus

$$e : W^+ \rightarrow W^- \quad \text{und} \quad e : W^- \rightarrow W^+ \quad (2.9)$$

Beweis: In diesem Satz interpretieren wir für jedes Paar $a \in Cl_n$ und $w \in W$ die Multiplikation $a \cdot w$ als die Anwendung von a auf w mittels des vorgegebenen Algebromorphismus $Cl_n \rightarrow \text{Hom}(W, W)$.

Die Zerlegung (2.8) ist eine Folgerung aus

$$\omega \cdot \pi^\pm = \pm \pi^\pm$$

zusammen mit den Gleichungen (2.4), (2.5) und (2.6). (2.9) erhalten wir durch (2.3)

$$\begin{cases} e\pi^+ = \frac{1}{2}e(1 + \omega) = \frac{1}{2}(1 - \omega)e = \pi^- e \\ e\pi^- = \frac{1}{2}e(1 - \omega) = \frac{1}{2}(1 + \omega)e = \pi^+ e \end{cases}$$

und $e \cdot e = -q(e) \cdot 1$ (da $e \in \mathbb{R}^n$).

□

Nun behandeln wir die Zusammenhänge zwischen Cl_n und Cl_{n+1}^0 aus (1.5):

Theorem 15.

Es existiert ein Algebrasomorphismus

$$Cl_n \cong Cl_{n+1}^0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: Wir wählen eine q -orthonormale Basis e_1, \dots, e_{n+1} von \mathbb{R}^{n+1} . Sei $\mathbb{R}^n = \text{span}\{e_i | i \neq n+1\}$ und $f : \mathbb{R}^n \rightarrow Cl_{n+1}^0$ die lineare Fortsetzung von

$$f(e_i) = e_{n+1}e_i$$

für $i \neq n+1$. Für $a = \sum_{i \neq n+1} a_i e_i$ gilt:

$$\begin{aligned} f(a)^2 &= \sum_{i,j} a_i a_j e_{n+1} e_i e_{n+1} e_j \\ &= \sum_{i,j} a_i a_j e_i e_j \\ &= a \cdot a = -q(a) \cdot 1, \end{aligned}$$

da $e_{n+1}^2 = -1$ und $e_{n+1}e_i = -e_i e_{n+1}$ für $i \neq n+1$ ist. Mit Lemma 3 lässt sich f zu einem Algebromorphismus

$$\tilde{f} : Cl_n \rightarrow Cl_{n+1}^0$$

fortsetzen. Wir erhalten die Isomorphieeigenschaft von \tilde{f} durch Überprüfung an einer linearen Basis. □

3 Darstellungen

Sei im Folgenden V ein Vektorraum über dem Feld k und q die quadratische Form auf V .

Definition 16 (K -Darstellung, $Cl(V, q)$ -Modul, Cliffordmultiplikation).

Sei $K \supseteq k$ ein Feld. Eine **K -Darstellung** der Cliffordalgebra $Cl(V, q)$ ist eine k -lineare Abbildung

$$\rho : Cl(V, q) \rightarrow \text{Hom}_K(W, W)$$

in die Algebra der linearen Transformationen eines endlich dimensionalen Vektorraums W über K , die $\rho(\varphi\psi) = \rho(\varphi) \circ \rho(\psi)$ für alle $\varphi, \psi \in Cl(V, q)$ erfüllt. Der Raum W wird **$Cl(V, q)$ -Modul über K** genannt. Wir schreiben desweiteren

$$\rho(\varphi)(w) \equiv \varphi \cdot w \tag{3.1}$$

für alle $\varphi \in Cl(V, q)$ und $w \in W$. Das Produkt aus (3.1) heisst **Cliffordmultiplikation**.

Definition 17 (reduzibel, irreduzibel).

Seien $V, q, k \subseteq K$ wie in Definition 16. Wir nennen eine K -Darstellung **reduzibel**, wenn wir den Vektorraum W als nicht triviale, direkte Summe

$$W = W_1 \oplus W_2$$

über K mit $\rho(\varphi)(W_j) \subseteq W_j$ für $j = 1, 2$ und für alle $\varphi \in Cl(V, q)$ schreiben können. In diesem Fall ist

$$\rho = \rho_1 \oplus \rho_2$$

mit $\rho_j(\varphi) \equiv \rho(\varphi)|_{W_j}$ für $j = 1, 2$. Eine Darstellung heisst **irreduzibel**, wenn sie nicht reduzibel ist.

Lemma 18. Jede K -Darstellung ρ einer Cliffordalgebra $Cl(V, q)$ lässt sich in eine direkte Summe $\rho = \rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_m$ von irreduziblen Darstellungen zerlegen.

Beweis: Ist ρ reduzibel, so können wir sie in eine Summe $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2$ zerlegen. Diese Vorgehensweise lässt sich für ρ_1, ρ_2 sukzessiv fortsetzen und bricht aufgrund der endlichen Dimension von W ab.

□

Definition 19 (Äquivalenz von Darstellungen).

Zwei Darstellungen $\rho_j : Cl(V, q) \rightarrow \text{Hom}_K(W_j, W_j)$ für $j = 1, 2$ sind **äquivalent**, wenn ein K -linearer Isomorphismus $F : W_1 \rightarrow W_2$ mit $F \circ \rho_1(\varphi) \circ F^{-1} = \rho_2(\varphi)$ für alle $\varphi \in Cl(V, q)$ existiert.

Satz 20. Sei $\rho : Cl_n \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(W, W)$ eine irreduzible, reale Darstellung mit $n \equiv 3 \pmod{4}$. Dann gilt eine der beiden Gleichungen

$$\rho(\omega) = \text{Id} \qquad \rho(\omega) = -\text{Id}.$$

Beide Möglichkeiten können auftreten und die korrespondierenden Darstellungen sind nicht äquivalent.

Beweis: Da durch (2.2) $\rho(\omega)^2 = \rho(\omega^2) = \text{Id}$ gilt, können wir W in die $+1$ und -1 Eigenräume von $\rho(\omega)$ zerlegen, also $W = W^+ \oplus W^-$. Da ω zentral ist (siehe (2.3)), gilt für alle $\varphi \in Cl_n$ und $w \in W^+$:

$$\begin{aligned} \rho(\varphi)(w) &= \rho(\varphi)(\rho(\omega)(w)) &= \rho(\varphi) \circ \rho(\omega)(w) &= \rho(\varphi \cdot \omega)(w) \\ &= \rho(\omega \cdot \varphi)(w) &= \rho(\omega) \circ \rho(\varphi)(w) &= \rho(\omega)(\rho(\varphi)(w)) \\ &\Rightarrow \rho(\varphi)(w) \in W^+ \end{aligned}$$

d.h., dass der Raum W^+ \mathbf{Cl}_n -invariant ist. Eine analoge Berechnung kann man für W^- machen. Da W irreduzibel ist, gilt entweder $W = W^+$ oder $W = W^-$ (siehe Definition 17).

Sei nun F ein Isomorphismus $F : W \rightarrow W'$ und $\rho(\omega)$ ein skalares Vielfaches von Id . Dann ist $F \circ \rho(\omega) \circ F^{-1}$ dasgleiche skalare Vielfache von Id . Die Darstellungen ρ_+ und ρ_- mit $\rho_{\pm}(\omega) = \pm \text{Id}$ können also nach Definition 19 nicht äquivalent sein.

Zu guter Letzt müssen wir noch zeigen, dass beide Darstellungen existieren. Dazu nehmen wir irreduzible Faktoren von Cl_n (siehe (2.7)), die auf Cl_n^+ und auf Cl_n^- durch linksseitige Multiplikation operieren.

□

Theorem 21.

Sei $\rho : Cl_n \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(W, W)$ eine irreduzible, reale Darstellung mit $n \equiv 0 \pmod{4}$ und es gelte die Zerlegung

$$W = W^+ \oplus W^-$$

mit $W^{\pm} = (1 \pm \rho(\omega)) \cdot W$. Dann ist jeder dieser Unterräume invariant unter Cl_n^0 . Anhand des Isomorphismus $Cl_n \cong Cl_{n+1}^0$ korrespondieren diese Räume mit den zwei verschiedenen, irreduziblen Darstellungen von Cl_{n-1} .

Beweis: Die Zerlegung existiert nach (2.8). Die Invarianz von W^+ und W^- unter Cl_n^0 zeigen wir anhand W^- :

Sei $\varphi \in Cl_n^0$ und $v \in W^- \Rightarrow \exists w \in W$ mit $v = \rho(\frac{1}{2}(1 - \omega))w = \frac{1}{2}(1 - \rho(\omega))(w)$ (siehe Satz 14). Dann gilt:

$$\begin{aligned} \rho(\varphi)(v) &= \rho(\varphi)\left(\frac{1}{2}(1 - \rho(\omega))(w)\right) \\ &= \frac{1}{2}(\rho(\varphi) - \rho(\varphi\omega))(w) \\ &\stackrel{(11)}{=} \frac{1}{2}(\rho(\varphi) - \rho(\omega\varphi))(w) \\ &= \frac{1}{2}(1 - \rho(\omega)) \underbrace{\rho(\varphi)(w)}_{\in W} \\ &\quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\in W^-} \end{aligned}$$

Anhand Lemma 4 und $n \equiv 0 \pmod{4}$ gilt zudem

$$\begin{aligned} (e_1 e_n) \cdots (e_{n-1} e_n) &= (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} e_1 \cdots e_{n-1} (e_n)^{n-1} \\ &= e_1 \cdots e_n \end{aligned}$$

Der Isomorphismus aus Theorem 15 bildet also das Volumeelement $\omega' = e_1 \cdots e_{n-1}$ aus Cl_{n-1} auf $\omega \in Cl_n^0$ ab. Es folgt, dass $\rho(\omega') = \text{Id}$ auf W^+ und $\rho(\omega') = -\text{Id}$ auf W^- . Dies demonstrieren wir anhand $v \in W^- \Rightarrow \exists \tilde{v} \in W : v = (1 - \rho(\omega))\tilde{v}$:

$$\begin{aligned} \rho(\omega)v &= \rho(\omega)(1 - \rho(\omega))\tilde{v} = (\rho(\omega) - \rho(\omega^2))\tilde{v} \\ &= (\rho(\omega) - 1)\tilde{v} = -v \\ \Rightarrow \rho(\omega') &\cong \rho(\omega) \cong -\text{Id} \text{ auf } W^- \end{aligned}$$

Mit Satz 20 erhalten wir, dass diese Darstellungen von Cl_{n-1} inäquivalent sind. □

Wir beschäftigen uns nun mit der Spingruppe

$$Spin_n \subset Cl_n^0 \subset Cl_n.$$

Definition 22 (Reale Spin-Darstellung).

Ein Homomorphismus

$$\Delta_n : Spin_n \rightarrow \text{GL}(W),$$

der die Einschränkung einer irreduziblen, realen Darstellung $Cl_n \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(W, W)$ ist, wird **reale Spindarstellung** genannt.

Dies führt uns zu

Satz 23. Bei $n \equiv 3 \pmod{4}$ ist die Definition von Δ_n unabhängig von der Wahl der irreduziblen Darstellung von Cl_n . Ist $n \not\equiv 0 \pmod{4}$, so ist die Darstellung Δ_n entweder irreduzibel oder eine direkte Summe von zwei irreduziblen Darstellungen (die zweite Möglichkeit tritt bei $n \equiv 1$ oder $2 \pmod{8}$ auf). Bei $n = 4m$ für $m \in \mathbb{N}$ existiert eine Zerlegung

$$\Delta_{4m} = \Delta_{4m}^+ \oplus \Delta_{4m}^-$$

mit Δ_{4m}^+ und Δ_{4m}^- als inäquivalenten, irreduziblen Darstellungen von $Spin_{4m}$.

Beweis: Mit Satz 13 erhält man für $n \equiv 3 \pmod{4}$ die Zerlegung von Cl_n . Der Automorphismus $\alpha : Cl_n \rightarrow Cl_n$ bildet Cl_n^+ auf Cl_n^- ab und umgekehrt (da $\alpha(\omega) = -\omega$). Cl_n^0 liegt diagonal in der Zerlegung $Cl_n = Cl_n^+ \oplus Cl_n^-$, d.h.

$$Cl_n^0 = \{(\varphi, \alpha(\varphi)) \in Cl_n^+ \oplus Cl_n^- : \varphi \in Cl_n^+\}.$$

Die zwei irreduziblen Darstellungen von Cl_n unterscheiden sich nur durch den Automorphismus α , und sind deshalb äquivalent bei Einschränkung auf Cl_n^0 . Man sieht anhand Tabelle 1, dass jede Einschränkung einer irreduziblen, realen

Darstellung von Cl_n auf $Cl_n^0 \cong Cl_{n-1}$ im Falle $n \equiv 3, 5, 6$, oder $7 \pmod{8}$ irreduzibel bleibt, bei $n \equiv 1$ oder $2 \pmod{8}$ jedoch aus zwei Kopien einer irreduziblen Darstellung bestehen muss.

Ist nun $n \equiv 4 \pmod{4}$, so wissen wir aus Theorem 21, dass sich die Einschränkung auf Cl_n^0 in zwei inäquivalente, irreduzible Darstellungen zerlegt. Da $Spin_n$ eine additive Basis von Cl_n^0 enthält, lässt sich jede irreduzible Darstellung von Cl_n^0 zu einer irreduziblen Darstellung von $Spin_n$ einschränken.

□

Literatur

- [Bae02] John C. Baez, *The octonions*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **39** (2002), no. 2, 145-205 (electronic). MR [MR1886087 \(2003f:17003\)](#)
- [LM89] Herbert B. Lawson und Marie-L. Michelsohn, *Spin Geometry*, Princeton Mathematical Series **38** (1989)