Erste Hilfe bei Spektralsequenzen

PD Dr. M. Joachim/C. Löh Seminar Topologie, 7. November 2007

Beipackzettel. Spektralsequenzen sind wie Klaviere – man kann beliebig viele Bücher darüber lesen, aber Beherrschung, Wertschätzung, und schließlich Virtuosität kann nur dadurch erlangt werden, daß man sich eigenhändig mit dem Instrument vertraut macht und hinreichend viel darauf übt.

Die folgenden Zeilen können und sollen nicht mehr als eine rudimentäre Einführung sein. Sie zeigen aber, daß man nicht alle Details über die Konstruktion der Spektralsequenzen wissen muß um sie erfolgreich anwenden zu können. Wer jedoch auch mit den Konstruktionen vertraut ist, wird den Spektralsequenzen noch mehr Information entlocken können.

Das Prinzip von Spektralsequenzen. Eine *(bigraduierte, homologische) Spektralsequenz* über einem Ring R ist eine Folge $(E^r, d^r)_{r\in\mathbf{N}_{\geq 1}}$ von bigraduierten R-Moduln (d.h. jedes E^r ist ein Familie $(E^r_{pq})_{p,q\in\mathbf{N}}$ von R-Moduln) und R-Homomorphismen $d^r\colon E^r \longrightarrow E^r$ mit folgenden Eigenschaften:

– Für $r \in \mathbf{N}_{\geq 1}$ ist d^r eine Abbildung vom Grad $(-r, r-1)$ und $d^r \circ d^r = 0$.

– Für jedes $r \in \mathbf{N}_{\geq 1}$ gibt es einen Isomorphismus

$$E^{r+1} \cong H_*(E^r, d^r) = \frac{\ker d^r}{\operatorname{im} d^r};$$

dieser Isomorphismus ist auch Teil der Struktur.

Der Term E^r heißt auch *r-te Seite von* $(E^r, d^r)_{r\in\mathbf{N}_{\geq 1}}$.

Die Spektralsequenz $(E^r, d^r)_{r\in\mathbf{N}_{\geq 1}}$ *kollabiert,* falls es ein $s \in \mathbf{N}_{\geq 1}$ gibt mit

$$E^s = E^{s+1} = E^{s+2} = \cdots .$$

In diesem Fall schreibt man auch $E^\infty := E^s$.

Sei A ein $\mathbf{N}$-graduierter R-Modul und $(F_n A)_{n\in\mathbf{N}}$ sei eine (aufsteigende) Filtrierung von A, die mit der Graduierung von A verträglich ist. Dann *konvergiert* die Spektralsequenz $(E^r, d^r)_{r\in\mathbf{N}_{\geq 1}}$ *gegen* A, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

– Die Spektralsequenz kollabiert.

– Für alle p, $q \in \mathbf{N}$ gilt

$$E^\infty_{pq} \cong \frac{F_p A_{p+q}}{F_{p-1} A_{p+q}}.$$

– Die Filtrierung $F_* A$ ist *erschöpfend,* d.h. $A = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} F_n A$.

Es konvergiere nun $(E^r, d^r)_{r\in\mathbf{N}_{\geq 1}}$ gegen A. Dann schreibt man

$$E^2_{pq} \Longrightarrow A_{p+q}.$$

Dies bedeutet jedoch keinesweges, daß wir A wirklich aus der Spektralsequenz berechnen können – wir erhalten lediglich die Quotienten $F_*A/F_{*-1}A$ der zugehörigen Filtrierung! In vielen Fällen genügt diese Information aber.

Der hier dargestellte Konvergenzbegriff ist nicht die allgemeinste Form der Konvergenz von Spektralsequenzen; außerdem haben wir uns bisher nur auf Spektralsequenzen konzentriert, die im ersten Quadranten leben. Verallgemeinerungen dieser Konzepte sind in der angegebenen Literatur enthalten.

Quellen von Spektralsequenzen. Es gibt zwei klassische Konstruktionen, die Spektralsequenzen liefern; diese basieren auf Doppelkomplexen bzw. exakten Dreiecken.

Prominente Spektralsequenzen.

- Leray-Serre-Atiyah-Hirzebruch-Spektralsequenz (berechnet die Homologie des Totalraums einer Faserung aus der Homologie des Basisraums und der Faser).
- Hochschild-Serre-Spektralsequenz (berechnet die Gruppenhomologie einer Erweiterungsgruppe aus der Gruppenhomologie des entsprechenden Normalteilers und des Quotienten).
- Grothendieck-Spektralsequenz (berechnet abgeleitete Funktoren von Kompositionen von Funktoren aus den abgeleiteten Funktoren der beiden Faktoren).

Typische Anwendungen von Spektralsequenzen. Im allgemeinen ist es nicht leicht, eine Spektralsequenz vollständig zu berechnen oder aus dem graduierten Objekt gegen das sie konvergiert, das eigentlich gesuchte Objekt zu rekonstruieren. Es gibt aber eine Klasse von Konzepten, die gut mit Spektralsequenzen verträglich sind – d.h., diese Eigenschaften lassen sich gut von einer Seite der Spektralsequenz zur nächsten übertragen:

- Verschwindungseigenschaften.
- Die Eigenschaft, endlich erzeugt zu sein.
- Eulercharakteristiken.

Literatur.

- T. Bauer. *Homologische Algebra und Gruppenkohomologie.* Skript zur Vorlesung, 2005. Online verfügbar unter http://wwwmath.uni-muenster.de/u/tbauer/Homologische-Algebra/homalg.pdf
- K. Brown. *Cohomology of Groups.* Band 87 von *Graduate Texts in Mathematics*, Springer, 1982.
- J.F. Davis, P. Kirk. *Lecture Notes in Algebraic Topology.* Band 35 von *Graduate Studies in Mathematics*, AMS, 2001.
- A. Hatcher. *Spectral Sequences in Algebraic Topology.* Buchprojekt. Online verfügbar via http://www.math.cornell.edu/ hatcher/SSAT/SSATpage.html
- J. McCleary. *A user's guide to spectral sequences.* Band 58 von *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, zweite Auflage, 2001.
- C.A. Weibel. *An Introduction to Homological Algebra.* Band 38 von *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

Übungsaufgaben. Die folgenden Aufgaben geben die Möglichkeit, Spektralsequenzen besser kennenzulernen. Aufgaben 3 bis 5 sind Anwendungen der Leray-Serre-Atiyah-Hirzebruch-Spektralsequenz. Am einfachsten arbeitet es sich mit Spektralsequenzen, wenn man ihre Seiten als quadratische Gitter (wie auf der folgenden Seite) darstellt und sich überlegt, welche Differentiale dann überhaupt existieren können bzw. wie die Differentiale überhaupt aussehen können.

Aufgabe 1. Sei $(E^r, d^r)_{r \in \mathbf{N}_{\geq 2}}$ eine Spektralsequenz mit $E^2_{pq} = 0$ für fast alle p, $q \in \mathbf{N}$. Man überlege sich, warum $(E^r, d^r)_{r \in \mathbf{N}_{\geq 2}}$ kollabiert.

Aufgabe 2. Man leite mit Hilfe einer geeigneten Spektralsequenz die lange exakte Homologiesequenz zu einer kurzen exakten Sequenz von Kettenkomplexen her.

Aufgabe 3. Seien k, ℓ, $m \in \mathbf{N}$ und $S^k \longrightarrow S^\ell \longrightarrow S^m$ eine Faserung. Man zeige, daß dann bereits

$$\ell = 2 \cdot m - 1 \quad \text{und} \quad k = m - 1$$

gilt. [Nach einem Resultat von Adams ist sogar $m \in \{1, 2, 4, 8\}$.]

Aufgabe 4. Sei $F \longrightarrow E \longrightarrow B$ eine Faserung von orientierten, geschlossenen, zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten. Man zeige den folgenden Zusammenhang zwischen den Dimensionen:

$$\dim E = \dim B + \dim F.$$

Hinweis. Betrachten Sie zunächst den Fall, daß $\pi_1(B)$ trivial auf $H_*(F; \mathbf{Z})$ operiert. Alternativ können Sie auch Homologie mit $\mathbf{Z}/2$-Koeffizienten betrachten.

Aufgabe 5. Sei $F \longrightarrow E \longrightarrow B$ eine Faserung, wobei B einfach zusammenhängend sei [allgemeiner: die Fundamentalgruppe $\pi_1(B)$ operiere trivial auf $H_*(F; \mathbf{Q})$]. Außerdem seien $\bigoplus_{n \in \mathbf{N}} H_n(B; \mathbf{Q})$ und $\bigoplus_{n \in \mathbf{N}} H_n(F; \mathbf{Q})$ endlichdimensional. Man zeige:

1. Dann ist auch $\bigoplus_{n \in \mathbf{N}} H_n(E; \mathbf{Q})$ endlichdimensional.
2. Die Eulercharakteristik ist multiplikativ in dem Sinne, daß

$$\chi(E) = \chi(B) \cdot \chi(F).$$

Hinweis. Man beweise zunächst folgendes: Ist $(E^r)_{r \in \mathbf{N}}$ eine Spektralsequenz über $\mathbf{Q}$, so gilt für alle $r \in \mathbf{N}$ mit $\sum_{p,q \in \mathbf{N}} \dim_{\mathbf{Q}} E^r_{pq} < \infty$, daß

$$\chi(E^r) = \chi(E^{r+1});$$

hierbei ist die Eulercharakteristik eines endlichdimensionalen, bigraduierten $\mathbf{Q}$-Vektorraumes C definiert durch

$$\chi(C) := \sum_{p,q \in \mathbf{N}} (-1)^{p+q} \cdot \dim_{\mathbf{Q}} C_{pq}.$$

Papier, auf dem sich Spektralsequenzen wohlfühlen.