Die Theorie der Spingruppen

1 Clifford-Algebren

Definition 1 (Clifford-Algebra).
Sei V ein Vektorraum über k und sei q eine quadratische Form auf V. Eine ***Tensoralgebra*** *wird durch*

$$\boldsymbol{\mathscr{T}(V)} = \sum_{r=0}^{\infty} \bigotimes^r V$$

bestimmt. Sei $\boldsymbol{\mathscr{I}_q(V)}$ *das Ideal in* $\mathscr{T}(V)$*, welches von allen Elementen der Form* $v \otimes v + q(v)1$ *für* $v \in V$ *erzeugt wird.*
Die ***Cliffordalgebra*** $\boldsymbol{Cl(V,q)}$ *zu* V *und* q *ist eine assoziative Algebra mit Einheit, die durch*

$$Cl(V,q) \equiv \mathscr{T}(V)/\mathscr{I}_q(V)$$

definiert ist.

Lemma 2. *Es existiert eine natürliche Inklusion*

$$V \hookrightarrow Cl(V,q),$$

welche das Bild der kanonischen Projektion

$$\pi_q : \mathscr{T}(V) \to Cl(V,q)$$

ist.

Die Algebra $Cl(V,q)$ wird durch den Vektorraum $V \subset Cl(V,q)$ und die Einheit 1 erzeugt. Es gilt die Relation

$$v \cdot v = -q(v)1 \tag{1.1}$$

für $v \in V$. Ist die Charakteristik von k ungleich zwei, so gilt für alle $v, w \in V$

$$v \cdot w + w \cdot v = -2q(v,w) \tag{1.2}$$

mit $2q(v,w) \equiv q(v+w) - q(v) - q(w)$ als **Polarisation** von q.

Die Gleichung (1.1) können wir dazu nutzen, die folgende universelle Eigenschaft der Algebra zu geben:

Lemma 3. *Sei $f : V \to \mathscr{A}$ eine lineare Abbildung in eine assoziative Algebra mit Einheit, so dass*

$$f(v) \cdot f(v) = -q(v)1 \tag{1.3}$$

für alle $v \in V$ gilt. Dann lässt sich f eindeutig zu einem k-Algebra-Homomorphismus $\tilde{f} : Cl(V,q) \to \mathscr{A}$ erweitern. Zudem ist $Cl(V,q)$ die einzige assoziative Algebra mit dieser Eigenschaft.

Beweis: Wir zeigen an dieser Stelle nur die Existenz von $\tilde{f}$. Jede lineare Abbildung $f : V \to \mathscr{A}$ lässt sich eindeutig zu einem Algebra-Homomorphismus $\bar{f} : \mathscr{T}(V) \to \mathscr{A}$ erweitern. Eigenschaft (1.3) bedeutet, dass $\bar{f} = 0$ auf $\mathscr{I}_q(V)$ ist und sich somit auf $Cl(v,q)$ einschränken lässt.

Im Folgenden sei $\boldsymbol{Cl_n}$ die Cliffordalgebra über $\mathbb{R}^n$ und $q(x) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$.

Lemma 4. *Sei $e_1, \ldots, e_n$ eine q-orthonormale Basis von $\mathbb{R}^n \subset Cl_n$. Dann wird Cl_n (als Algebra) durch die Elemente $e_1, \ldots, e_n$ mittels der Relation*

$$e_i e_j + e_j e_i = -2\delta_{ij}$$

erzeugt.

Beispiel 5. *Um den abstrakten Begriff der Cliffordalgebra verständlicher zu machen, wird an dieser Stelle die Berechnung von Cl_1 angeführt:*

$$\begin{aligned} \mathscr{T}(\mathbb{R}) &= (\mathbb{R})^{\otimes 0} \oplus (\mathbb{R})^{\otimes 1} \oplus (\mathbb{R})^{\otimes 2} \oplus \ldots \\ &= \mathbb{R} \cdot 1_{\mathscr{T}(\mathbb{R})} \oplus \mathbb{R} \cdot 1_{\mathbb{R}} \oplus \mathbb{R} \cdot (1_{\mathbb{R}} \otimes 1_{\mathbb{R}}) \oplus \ldots \end{aligned} \tag{1.4}$$

Da in Cl_1 die Relation (1.1) gilt, folgt:

$$\begin{aligned} & 1_{\mathbb{R}} \otimes 1_{\mathbb{R}} = -q(1_{\mathbb{R}}) \cdot 1_{Cl_1} \\ & \qquad\qquad\quad = -1_{\mathbb{R}} \cdot 1_{Cl_1} \\ \Rightarrow \quad & 1_{\mathbb{R}} \otimes 1_{\mathbb{R}} = -1_{Cl_1} \end{aligned}$$

Benutzen wir dies zusammen mit (1.4), *so erhalten wir:*

$$\begin{aligned} Cl_1 &= \mathbb{R} \cdot 1_{Cl_1} + \mathbb{R} \cdot 1_{\mathbb{R}} + \mathbb{R} \cdot 1_{Cl_1} + \dots \\ &= \mathbb{R} \cdot 1_{Cl_1} + \mathbb{R} \cdot 1_{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

Die Cliffordalgebra ist isomorph zu $\mathbb{C}$. *Ein Isomorphismus ist dadurch gegeben, dass* $1 \in \mathbb{C}$ *auf* $1_{Cl_1} \in Cl_1$ *(Isomorphismuseigenschaft) und* $i \in \mathbb{C}$ *auf* $1_{\mathbb{R}} \in Cl_1$ *abgebildet wird. Die Homomorphie gilt, da* $i^2 = -1$ *in* $\mathbb{C}$ *und* $1_{\mathbb{R}} \otimes 1_{\mathbb{R}} = -1_{Cl_1}$ *in* Cl_1.

An dieser Stelle wird eine Tabelle der Cliffordalgebren über $\mathbb{R}$ gegeben:

n	Cl_n
1	$\mathbb{C}$
2	$\mathbb{H}$
3	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$
4	$\mathbb{H}(2)$
5	$\mathbb{C}(4)$
6	$\mathbb{R}(8)$
7	$\mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8)$
8	$\mathbb{R}(16)$

Tabelle 1: Cliffordalgebren über $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{K}(m)$ ist der Raum der $m \times m$-Matrizen über $\mathbb{K}$. Bei Cliffordalgebren gilt die Bott-Perioditát, d.h. $Cl_{n+8} \cong Cl_n \otimes \mathbb{R}(16)$. Eine etwas ausführlichere Berechnung wird in dem dritten und vierten Abschnitt des ersten Kapitels im Buch 'Spin geometry' gegeben [LM89].

Die Gruppe O(n) lässt sich mit Lemma 3 kanonisch zu einer Gruppe von Automorphismen von Cl_n erweitern. Die Einbettung

$$\mathrm{O}(n) \subset \mathrm{Aut}(Cl_n)$$

liegt in der Untergruppe der inneren Automorphismen. Ein Element aus dieser Gruppe, welches im weiteren Verlauf von grösserer Bedeutung ist, stellt der Automorphismus

$$\boldsymbol{\alpha} : Cl_n \to Cl_n,$$

der die Abbildung $\alpha(v) = -v$ für $v \in V$ erweitert, dar. Da $\alpha^2 = Id$, existiert eine Zerlegung

$$Cl_n = Cl_n^0 \oplus Cl_n^1 \tag{1.5}$$

mit $\boldsymbol{Cl_n^0} = \{\varphi \in Cl_n : \alpha(\varphi) = \varphi\}$ als den **geraden Teil** von Cl_n und $\boldsymbol{Cl_n^1} = \{\varphi \in Cl_n : \alpha(\varphi) = -\varphi\}$ als den **ungeraden Teil**.

2 Die Gruppen Pin und Spin

Definition 6 (P_n, getwistete, adjungierte Darstellung,)**.**
Die Untergruppe von $Cl_n^\times = \{\varphi \in Cl_n : \exists \varphi^{-1}$ *mit* $\varphi\varphi^{-1} = \varphi^{-1}\varphi = 1\}$, *die durch die Elemente* $v \in \mathbb{R}^n$ *mit* $v \neq 0$ *erzeugt wird, ist* $\mathbf{P_n}$.
Die ***getwistete, adjungierte Darstellung***

$$\widetilde{\mathbf{Ad}} : Cl_n^\times \to \mathrm{GL}(Cl_n)$$

ist durch

$$\widetilde{\mathrm{Ad}}_\varphi(y) = \alpha(\varphi) y \varphi^{-1}$$

bestimmt.

Satz 7. *Sei* $v \in \mathbb{R}^n \subset Cl_n$ *ein Element mit* $q(v) \neq 0$. *Dann gilt* $\widetilde{\mathrm{Ad}}_v(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$. *Es gilt zudem für alle* $w \in \mathbb{R}^n$ *die folgende Gleichung:*

$$\widetilde{\mathrm{Ad}}_v(w) = w - 2\frac{q(v,w)}{q(v)} v \tag{2.1}$$

Beweis: Da $v^{-1} = -v/q(v)$ erhalten wir mit (1.2), dass

$$\begin{aligned} q(v)\widetilde{\mathrm{Ad}}_v(w) &= q(v)\alpha(v) w v^{-1} = v w v = -v^2 w - 2q(v,w)v \\ &= q(v)w - 2q(v,w)v \end{aligned}$$

□

Die rechte Seite der Gleichung (2.1) ist die Abbildung $\rho_v : V \to V$, welche die Spiegelung an der Hyperebene $v^\perp = \{w \in V : q(v,w) = 0\}$ darstellt. Das heisst, dass ρ_v trivial auf der Hyperebene operiert und v auf $-v$ abbildet.

Die Gruppe P_n hat verschiedene, wichtige Untergruppen:

Definition 8 (Pin- und Spingruppe)**.**
Die Untergruppe $\boldsymbol{Pin_n}$ *von* P_n, *die durch Elemente* $v \in V$ *mit der Eigenschaft* $q(v) = \pm 1$ *erzeugt wird, heisst* ***Pingruppe***. *Die dazu assoziierte* ***Spingruppe***

von $\mathbb{R}^n$ ist durch

$$\boldsymbol{Spin_n} = Pin_n \cap Cl_n^0$$

definiert.

Im Folgenden fassen wir Elemente in P_n als endliches Produkt von Elementen $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ mit $v_i \neq 0$ auf. Da $\widetilde{\mathrm{Ad}}(\varphi_1\varphi_2) = \widetilde{\mathrm{Ad}}(\varphi_1)\widetilde{\mathrm{Ad}}(\varphi_2)$ für alle $\varphi_1, \varphi_2 \in Cl_n$ gilt, können wir die getwistete, adjungierte Darstellung als Abbildung von P_n auf eine endliche Hintereinanderausführung von Spiegelungen ρ_v an Hyperebenen $v^\perp$ mit $v \in V$ interpretieren. Im Zusammenhang mit der Darstellung von P_n können wir zu den bisher genannten äquivalente Definitionen von Pin_n und $Spin_n$ finden:

$$\begin{aligned} Pin_n =& \{v_1 \cdots v_r \in \mathrm{P}_n : q(v_i) = \pm 1 \text{ für alle } i\} \\ Spin_n =& \{v_1 \cdots v_r \in Pin_n : r \text{ ist gerade}\} \end{aligned}$$

Durch die bisherigen Erkenntnisse gepaart mit elementaren Berechnungen erhalten wir:

Theorem 9.
Es existieren die kurzen, exakten Sequenzen:

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \to Spin_n \xrightarrow{\widetilde{\mathrm{Ad}}} \mathrm{SO}(n) \to 1$$
$$0 \to \mathbb{Z}_2 \to Pin_n \xrightarrow{\widetilde{\mathrm{Ad}}} \mathrm{O}(n) \to 1$$

Für die weiteren Betrachtungen benötigen wir die

Definition 10 (Volumeelement)**.**
Sei auf $\mathbb{R}^n$ eine Orientierung gewählt und sei $e_1, \ldots, e_n$ eine positiv orientierte, q-orthonormale Basis. Das dazu assozierte, ***(orientierte) Volumeelement*** *ist*

$$\omega = e_1 \cdots e_n.$$

Diese Definition ist (bis auf Orientierung) basisunabhängig.

Lemma 11. *Für ω aus Definition 10 gilt:*

$$\omega^2 = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \tag{2.2}$$
$$v\omega = (-1)^{n-1}\omega v \qquad \text{\textit{für alle} } v \in \mathbb{R}^n \tag{2.3}$$

Ist also n ungerade, so ist ω zentral in Cl_n. Gilt dies nicht, so ist

$$\varphi\omega = \omega\alpha(\varphi)$$

für alle $\varphi \in Cl_n$.

Beweis: Da die Beweisführung bei allen Gleichungen analog verläuft, wird an dieser Stelle nur die erste Gleichung gezeigt: Sei $e_1, \ldots, e_n$ wie in Definition 10, dann gilt

$$\omega^2 = e_1 \cdots e_n \cdot e_1 \cdots e_n.$$

Benutzen wir nun Lemma 4, so erhalten wir :

$$\begin{aligned} e_1 \cdots e_n \cdot e_1 \cdots e_n =& - e_1 \cdots e_{n-1} \cdot e_1 \cdot e_n \cdot e_2 \cdots e_n \\ &\vdots \\ =&(-1)^{n-1} e_1^2 \cdot e_2 \cdots e_n \cdot e_2 \cdots e_n \\ =&(-1)^n e_2 \cdots e_n \cdot e_2 \cdots e_n \end{aligned}$$

Führen wir diese Rechnung weiter in diesem Stile fort, so verifizieren wir den ersten Teil von (2.2).

□

Lemma 12. *Sei $n \equiv 3$ oder $4(\mathrm{mod}4)$ und*

$$\boldsymbol{\pi}^+ = \frac{1}{2}(1+\omega) \text{ und } \boldsymbol{\pi}^- = \frac{1}{2}(1-\omega).$$

Dann erfüllen π^+ und π^- folgende Relationen:

$$\pi^+ + \pi^- = 1 \tag{2.4}$$

$$(\pi^+)^2 = \pi^+ \text{ und } (\pi^-)^2 = \pi^- \tag{2.5}$$

$$\pi^+\pi^- = \pi^-\pi^+ = 0. \tag{2.6}$$

Dies führt zu den wichtigen Erkenntnissen:

Satz 13. *Sei ω das Volumeelement und $n \equiv 3(\mathrm{mod}4)$. Dann können wir Cl_n in eine direkte Summe von isomorphen Unteralgebren zerlegen:*

$$Cl_n = Cl_n^+ \oplus Cl_n^- \tag{2.7}$$

mit $Cl_n^{\pm} = \pi^{\pm} \cdot Cl_n = Cl_n \cdot \pi^{\pm}$ *und* $\alpha(Cl_n^{\pm}) = Cl_n^{\mp}$.

Beweis: Wegen (2.3) wissen wir, dass ω zentral ist. Somit sind auch π^+ und π^- zentral und es folgt aus (2.4), (2.5) und (2.6), dass (2.7) eine Zerlegung in Ideale ist. Da $\omega \in Cl_n^1$ aus (1.5), folgt $\alpha(\pi^{\pm}) = \pi^{\mp}$ und somit $\alpha(Cl_n^{\pm}) = Cl_n^{\mp}$. Beide Ideale sind isomorph (α ist ein Automorphismus auf Cl_n).

□

Satz 14. *Sei* $n \equiv 4(\mathrm{mod}4)$ *und* W *ein* Cl_n*-Modul (d.h.* V *ist ein reeler Vektorraum mit einem Algebrahomomorphismus* $\rho : Cl_n \to \mathrm{Hom}(W, W)$*). Dann existiert eine Zerlegung*

$$W = W^+ \oplus W^- \tag{2.8}$$

in $+1$ *und* -1*-Eigenräume der Anwendung von* ω *auf* W *(da* $\omega^2 = 1$*). Es sind*

$$W^+ = \rho(\pi^+) \cdot W \qquad \textit{und} \qquad W^- = \rho(\pi^-) \cdot W,$$

und wir erhalten durch die Anwendung von jedem $e \in \mathbb{R}^n$ *mit* $q(e) \neq 0$ *einen Isomorphismus*

$$e : W^+ \to W^- \qquad \textit{und} \qquad e : W^- \to W^+ \tag{2.9}$$

Beweis: In diesem Satz interpretieren wir für jedes Paar $a \in Cl_n$ und $w \in W$ die Multiplikation $a \cdot w$ als die Anwendung von a auf w mittels des vorgegebenen Algebrahomomorphismus $Cl_n \to \mathrm{Hom}(W, W)$.
Die Zerlegung (2.8) ist eine Folgerung aus

$$\omega \cdot \pi^{\pm} = \pm \pi^{\pm}$$

zusammen mit den Gleichungen (2.4), (2.5) und (2.6). (2.9) erhalten wir durch (2.3)

$$\begin{cases} e\pi^+ = \frac{1}{2}e(1+\omega) = \frac{1}{2}(1-\omega)e = \pi^- e \\ e\pi^- = \frac{1}{2}e(1-\omega) = \frac{1}{2}(1+\omega)e = \pi^+ e \end{cases}$$

und $e \cdot e = -q(e) \cdot 1$ (da $e \in \mathbb{R}^n$).

□

Nun behandeln wir die Zusammenhänge zwischen Cl_n und Cl_{n+1}^0 aus (1.5):

Theorem 15.
Es existiert ein Algebraisomorphismus

$$Cl_n \cong Cl_{n+1}^0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: Wir wählen eine q-orthonormale Basis $e_1, \ldots, e_{n+1}$ von $\mathbb{R}^{n+1}$. Sei $\mathbb{R}^n = \operatorname{span}\{e_i | i \neq n+1\}$ und $f : \mathbb{R}^n \to Cl^0_{n+1}$ die lineare Fortsetzung von

$$f(e_i) = e_{n+1}e_i$$

für $i \neq n+1$. Für $a = \sum_{i \neq n+1} a_i e_i$ gilt:

$$\begin{aligned} f(a)^2 &= \sum_{i,j} a_i a_j e_{n+1} e_i e_{n+1} e_j \\ &= \sum_{i,j} a_i a_j e_i e_j \\ &= a \cdot a = -q(a) \cdot 1, \end{aligned}$$

da $e_{n+1}^2 = -1$ und $e_{n+1}e_i = -e_i e_{n+1}$ für $i \neq n+1$ ist. Mit Lemma 3 lässt sich f zu einem Algebrahomomorphismus

$$\tilde{f} : Cl_n \to Cl^0_{n+1}$$

fortsetzen. Wir erhalten die Isomorphismuseigenschaft von $\tilde{f}$ durch Überprüfung an einer linearen Basis.

□

3 Darstellungen

Sei im Folgenden V ein Vektorraum über dem Feld k und q die quadratische Form auf V.

Definition 16 (K-Darstellung, $Cl(V,q)$-Modul, Cliffordmultiplikation)**.**
*Sei $K \supseteq k$ ein Feld. Eine **K-Darstellung** der Cliffordalgebra $Cl(V,q)$ ist eine k-lineare Abbildung*

$$\boldsymbol{\rho} : Cl(V,q) \to \operatorname{Hom}_K(W,W)$$

*in die Algebra der linearen Transformationen eines endlich dimensionalen Vektorraums W über K, die $\rho(\varphi\psi) = \rho(\varphi) \circ \rho(\psi)$ für alle $\varphi, \psi \in Cl(V,q)$ erfüllt. Der Raum W wird **$Cl(V,q)$-Modul über K** genannt. Wir schreiben desweiteren*

$$\rho(\varphi)(w) \equiv \varphi \cdot w \tag{3.1}$$

*für alle $\varphi \in Cl(V,q)$ und $w \in W$. Das Produkt aus (3.1) heisst **Cliffordmultiplikation**.*

Definition 17 (reduzibel, irreduzibel).
Seien $V, q, k \subseteq K$ wie in Definition 16. Wir nennen eine K-Darstellung ***reduzibel****, wenn wir den Vektorraum W als nicht triviale, direkte Summe*

$$W = W_1 \oplus W_2$$

über K mit $\rho(\varphi)(W_j) \subseteq W_j$ für $j = 1,2$ und für alle $\varphi \in Cl(V,q)$ schreiben können. In diesem Fall ist

$$\rho = \rho_1 \oplus \rho_2$$

mit $\rho_j(\varphi) \equiv \rho(\varphi)|_{W_j}$ für $j = 1,2$. Eine Darstellung heisst ***irreduzibel****, wenn sie nicht reduzibel ist.*

Lemma 18. *Jede K-Darstellung ρ einer Cliffordalgebra $Cl(V,q)$ lässt sich in eine direkte Summe $\rho = \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_m$ von irreduziblen Darstellungen zerlegen.*

Beweis: Ist ρ reduzibel, so können wir sie in eine Summe $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2$ zerlegen. Diese Vorgehensweise lässt sich für ρ_1, ρ_2 sukzessiv fortsetzen und bricht aufgrund der endlichen Dimension von W ab.

$\square$

Definition 19 (Äquivalenz von Darstellungen).
Zwei Darstellungen $\rho_j : Cl(V,q) \to \mathrm{Hom}_K(W_j, W_j)$ für $j = 1,2$ sind ***äquivalent****, wenn ein K-linearer Isomorphismus $F : W_1 \to W_2$ mit $F \circ \rho_1(\varphi) \circ F^{-1} = \rho_2(\varphi)$ für alle $\varphi \in Cl(V,q)$ existiert.*

Satz 20. *Sei $\rho : Cl_n \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W,W)$ eine irreduzible, reale Darstellung mit $n \equiv 3(\mathrm{mod} 4)$. Dann gilt eine der beiden Gleichungen*

$$\rho(\omega) = \mathrm{Id} \qquad\qquad \rho(\omega) = -\mathrm{Id}.$$

Beide Möglichkeiten können aufteten und die korrespondierenden Darstellungen sind nicht äquivalent.

Beweis: Da durch (2.2) $\rho(\omega)^2 = \rho(\omega^2) = \mathrm{Id}$ gilt, können wir W in die $+1$ und -1 Eigenräume von $\rho(\omega)$ zerlegen, also $W = W^+ \oplus W^-$. Da ω zentral ist (siehe (2.3)), gilt für alle $\varphi \in Cl_n$ und $w \in W^+$:

$$\begin{aligned} \rho(\varphi)(w) = \rho(\varphi)(\rho(\omega)(w)) \quad &= \rho(\varphi) \circ \rho(\omega)(w) \quad &&= \rho(\varphi \cdot \omega)(w) \\ = \rho(\omega \cdot \varphi)(w) \quad &= \rho(\omega) \circ \rho(\varphi)(w) \quad &&= \rho(\omega)(\rho(\varphi)(w)) \\ \Rightarrow \rho(\varphi)(w) \in W^+ & && \end{aligned}$$

d.h., dass der Raum W^+ $\mathbf{Cl_n}$-invariant ist. Eine analoge Berechnung kann man für W^- machen. Da W irreduzibel ist, gilt entweder $W = W^+$ oder $W = W^-$ (siehe Definition 17).
Sei nun F ein Isomorphismus $F : W \to W'$ und $\rho(\omega)$ ein skalares Vielfaches von Id. Dann ist $F \circ \rho(\omega) \circ F^{-1}$ dasgleiche skalare Vielfache von Id. Die Darstellungen ρ_+ und ρ_- mit $\rho_\pm(\omega) = \pm\mathrm{Id}$ können also nach Definition 19 nicht äquivalent sein.
Zu guter Letzt müssen wir noch zeigen, dass beide Darstellungen existieren. Dazu nehmen wir irreduzible Faktoren von Cl_n (siehe (2.7)), die auf Cl_n^+ und auf Cl_n^- durch linksseitige Multiplikation operieren.

□

Theorem 21.
Sei $\rho : Cl_n \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W, W)$ *eine irreduzible, reale Darstellung mit* $n \equiv 0 (\mathrm{mod} 4)$ *und es gelte die Zerlegung*

$$W = W^+ \oplus W^-$$

mit $W^\pm = (1 \pm \rho(\omega)) \cdot W$. *Dann ist jeder dieser Unterräume invariant unter* Cl_n^0. *Anhand des Isomorphismus* $Cl_n \cong Cl_{n+1}^0$ *korrespondieren diese Räume mit den zwei verschiedenen, irreduziblen Darstellungen von* Cl_{n-1}.

Beweis: Die Zerlegung existiert nach (2.8). Die Invarianz von W^+ und W^- unter Cl_n^0 zeigen wir anhand W^-:
Sei $\varphi \in Cl_n^0$ und $v \in W^- \Rightarrow \exists w \in W$ mit $v = \rho(\frac{1}{2}(1-\omega))w = \frac{1}{2}(1 - \rho(\omega))(w)$ (siehe Satz 14). Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\rho(\varphi)(v) \quad &= \rho(\varphi)(\frac{1}{2}(1-\rho(\omega)))(w) \\
&= \frac{1}{2}(\rho(\varphi) - \rho(\varphi\omega))(w) \\
&\overset{(11)}{=} \frac{1}{2}(\rho(\varphi) - \rho(\omega\varphi))(w) \\
&= \underbrace{\frac{1}{2}(1-\rho(\omega))\underbrace{\rho(\varphi)(w)}_{\in W}}_{\in W^-}.
\end{aligned}$$

Anhand Lemma 4 und $n \equiv 0(\mathrm{mod}4)$ gilt zudem

$$\begin{aligned}
(e_1 e_n) \cdots (e_{n-1} e_n) =& (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} e_1 \cdots e_{n-1} (e_n)^{n-1} \\
=& e_1 \cdots e_n
\end{aligned}$$

Der Isomorphismus aus Theorem 15 bildet also das Volumeelemnt $\omega' = e_1 \cdots e_{n-1}$ aus Cl_{n-1} auf $\omega \in Cl_n^0$ ab. Es folgt, dass $\rho(\omega') = \mathrm{Id}$ auf W^+ und $\rho(\omega') = -\mathrm{Id}$ auf W^-. Dies demonstrieren wir anhand $v \in W^- \Rightarrow \exists \tilde{v} \in W : v = (1-\rho(\omega))\tilde{v}$:

$$\begin{aligned} \rho(\omega)v =& \rho(\omega)(1-\rho(\omega))\tilde{v} = (\rho(\omega) - \rho(\omega^2))\tilde{v} \\ =& (\rho(\omega) - 1)\tilde{v} = -v \\ \Rightarrow \rho(\omega') \cong& \rho(\omega) \cong -\mathrm{Id} \text{ auf } W^- \end{aligned}$$

Mit Satz 20 erhalten wir, dass diese Darstellungen von Cl_{n-1} inäquivalent sind.

□

Wir beschäftigen uns nun mit der Spingruppe

$$Spin_n \subset Cl_n^0 \subset Cl_n.$$

Definition 22 (Reale Spin-Darstellung).
Ein Homomorphismus

$$\boldsymbol{\Delta_n} : Spin_n \to \mathrm{GL}(W),$$

der die Einschränkung einer irreduziblen, realen Darstellungen $Cl_n \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W,W)$ *ist, wird* ***reale Spindarstellung*** *genannt.*

Dies führt uns zu

Satz 23. *Bei* $n \equiv 3(\mathrm{mod}4)$ *ist die Definition von* Δ_n *unabhängig von der Wahl der irreduziblen Darstellung von* Cl_n*. Ist* $n \neq 0(\mathrm{mod}4)$*, so ist die Darstellung* Δ_n *entweder irreduzibel oder eine direkte Summe von zwei irreduziblen Darstellungen (die zweite Möglichkeit tritt bei* $n \equiv 1$ *oder* $2(\mathrm{mod}8)$ *auf). Bei* $n = 4m$ *für* $m \in \mathbb{N}$ *existiert eine Zerlegung*

$$\Delta_{4m} = \Delta_{4m}^+ \oplus \Delta_{4m}^-$$

mit Δ_{4m}^+ *und* Δ_{4m}^- *als inäquivalenten, irreduziblen Darstellungen von* $Spin_{4m}$*.*

Beweis: Mit Satz 13 erhält man für $n \equiv 3(\mathrm{mod}4)$ die Zerlegung von Cl_n. Der Automorphismus $\alpha : Cl_n \to Cl_n$ bildet Cl_n^+ auf Cl_n^- ab und umgekehrt (da $\alpha(\omega) = -\omega$). Cl_n^0 liegt diagonal in der Zerlegung $Cl_n = Cl_n^+ \oplus Cl_n^-$, d.h.

$$Cl_n^0 = \{(\varphi, \alpha(\varphi)) \in Cl_n^+ \oplus Cl_n^- : \varphi \in Cl_n^+\}.$$

Die zwei irreduziblen Darstellungen von Cl_n unterscheiden sich nur durch den Automorphismus α, und sind deshalb äquivalent bei Einschränkung auf Cl_n^0. Man sieht anhand Tabelle 1, dass jede Einschränkung einer irreduziblen, realen

Darstellung von Cl_n auf $Cl_n^0 \cong Cl_{n-1}$ im Falle $n \equiv 3, 5, 6,$ oder 7(mod8) irreduzibel bleibt, bei $n \equiv 1$ oder 2(mod8) jedoch aus zwei Kopien einer irreduziblen Darstellung bestehen muss.
Ist nun $n \equiv 4$(mod4), so wissen wir aus Theorem 21, dass sich die Einschränkung auf Cl_n^0 in zwei inäquivalente, irreduzible Darstellungen zerlegt. Da $Spin_n$ eine additive Basis von Cl_n^0 enthält, lässt sich jede irreduzible Darstellung von Cl_n^0 zu einer irreduziblen Darstellung von $Spin_n$ einschränken.

□

Literatur

[Bae02] John C. Baez, *The octonions*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **39** (2002), no. 2, 145-205 (eletronic). MR **MR1886087 (2003f:**17003)

[LM89] Herbert B. Lawson und Marie-L. Michelsohn, *Spin Geometry*, Princeton Mathematical Series **38** (1989)