

SEMINAR: ZUFALLSMATRIZEN UND DIE RIEMANNSCHE ZETA-FUNKTION

PROF. CHRISTOPHER DENINGER, PROF. JÜRGEN ELSTRODT,
GABRIEL HERZ

- (1) *Die Riemannsche Zetafunktion und ihre approximative Funktionalgleichung:* Definition [Tit86, 1], Analytische Fortsetzung und Funktionalgleichung [Tit86, 2]. Integraldarstellung von $\Gamma(s)\zeta(s)$. Nullstellen 2.12. Riemannsche Vermutung. Approximative Funktionalgleichung 4.15. Beweise bringen entsprechend der Zeit, die zur Verfügung steht. (Für den Beweis von 4.15 beachte 2.4.1 und dessen Beweis). O -Schreibweise erklären.
- (2) *Das zweite Moment der Riemannschen Zetafunktion:* Ziel ist der Beweis von [Tit86, Theorem 7.4]. Dazu Abschnitt 7.4 vortragen. Wenn genügend Zeit vorhanden ist, genauer auf die zitierten Resultate (Fußnoten S.147) eingehen.
- (3) *Das vierte Moment der Riemannschen Zetafunktion:* Ziel ist der Beweis des Theorems [Tit86, 7.6.3]. Der Beweis erfolgt so: 7.12.4/5, 7.13 (insb. 7.13.5) (hier wird 1.2.2 und 2.15.2 (Mellin-Transformation) benötigt). Beweis von 7.16, dann via 7.12.4/5 zu Theorem 7.6.3. Am Schluß die allgemeine Vermutung für die höheren Momente nennen ([KS00b, S. 59, Gl. 4/5]).
- (4) *Spektralstatistik von Zufallsmatrizen:* [Meh04, 2]: je nach Kenntnis und Interesse eine kurze physikalische Motivation. GUE, GOE und GSE definieren. Schwerpunkt auf GUE setzen. Theorem 2.6.3 beweisen. [Meh04, 3]: In 3.1 und 3.2 nur Ergebnisse nennen. 3.3 (den Fall GUE) ausführlich behandeln (insb. Th 3.3.1). [Meh04, 10]: 10.1 und 10.2 kurz behandeln. 10.3 (den Fall CUE) und 10.4 ausführlicher (auch hier Schwerpunkt auf CUE).
- (5) *Das Selbergsche Integral:* Das Selbergsche Integral wird ausgerechnet. [Meh04] 17.1, 17.2, 17.5.2 und 17.7.
- (6) *Vergleich zwischen Zufallsmatrizen und ζ . (1. Teil):* Es sollen die höheren Momente der Riemannschen Zetafunktion mit denen eines gewissen charakteristischen Polynomes verglichen werden. Dieses kurz erläutern ([KS00b, 1] ab Gleichung 4). Danach [KS00b, 2.1] (erzeugende Funktionen), 2.2 (Werteverteilung von $\Re \log z$) und 2.3 (Werteverteilung von $\Im \log z$). Das wichtigste ist 2.1. Abschnitte 2.2 und 2.3 nicht so ausführlich.
- (7) *Vergleich zwischen Zufallsmatrizen und ζ . (2. Teil):* [KS00b, 2.4] (Unabhängigkeit), 2.5 (Asymptotik). Hier 2.4 nicht so ausführlich. Dann 3 und 4 zusammenfassen (auch Selbergs Theorem, Gl. 3, nennen).

- (8) *L-Funktionen und ihre approximative Funktionalgleichung*: [IK04, 5.1] (Daten und Eigenschaften von L -Funktionen) 5.2 (Approximation von L -Funktionen) bis Beweis von Theorem 5.3 einschließlich.
- (9) *Nullstellen und explizite Formeln, Beispiele*: [IK04, 5.3] (Nullstellen zählen), insb. Th. 5.8, dann Abschnitt 5.5 (explizite Formeln), insb. Theorem 5.12. Im Abschnitt 5.7 die verallgemeinerte Riemannsche Vermutung und einige Konsequenzen erklären. Schließlich in 5.9 Beispiele für L -Funktionen nennen, mindestens Dirichlet L -Reihen, wenn möglich aber weitere (siehe dazu 5.10, 5.11).
- (10) *Vermutung von Montgomery, n -Korrelation*: [Meh04, 6.1,6.2] (n -Korrelation für GUE) Man benutze die Technik der orthogonalen Polynome ([Meh04, 5]) ohne Beweis und stelle insbesondere die 2-Korrelation dar (Gl. ab 6.2.13). Danach Montgomerys Vermutung erklären [IK04, 25.1,25.2]. Dazu den Satz von Montgomery (Theorem 25.1) nennen und etwas zum Beweis sagen. Folgerungen aus diesem erklären und Montgomerys Vermutung (Gl. 25.40) plausibel machen, dazu auch [Mon73]. Wenn noch Zeit ist 25.3 (n -Korrelation) knapp darstellen.
- (11) *Symmetriegruppen von L -Funktionen und die Statistik der Gruppen SO und USp* : Erklären wie L -Funktionen in Symmetrieklassen eingeteilt werden können ([KS99]). Statistik der Gruppen SO und USp [Wey97, 6] und [Meh04].
- (12) *Vergleich zwischen Zufallsmatrizen und Symmetriegruppen von L -Funktionen* Man stelle die Ergebnisse aus [KS00a] dar. Beispiel: Dirichletsche L -Reihen ([KS00a, S. 101]).

LITERATUR

- [IK04] H. Iwaniec and E. Kowalski, *Analytic number theory*, volume 53 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.
- [KS99] N. M. Katz and P. Sarnak, *Zeroes of zeta functions and symmetry*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **36**(1), 1–26 (1999).
- [KS00a] J. P. Keating and N. C. Snaith, *Random matrix theory and L -functions at $s = 1/2$* , Comm. Math. Phys. **214**(1), 91–110 (2000).
- [KS00b] J. P. Keating and N. C. Snaith, *Random matrix theory and $\zeta(1/2 + it)$* , Comm. Math. Phys. **214**(1), 57–89 (2000).
- [Meh04] M. L. Mehta, *Random matrices*, volume 142 of *Pure and Applied Mathematics*, Elsevier, San Diego, CA, third edition, 2004.
- [Mon73] H. L. Montgomery, The pair correlation of zeros of the zeta function, in *Analytic number theory (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXIV, St. Louis Univ., St. Louis, Mo., 1972)*, pages 181–193, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1973.
- [Tit86] E. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function. 2nd ed., rev. by D. R. Heath-Brown.*, Oxford Science Publications. Oxford: Clarendon Press. X, 412 p., 1986.
- [Wey97] H. Weyl, *The classical groups*, Princeton Landmarks in Mathematics, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997, Their invariants and representations, Fifteenth printing, Princeton Paperbacks.