Gromovs Präkompaktheitssatz für Folgen kompakter metrischer Räume

Felix Springer

30. Januar 2008

1 Gromov-Hausdorff-Konvergenz

Definition 1 (Hausdorff-Abstand)
Sei X ein metrischer Raum, $V_\varepsilon(A)$ die ε-Umgebung einer Menge $A \subseteq X$. Der Hausdorff-Abstand zweier Mengen $A, B \subseteq X$ ist definiert durch:

$$d_H(A, B) = \inf \{\varepsilon \mid A \subseteq V_\varepsilon(B) \text{ und } B \subseteq V_\varepsilon(A)\}.$$

Bemerkung:

- d_H definiert eine Pseudometrik auf $\mathfrak{P}(X)$.
- d_H definiert eine Metrik auf CX (der Menge der nichtleeren kompakten Teilmengen von X).

Definition 2
Sei X ein metrischer Raum, $S \subseteq X$ heißt ε-dicht, wenn $x \in V_\varepsilon(S)$ für alle $x \in X$.
S heißt dann ein ε-Netz in X.
Eine ε-Relation zwischen zwei (pseudo-)metrischen Räumen X_1 und X_2 ist eine Menge $R \subseteq X_1 \times X_2$, die folgende Eigenschaften erfüllt:

(i) für $i = 1, 2$ ist die Projektion von R auf X_i ε-dicht und

(ii) für $(x_1, x_2), (x_1', x_2') \in R$ gilt $|d_{X_1}(x_1, x_1') - d_{X_2}(x_2, x_2')| < \varepsilon$.

Die Relation heißt surjektiv, wenn ihre Projektionen surjektiv sind.
Wenn es eine ε-Relation zu X_1 und X_2 gibt, schreiben wir $X_1 \sim_\varepsilon X_2$, gibt es eine surjektive ε-Relation, schreiben wir $X_1 \simeq_\varepsilon X_2$.
Wir definieren den Gromov-Hausdorff-Abstand von X_1 und X_2 durch

$$D_H(X_1, X_2) := \inf \{\varepsilon \mid X_1 \simeq_\varepsilon X_2\}$$

Wenn es kein solches ε gibt, setzen wir $D_H(X_1, X_2) = \infty$.

Definition 3

Wir sagen, dass eine Folge (pseudo-)metrischer Räume X_n bezüglich der Gromov-Hausdorff-Metrik (oder als Gromov-Hausdorff-Räume) gegen X konvergiert und schreiben $X_n \to X$, genau dann, wenn $D_H(X_n, X) \to 0$ für $n \to \infty$.

Bemerkung:

- Der Gromov-Hausdorff Abstand zwischen einem metrischen Raum und einer beliebigen Teilmenge, die in diesem Raum dicht liegt, ist 0. Grenzwerte sind daher im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt.

- $X_1 \sim_\varepsilon X_2 \Rightarrow X_1 \simeq_{3\varepsilon} X_2$.

  Sei R eine ε-Relation zwischen X_1 und X_2. Wir definieren die folgenden Mengen $A := \{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 \mid x_1 \in \pi_1(R),\ x_2$ so, dass $d_{X_2}(x_2, x_2') < \varepsilon$ für ein x_2' mit $(x_1, x_2') \in R\}$ und

  $B := \{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 \mid x_2 \in \pi_2(R),\ x_1$ so, dass $d_{X_1}(x_1, x_1') < \varepsilon$ für ein x_1' mit $(x_1', x_2) \in R\}$ und setzen $R' = A \cup B$. R' ist eine surjektive 3ε-Relation zwischen X_1 und X_2.

Proposition 4

Für kompakte metrische Räume A und B gilt:
A und B sind genau dann isometrisch, wenn $\mathrm{D}_H(A, B) = 0$ gilt.

Beweis :

„$\Rightarrow$" trivial. Sei $f:\ A \to B$ eine isometrische Abbildung, dann ist der Graph G_f eine surjektive 0-Relation.

„$\Leftarrow$" Sei $D_H(A, B) = 0$. Wir wählen eine abzählbare Teilmenge $\{a_n\}_n$, die dicht in A liegt und surjektive $1/m$-Relationen $\{R_m\}_m$ zwischen A und B. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ wählen wir ein $b_{m,n} \in B$ so, dass $(a_n, b_{m,n}) \in R_m$. Gegebenenfalls durch Übergang zu einer Teilfolge können wir annehmen, dass $b_{m,n}$ gegen ein $b_n \in B$ konvergiert für $m \to \infty$.

Nach Voraussetzung ist $|d_A(a_n, a_{n'}) - d_B(b_{m,n}, b_{m,n'})| < 1/m$. Mit der Dreiecksungleichung folgt $|d_A(a_n, a_{n'}) - d_B(b_n, b_{n'})| < |d_A(a_n, a_{n'}) - d_B(b_{m,n}, b_{m,n'})| + 2\varepsilon < 1/m + 2\varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$ und alle $m > m_0(\varepsilon)$. Also gilt $d_A(a_n, a_{n'}) = d_B(b_n, b_{n'})$.

Die Abbildung $a_n \mapsto b_n$ lässt sich eindeutig zu einer stetigen Abbildung $A \to B$ fortsetzen. Diese ist eine Isometrie.

$\square$

Definition 5

Eine Familie $(C_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ von kompakten metrischen Räumen heißt gleichmäßig kompakt, wenn es eine gemeinsame obere Grenze für die Durchmesser der Räume gibt und für jedes $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $N(\varepsilon)$ existiert, so dass jeder Raum C_λ von $N(\varepsilon)$ Bällen von Radius ε überdeckt werden kann.

Satz 6
Falls eine Folge kompakter metrischer Räume (X_n) bezüglich der Gromov-Hausdorff-Metrik konvergiert, so ist sie gleichmäßig kompakt und der Abschluss des Grenzwertes ist kompakt.

Beweis :
Jede endliche Teilfolge von (X_n) ist offensichtlich gleichmäßig kompakt. Da (X_n) konvergiert ist (X_n) eine Cauchy-Folge und für alle $\delta > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so dass $D_H(X_n, X_m) < \delta$ für alle $m, n \geq N$. Es folgt $X_n \simeq_\delta X_m$. Wir wählen eine passende Relation R.
Nun versuchen wir nun $||X_n| - |X_m||$ abzuschätzen. Dazu wählen wir $x_1, x_2 \in X_n$ mit $d_{X_n}(x_1, x_2) = |X_n|$ und $y_1, y_2 \in X_m$ mit $d_{X_m}(y_1, y_2) = |X_m|$.
Zu x_1, x_2 existieren $y_1', y_2' \in X_m$ mit $(x_1, y_1'), (x_2, y_2') \in R$. Es folgt $|d_{X_n}(x_1, x_2) - d_{X_m}(y_1', y_2')| < \delta$. Somit erhalten wir $|X_m| \geq |X_n| + \delta$.
Analog existieren zu y_1, y_2 Elemente $x_1', x_2' \in X_n$ mit $(x_1', y_1), (x_2', y_2) \in R$. Die gleiche Rechnung ergibt, dass $|X_n| \geq |X_m| + \delta$.
Insgesamt folgern wir, dass $|X_n| - \delta \leq |X_m| \leq |X_n| + \delta$ gilt. Die Durchmesser der (X_i) sind also beschränkt durch $\max\{|X_1|, \ldots, |X_{N-1}|, |X_N| + \delta\} < \infty$.

Als nächstes zeigen wir, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ auch eine obere Schranke für die benötigten ε-Bälle gibt um die Räume X_n zu überdecken.
Sei $X = \lim\limits_{n \to \infty} X_n,\ \varepsilon > \delta > 0$ beliebig. Wir wählen $K \in \mathbb{N}$ so, dass $D_H(X_n, X) < \delta/8$ für alle $n > K$. Sei $N_n(\varepsilon)$ die Anzahl der ε-Bälle, die man benötigt um X_n zu überdecken und R_n eine surjektive $\delta/8$-Relation zwischen X_n und X. ($N(\varepsilon)$ sei die Anzahl der ε-Bälle, die man benötigt um X zu überdecken.)

Behauptung Seien $x, x' \in X_n, y \in X$ und $(x, y), (x', y) \in R_n$ dann gilt $d_{X_n}(x, x') < \delta/8$.

Beweis :
$(x, y), (x', y) \in R \Rightarrow |d_{X_n}(x, x') - d_X(y, y)| < \delta/8$. Andererseits ist $d_X(y, y) = 0$.
Also $d_{X_n}(x, x') < \delta/8$. $\square$

Analoges gilt für $x \in X_n, y, y' \in X$.
Sei $\bigcup\limits_{i \in I} B_\varepsilon(x_i) = X_n$ mit $x_i \in X_n,\ |I| < \infty$. Für jedes dieser x_i wähle ein $y_i \in X$ mit $(x_i, y_i) \in R_n$.

Behauptung
$$\bigcup_{i \in I} B_{2\varepsilon}(y_i) = X.$$

Beweis :
Sei $y \in X$, dann existiert ein $x \in X_n$ mit $(x, y) \in R_n$. Außerdem existiert ein $x_i \in X_n$ $(i \in I)$ mit $d_{X_n}(x, x_i) < \varepsilon$. Wir untersuchen dazu $d_X(y, y_i)$.
Dann ist $|d_{X_n}(x, x_i) - d_X(y, y_i)| < \delta/8$

$$\Rightarrow \begin{array}{ll} 2\varepsilon > d_{X_n}(x,x_i) + \frac{\delta}{8} > d_X(y,y_i) & \text{falls } d_{X_n}(x,x_i) > d_X(y,y_i) \\ d_x(y,y_i) < \frac{\delta}{8} + d_{X_n}(x,x_i) < 2\varepsilon & \text{sonst.} \end{array}$$

□

$$\Rightarrow N_n(\varepsilon) \geq N(2\varepsilon) \text{ für alle } n \geq K$$

andererseits folgt auch

$$N\left(\varepsilon/2\right) \geq N_n(\varepsilon) \text{ für alle } n \geq K.$$

Es gilt also

$$N\left(\varepsilon/2\right) \geq N_n(\varepsilon) \geq N(2\varepsilon).$$

$N\left(\varepsilon/2\right)$ ist jedoch durch $N_K\left(\varepsilon/4\right)$ beschränkt.

Es folgt also insgesamt, dass die Folge (X_n) gleichmäßig kompakt ist. □

Wir wollen nun in gewisser Weise eine Umkehrung des vorigen Satzes beweisen.

Theorem 7

Ist eine Folge kompakter metrischer Räume C_i gleichmäßig kompakt, so besitzt sie eine Teilfolge, die bezüglich der Gromov-Hausdorff-Metrik konvergiert.

Beweis :
Da die C_i gleichmäßig kompakt sind existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $M\left(1/n\right) \in \mathbb{N}$ so, dass jedes C_i von $M\left(1/n\right)$ Bällen vom Radius $1/n$ überdeckt werden kann. Wir definieren $N\left(1/n\right) := \sum\limits_{k \leq n} M\left(1/k\right)$. Für jedes C_i definieren wir eine Folge $x(i,j) \in C_i$ so, dass die $1/n$-Bälle um die Punkte $S(i,n) := \{x(i,1), \ldots, x\left(i, N\left(1/n\right)\right)\}$ C_i vollständig überdecken. Dies ist möglich, da wir für jedes n gerade die letzten $M\left(1/n\right)$ Folgenglieder so wählen können, dass die $1/n$-Bälle um diese Punkte schon C_i überdecken.
In den Folgen betrachten wir nun die ersten beiden Folgenglieder $x(i,1)$ und $x(i,2)$. Da die Durchmesser der C_i beschränkt sind durch eine Zahl $D \in \mathbb{R}_0^+$, ist $d_i(x(i,1), x(i,2))$ eine Folge, die Werte in einer kompakten Menge $[0,D]$ annimmt. Sie besitzt also eine Teilfolge $d_{i_l}\left(x(i_l,1), x(i_l,2)\right)$ die gegen einen Wert $\delta(1,2)$ konvergiert. Diese Folge ergänzen wir wieder um die übrigen Folgenglieder in den Räumen C_{i_l}. Wir erhalten also eine Folge kompakter metrischer Räume $C_i^2 \subseteq C_i$, bei der die Abstände der ersten beiden Folgenglieder konvergieren.
Diese Folge kann man nun für jedes $k \in \mathbb{N}$ so ausdünnen, dass eine Teilfolge C_i^k entsteht, bei der die Abstände $d_{i_k}\left(x\left(i_k, j\right), x\left(i_k, j'\right)\right)$ für alle $1 \leq j, j' \leq k$ konvergieren. (Hierbei steht d_i als Kurzform für d_{C_i}.)
Auf diese Weise definieren wir $\delta: \ \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \ [0,\infty)$ rekursiv und behaupten, dass die Diagonalfolge C_k^k konvergent ist.

Den gesuchten Grenzwert definieren wir als Abschluss eines abzählbaren Raums. Sei $\hat{\mathrm{C}}_\infty := \{x_1, x_2, \ldots\}$. Dieser erhält die Pseudometrik $d_\infty(x_j, x_{j'}) := \delta(j, j')$.
Zunächst identifizieren wir Punkte miteinander, deren Abstand 0 ist und bilden den topologischen Abschluss, welchen wir C_∞ nennen.
Wir zeigen, dass C_∞ tatsächlich der gesuchte Grenzwert ist. Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$, dann ist $S(i,n)$ ein $1/n$-Netz für C_i. Sei $l > N\left(1/n\right)$ und $i \in \mathbb{N}$, so gibt es ein $j \leq N\left(1/n\right)$ mit $d_i\left(x(i,l), x(i,j)\right) < 1/n$. Halten wir l fest und lassen i gegen unendlich laufen, so muss zumindest ein j unendlich oft auftreten. Es folgt also $d_\infty(x_l, x_j) \leq 1/n$. $S(\infty, n) := \left\{x_1, \ldots, x_{N(1/n)}\right\}$ ist also $1/n$-dicht in $\hat{\mathrm{C}}_\infty$ und somit auch in C_∞.
Ist i groß genug, so ist $R_n := \{(x(i,j), x_j)\} \subset S(i,n) \times S(\infty,n)$ eine surjektive $1/n$-Relation. Außerdem sind $S(i,n)$ und $S(\infty,n)$ $1/n$-dicht in C_i respektive C_∞. R_n ist also eine $1/n$-Relation.
Da $n > 0$ beliebig gewählt war, ist die Konvergenz gegeben.
Schließlich gilt, dass C_∞ total beschränkt (für jedes $n > 0$ existiert eine endliche $1/n$-Überdeckung) und vollständig (Nach Konstruktion) ist. C_∞ ist also kompakt. □

Beispiel 8
In $\mathbb{R}^n$ betrachten wir die Bälle $B_n$von Radius n (bez. der Standardmetrik). Es sei $X_n := \left(B_n, \frac{1}{n}d\right)$. Die Räume sind isometrisch, also speziell gleichmäßig kompakt.

2 Konvergenz punktierter Räume

Der Konvergenzbegriff nach Gromov und Hausdorff ist für kompakte metrische Räume gut geeignet, ansonsten braucht man einen etwas schwächeren Begriff, da zum Beispiel der Abstand eines kompakten metrischen Raumes zu einem unbeschränkten Raum immer unendlich ist. Wir führen daher den Begriff der Konvergenz punktierter Räume ein.

Definition 9
Sei X_n eine Folge metrischer Räume mit Basispunkten $x_n \in X_n$. Die Folge punktierter Räume (X_n, x_n) heißt konvergent gegen (X, x) falls die Folge der abgeschlossenen Bälle $\overline{B}(x_n, r) \subset X_n$ (mit der induzierten Metrik) für alle $r > 0$ gegen $\overline{B}(x, r)$ bezüglich der Gromov-Hausdorff-Metrik konvergieren.
X heißt punktierter Gromov-Hausdorff-Limes der Folge (X_n).

Beispiel 10
Betrachtet man Sphären konstanter Krümmung. Für einen Beobachter am Nordpol erscheinen die Sphären immer mehr wie ein euklidischer Raum, wenn der Radius gegen unendlich strebt.

Lemma 11
Ist ein vollständiger metrischer Raum punktierter Limes einer Folge properer Räume, so ist er selbst proper.

Beweis :
Die Aussage ist nach Satz 6 offensichtlich. □

Man kann Gromovs Präkompaktheitskriterium (Theorem 7) also wie folgt umformulieren.

Theorem 12
Sei (X_n, x_n) eine Folge punktierter metrischer Räume. Falls für jedes $r > 0$ und jedes $\varepsilon > 0$ eine Zahl $N(r, \varepsilon)$ existiert, so dass $B(x_n, r)$ von $N(r, \varepsilon)$ ε-Bällen überdeckt werden kann, dann konvergiert eine Teilfoge von (X_n, x_n) als punktierte Gromov-Hausdorff-Räume.

Beweis :
Der Beweis verläuft komplett analog zum Beweis von Theorem 7. $\square$