Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Institut für Mathematische Statistik

Existenz quasi-stationärer Verteilungen

Diplomarbeit
von Sebastian Brüninghoff

18. Dezember 2008

Betreut durch Professor Dr. G. Alsmeyer

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem Langzeitverhalten absorbierender Markov-Prozesse. Wir gehen dabei von einem zeitstetigen Markov-Prozess $X = (X_t)_{t\geq 0}$ auf dem abzählbaren Zustandsraum $\mathcal{S} = \mathbb{N}_0$ aus. Weiter nehmen wir an, dass fast sichere Absorption im Zustand 0 vorliegt und der Prozess X auf $\mathcal{S} \setminus \{0\}$ irreduzibel ist. Bei der Untersuchung des Langzeitverhaltens eines solchen Prozesses möchte man Erkenntnisse erlangen, die das Verhalten des Prozesses vor dessen Absorption beschreiben. Die Berechnung einer stationären Verteilung liefert einzig die fast sichere Absorption. Um weiterführende Erkenntnisse zu gewinnen, führt man deshalb quasi-stationäre Verteilungen ein. Bei diesen handelt es sich um Verteilungen auf $\mathcal{S} \setminus \{0\}$, die, bedingt unter Nichtabsorption bis zum Zeitpunkt t, unabhängig von t sind.
Das Ziel der Arbeit ist der Beweis eines Satzes, der eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer quasi-stationären Verteilung liefert. Dieses Resultat ist für Geburts- und Todesprozesse von van Doorn in [van91], Ferrari, Martínez und Picco in [FMP92] und van Doorn und Schrijner in [vS95] gezeigt worden. Wir halten uns in dieser Arbeit weitestgehend an die Resultate aus der Arbeit [FKMP95] von Ferrari, Kesten, Martínez und Picco, die das Hauptresultat für Markov-Prozesse der oben beschriebenen Art gezeigt haben. Unter stärkeren Voraussetzungen an den Prozess zeigen wir die Existenz so genannter minimaler quasi-stationärer Verteilungen π, die durch minimalen Erwartungswert der Absorptionszeit bei Wahl von π als Startverteilung gekennzeichnet sind. Cavender zeigte in [Cav78], dass im Gegensatz zur Eindeutigkeit der stationären Verteilung für ergodische Markov-Prozesse, unendlich viele quasi-stationäre Verteilungen existieren können. Im Fall von Geburts- und Todesprozessen folgt unter geeigneten Voraussetzungen sogar die Eindeutigkeit der minimalen quasi-stationären Verteilung.

Anwendung finden die Ergebnisse beispielsweise bei der Untersuchung von Populationsgrößen und in der Epidemiologie. Eine umfangreiche Bibliographie zum Thema quasi-stationäre Verteilungen und deren Anwendungen liefert Pollett in [Pol08].

Wir gehen in der Arbeit folgendermaßen vor: Kapitel 1 liefert die Grundlagen über zeitstetige Markov-Prozesse und Erneuerungsprozesse, die in der Arbeit benötigt werden. In Kapitel 2 werden wir quasi-stationäre Verteilungen definieren und eine Charakterisierung mittels so genannter β-invarianter Maße einführen. Mit Hilfe dieser Charakterisierung ist es möglich, quasi-stationäre Verteilungen als Fixpunkte einer Transformation Φ von Wahrscheinlichkeitsmaßen zu beschreiben. Diese Transformation und deren Iterationen Φ^n werden wir analysieren. Dazu greifen wir im Kapitel 3 auf Erneuerungsprozesse zurück. In diesem Kapitel stellen wir den Zusammenhang mit einer weiteren Abbildung Ψ her. Für diese liefern Harkness und Shantaram in [HS69] Ergebnisse. Die Resultate werden wir nutzen, um im Kapitel 4.2 zu zeigen, dass Fixpunkte der Transformation Φ existieren, die als Limes einer Teilfolge von $\Phi^n\delta_i$ beschrieben werden können. Mit den Ergebnissen aus Kapitel 2 ist dies gleichbedeutend mit der Existenz einer quasi-stationären Verteilung. Dies ermöglicht uns den Beweis des Hauptresultats der Arbeit.

In Kapitel 5 werden wir mit diesem Ergebnis unter stärkeren Bedingungen an den Prozess zeigen können, dass minimale quasi-stationäre Verteilungen existieren.

Für Geburts- und Todesprozesse mit gleichmäßig beschränkten Übergangsraten wird in Kapitel 5.2 gezeigt, dass für diese minimale quasi-stationäre Verteilungen existieren und eindeutig sind. Während wir in Kapitel 4.2 Teilfolgen von $\Phi^n\delta_i$ betrachten, können wir hier die Konvergenz entlang der gesamten Folge zeigen.

Ich danke Herrn Professor Dr. Alsmeyer für die Vergabe des interessanten Themas und für die Betreuung bei der Erstellung dieser Arbeit. Weiter möchte ich meiner Familie für die Unterstützung während des Studiums danken.

1 Allgemeine Grundlagen

Dieses Kapitel dient dazu grundlegende Definitionen und Ergebnisse aus der Theorie der Markov-Prozesse und der Erneuerungstheorie anzugeben, auf die in der Arbeit zurückgegriffen wird. Dabei werden wir größtenteils auf Angabe der Beweise verzichten und stattdessen auf Literatur verweisen.

1.1 Grundlegende Definitionen

Definition 1.1.1: Ein stochastischer Prozess $X = (X_t)_{t\geq 0}$, auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit Werten in einer abzählbaren Menge $\mathcal{S}$, dem Zustandsraum, heißt *zeitstetiger Markov-Prozess*, wenn für jede endliche Menge $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t_{n+1}$ von Zeitpunkten und der zugehörigen Menge $i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}, i, j$ von Zuständen in $\mathcal{S}$, mit $P\left(X_{t_n} = i, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, \ldots, X_{t_1} = i_1\right) > 0$, gilt

$$\begin{aligned} &P\left(X_{t_{n+1}} = j \mid X_{t_n} = i, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, \ldots, X_{t_1} = i_1\right) \\ &\quad = P\left(X_{t_{n+1}} = j \mid X_{t_n} = i\right) = \mathbb{P}_{t_n, t_{n+1}}(i,j) \quad P\text{-f.s.} \end{aligned} \tag{1.1}$$

Wenn die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(X_t = j \mid X_s = i)$ von s, t nur durch $t - s$ abhängen, nennt man den Markov-Prozess *zeitlich homogen* und schreibt $\mathbb{P}_t$ statt $\mathbb{P}_{s,t}$. $\mathbb{P}_t$ bildet eine Familie von Übergangskernen des Markov-Prozesses.

Wir gehen im Folgenden von zeitlich homogenen Markov-Prozessen aus.

Ist $\mathcal{S}$ abzählbar, wird $\mathbb{P}_t$ bereits durch $p_{ij}(t) := \mathbb{P}_t(i, \{j\}),\ i, j \in \mathcal{S}$, festgelegt. Deshalb kann die Halbgruppe $\mathbb{P}_t$ mit der so genannten Übergangsmatrixfunktion $(\mathbf{P}(t))_{t\geq 0}$ identifiziert werden.

Definition 1.1.2: Sei $X = (X_t)_{t\geq 0}$ ein Markov-Prozess mit abzählbarem Zustandsraum $\mathcal{S}$ und Halbgruppe $(\mathbb{P}_t)_{t\geq 0}$ von Übergangskernen. Die Matrix $\mathbf{P}$, definiert durch $\mathbf{P}(t) := (p_{ij}(t))_{i,j\in\mathcal{S}}$, heißt *Übergangsmatrixfunktion.*
Die Übergangsmatrixfunktion $\mathbf{P}(t)$ erfüllt:

(i) $p_{ij}(t) \geq 0$ für alle $t \geq 0$ und $i, j \in \mathcal{S}$ und

$$p_{ij}(0) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{für } i = j, \\ 0, & \text{für } i \neq j. \end{cases}$$

(ii) $\sum\limits_{j\in\mathcal{S}} p_{ij}(t) \leq 1$ für alle $t \geq 0$, $i \in \mathcal{S}$.

(iii) $p_{ij}(s+t) = \sum\limits_{k\in\mathcal{S}} p_{ik}(s)p_{kj}(t)$ für alle $s, t \geq 0$ und alle $i, j \in \mathcal{S}$.
Sie heißt *Standard-Übergangsmatrixfunktion (SÜMF)*, wenn außerdem

(iv) $\lim\limits_{t\to 0} p_{ii}(t) = 1$ für alle $i \in \mathcal{S}$ gilt.
(Wegen $0 \leq \sum\limits_{j\neq i} p_{ij}(t) \leq 1 - p_{ii}$ folgt damit $p_{ij}(t) \xrightarrow{t\to 0} 0$ für alle $i, j \in \mathcal{S}$).

Bemerkung 1.1.3: Die in (iii) auftretenden Gleichungen werden *Chapman-Kolmogorov-Gleichungen* genannt.
$(\mathbf{P}(t))_{t\geq 0}$ heißt *stochastisch*, wenn $\sum\limits_{j\in\mathcal{S}} p_{ij}(t) = 1$ für alle $t \geq 0,\ i \in \mathcal{S}$ und *substochastisch* andernfalls.

Definition 1.1.4: Sei $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtration. Ein stochastischer Prozess $X = (X_t)_{t\geq 0}$ mit abzählbarem Zustandsraum $\mathcal{S}$ heißt *Markov-Prozess bezüglich* $\mathcal{F}$, wenn er $\mathcal{F}$-adaptiert ist und bezüglich $\mathcal{F}$ die Markov-Eigenschaft besitzt, d.h.

$$P(X_t = j \mid \mathcal{F}_s) = P(X_t = j \mid X_s) \quad P\text{-f.s.}$$

für alle $0 \leq s < t < \infty$ und $j \in \mathcal{S}$.

Eine wichtige Verallgemeinerung der Markov-Eigenschaft liefert die folgende Definition.

Definition 1.1.5: Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein Markov-Prozess mit abzählbarem Zustandsraum $\mathcal{S}$ und kanonischer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, gegeben durch $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$ für alle $t \geq 0$. Ist

$$P(X_{\tau+t} \in \cdot \mid \mathcal{F}_\tau) = P(X_{\tau+t} \in \cdot \mid X_\tau) \quad P\text{-f.s. auf } \{\tau < \infty\} \tag{1.2}$$

für eine Stoppzeit τ für $(X_t)_{t\geq 0}$ erfüllt, sagt man, dass $(X_t)_{t\geq 0}$ die *starke Markov-Eigenschaft bezüglich* τ besitzt. Äquivalent zu (1.2) ist

$$E[f(X_\tau, X_{\tau+1}, \ldots)|\mathcal{F}_\tau] = E_{X_\tau} f(X_0, X_1, \ldots)$$

für alle $t \geq 0$ und $f \in b\mathfrak{S}$. Mit $b\mathfrak{S}$ sei der Raum der beschränkten Funktionen auf $\mathcal{S}$ bezeichnet.

Definition 1.1.6: Eine Matrix $\mathbf{Q} = (q_{ij})_{i,j\in\mathcal{S}}$ heißt *Q-Matrix* zur Übergangsmatrixfunktion $(\mathbf{P}(t))_{t\geq 0}$, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

$$-q_i := q_{ii} = p'_{ii}(0) \quad \text{und} \quad q_{ij} = \lim_{t\downarrow 0} \frac{p_{ij}(t) - p_{ij}(0)}{t}, \text{ falls } i \neq j.$$

Dabei gilt $q_{ij} \geq 0$ für alle $i \neq j$, weil der Differenzenquotient immer ≥ 0 ist, und $q_{ii} \leq 0$ für alle $i \in \mathcal{S}$. Außerdem gilt wegen Fatous Lemma

$$\sum_{j\neq i} q_{ij} = \sum_{j\neq i} \lim_{t\to 0} \frac{p_{ij}(t)}{t} \leq \liminf_{t\to 0} \sum_{j=i} \frac{p_{ij}(t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1 - p_{ii}(t)}{t} = q_i \tag{1.3}$$

für alle $i \in \mathcal{S}$. Die q_{ij} werden als *Übergangsraten* bezeichnet.

Definition 1.1.7: Wenn

$$\sum_{j\neq i} q_{ij} = q_i < \infty \tag{1.4}$$

für alle $i \in \mathcal{S}$ gilt, werden $(X_t)_{t\geq 0}$ und $\mathbf{Q}$ als *konservativ* bezeichnet.

Definition 1.1.8: Eine Standard-Übergangsmatrixfunktion $(\mathbf{P}(t))_{t\geq 0}$ heißt *Q-Funktion* zur Q-Matrix $\mathbf{Q}$, wenn $p'_{ij}(0+) = q_{ij}$ für alle $i, j \in \mathcal{S}$ gilt.

Definition 1.1.9: Ein konservativer Markov-Prozess mit Zustandsraum $\mathcal{S} = \mathbb{N}_0$, der von einem Zustand i nur in die jeweiligen Nachbarzustände $i-1$ und $i+1$ springen kann, heißt *Geburts- und Todesprozess.* Die Q-Matrix hat die Gestalt

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & 0 & \dots \\ \vdots & & & \ddots & & \end{pmatrix}.$$

Die $\lambda_n \in [0,\infty)$, $n \geq 0$, sind dabei die so genannten *Geburtsraten* und die $\mu_n \in [0,\infty)$, $n \geq 0$, die *Sterberaten.*
Ein Markov-Prozess, dessen Q-Matrix durch

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 & 0 & \dots \\ \vdots & & & \ddots & & \end{pmatrix}$$

gegeben ist, heißt *(reiner) Geburtsprozess.*

1.2 Minimale Konstruktion von Markov-Sprungprozessen

Sei $X = (X_t)_{t\geq 0}$ ein zeitstetiger Markov-Prozess mit Zustandsraum $\mathcal{S}$, Standard-Übergangsmatrixfunktion $(\mathbf{P}(t))_{t\geq 0}$, konservativer Q-Matrix $\mathbf{Q} = (q_{ij})_{i,j\in\mathcal{S}}$ und kanonischer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, gegeben durch $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$ für alle $t \geq 0$. Zusätzlich sei angenommen, dass X rechtsseitig stetige, stückweise konstante Pfade besitzt. Wir nennen einen Prozess mit diesen Eigenschaften *Markov-Sprungprozess (MSP).* Es stellt sich die Frage, ob zu einer gegebenen konservativen Q-Matrix $\mathbf{Q}$ ein Markov-Sprungprozess konstruiert werden kann. Man kann zeigen, dass dies der Fall ist. Wir werden zwei Sätze angegeben, mit deren Hilfe wir die so genannte *minimale Konstruktion eines Markov-Sprungprozesses* angeben. Auf die Beweise der Sätze wird in diesem Abschnitt verzichtet. Soweit dies nicht anders vermerkt ist, stammen die Sätze aus [Als91], (vgl. Seiten 172-180).

Die sukzessiven Sprungzeiten seien definiert durch

$$\begin{aligned}
&\sigma_0 = 0, \quad \sigma_1 = \inf\{t > 0 : X_t \neq X_0\} \quad \text{und für } n \geq 2 \\
&\sigma_n = \inf\{t > \sigma_{n-1} : X_t \neq X_{\sigma_{n-1}}\}.
\end{aligned}$$

Diese bilden Stoppzeiten bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.
Darüber hinaus setzen wir als *Absorptionszeit*

$$\varrho_A = \sup\{\sigma_k : \sigma_k < \infty\}$$

und für $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
\tau_n &= (\sigma_n - \sigma_{n-1})\mathbf{1}_{\{}\sigma_{n-1} < \infty\} + \infty\mathbf{1}_{\{}\sigma_{n-1} = \infty\} \\
\hat{X}_n &= X_{\sigma_n}\mathbf{1}_{\{}\sigma_n < \infty\} + X_{\varrho_A}\mathbf{1}_{\{}\sigma_n = \infty\}.
\end{aligned}$$

Der nächste Satz gibt Auskunft über die Struktur eines Markov-Sprungprozesses und zeigt, dass $(\hat{X}_n)_{n\geq 0}$ eine diskrete Markov-Kette bildet, die als *eingebettete Markov-Kette* von $(X_t)_{t\geq 0}$ bezeichnet wird.

Satz 1.2.1: *Unter den zuvor gemachten Annahmen existiert eine Übergangsmatrix $\hat{\mathbf{P}}(t) = (\hat{p}_{ij}(t))_{i,j\in\mathcal{S}}$ mit $\hat{p}_{ii}(t) = 0$ bzw. 1, falls $q_i \in (0,\infty)$ bzw. $q_i = 0$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$, $j \in \mathcal{S}, t \geq 0$ und jede Startverteilung λ gilt*

$$P(\hat{X}_{n+1} = j, \tau_{n+1} > t \mid \mathcal{F}_{\sigma_n}) = \sum_{i\in\mathcal{S}} \hat{p}_{ij} e^{-q_i t} \mathbf{1}_{\{\hat{X}_n = i\}} \quad f.s.$$

Insbesondere bildet $\hat{X}$ unter jedem P_λ eine diskrete Markov-Kette mit Zustandsraum $\mathcal{S}$, Übergangsmatrix $\hat{\mathbf{P}}$ und Startverteilung λ, und $\tau_1, \tau_2, \ldots$ sind bedingt unter $\hat{X}$ stochastisch unabhängig mit $\tau_n \sim Exp(q_{\hat{X}_{n-1}})$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Satz 1.2.2: *Unter den bisher gemachten Annahmen ist die Übergangsmatrix $\hat{\mathbf{P}} = (\hat{p}_{ij})_{i,j\in\mathcal{S}}$ der eingebetteten Markov-Kette $(\hat{X}_n)_{n\geq 0}$ wie folgt durch $\mathbf{Q}$ bestimmt: Falls $0 < q_i < \infty$, gilt*

$$\hat{p}_{ii} = 0 \quad \textit{und} \quad \hat{p}_{ij} = q_{ij}/q_i \textit{ für } i \neq j. \tag{1.5}$$

Falls $q_i = 0$, gilt $\hat{p}_{ij} = \delta_{ij}$ für alle $j \in \mathcal{S}$.

Unter Zuhilfenahme der Sätze 1.2.1 und 1.2.2 kann man nun zu einer beliebigen konservativen Q-Matrix $\mathbf{Q}$ einen Markov-Sprungprozess X konstruieren. Dazu konstruiert man eine diskrete Markov-Kette $(\hat{X}_n)_{n\geq 0}$ mit Übergangsmatrix $\hat{\mathbf{P}}$ gegeben wie in Satz 1.2.2 und eine Folge $(\tau_n)_{n\geq 1}$ von Verweildauern, die bedingt unter $(\hat{X}_n)_{n\geq 0}$ stochastisch unabhängig sind, wobei $\tau_n \sim Exp(q_{\hat{X}_n})$ für alle $n \geq 1$ gelten muss. Hierbei tritt das Problem einer möglichen Explosion auf. Darunter versteht man, dass der Prozess in endlicher Zeit unendlich viele Sprünge macht, also

$$P_i(\sup_{n\geq 0} \sigma_n < \infty) > 0 \quad \text{für ein } i \in \mathcal{S}.$$

Der Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ wird bei Explosion durch das angegebene Vorgehen nur bis zur Explosionszeit $\varrho_E = \sup_{n\geq 0} \sigma_n$ bestimmt. Nach ϱ_E ist die Fortsetzung unter Wahrung der Markov-Eigenschaft durch $\mathbf{Q}$ nicht in eindeutiger Weise bestimmt. Um dem Problem der Explosion zu begegnen, erweitern wir den Zustandsraum $\mathcal{S}$ um einen absorbierenden Zustand Δ und gehen zu Q-Matrix $\mathbf{Q}^*$ über, wobei $\mathbf{Q}^* := (q_{ij})_{ij\in\mathcal{S}_\Delta}$ die Erweiterung von $\mathbf{Q}$ auf $\mathcal{S}_\Delta$ ist. Die Fortsetzung von $(\mathbf{P}(t))_{t\geq 0}$ auf $\mathcal{S}_\Delta$ bezeichnen wir mit $(\mathbf{P}^*(t))_{t\geq 0}$, so dass gilt

$$p_{i\Delta}(t) = 1 - \sum_{j\in\mathcal{S}} (p_{ij}(t)), \quad p_{\Delta\Delta} = 1 \text{ und } p_{\Delta i}(t) = 0 \tag{1.6}$$

für alle $i \in \mathcal{S}$ und $t \geq 0$.
Wir wählen das Modell für die eingebettete Markov-Kette $\hat{X}^*$ und die Verweildauern $(\tau_n)_{n\geq 0}$ des zu konstruierenden MSP X^* folgendermaßen:
Seien $\Omega = (\mathcal{S}_\Delta \times [0,\infty])^{\mathbb{N}}$ und

$$\begin{aligned} \hat{X}_n^* : \Omega \to \mathcal{S}_\Delta, &\quad (i_k, t_k)_{k\geq 0} \mapsto i_n \\ \tau_n : \Omega \to [0,\infty], &\quad (i_k, t_k)_{k\geq 0} \mapsto t_n \end{aligned}$$

die zugehörigen Projektionen. $\hat{\mathbf{P}}$ sei wie in Satz 1.2.2 festgelegt und für beliebiges $i \in \mathcal{S}$ sei das Wahrscheinlichkeitsmaß P_i, wie in Satz 1.2.1 gefordert, definiert durch:

$$P_i(X_k^* = i_k, \tau_k > t_k \text{ für } 0 \leq k \leq n) := \delta_{(i,0)}\left(\{j\} \times [t_0,\infty)\right) \left(\prod_{k=0}^{n-1} \hat{p}_{i_k,i_{k+1}} e^{(-q_{i_k} t_{k+1})} \right)$$

für beliebige $n \geq 1, i_0 \ldots, i_n \in \mathcal{S}$ und $t_1, \ldots, t_n \in [0, \infty)$, und

$$P_{\Delta}^{(\hat{X}, \tau_n)_{n \geq 0}} := \delta_{(\Delta,0),(\Delta,\infty),\ldots}$$

Man sieht dann, dass $(\hat{X}^*_n)_{n \geq 0}$ unter jedem $P_i,\ i \in \mathcal{S}$, eine diskrete Markov-Kette mit Zustandsraum $\mathcal{S}$, Startpunkt i und Übergangsmatrix $\hat{\mathbf{P}}$ ist und $\tau_n, n \geq 1$, bedingt unter $(\hat{X}^*_n)_{n \geq 0}$, stochastisch unabhängig sind mit $\tau_n \sim Exp\left(q_{\hat{X}^*_{n-1}}\right)$ für alle $n \geq 0$.

Wir konstruieren nun $(X^*_t)_{t \geq 0}$ durch

$$X^*_t = \begin{cases} X^*_n, & \text{falls } \sigma_n \leq t < \sigma_{n+1} \text{ oder } \sigma_n = \infty, n \in \mathbb{N}, \\ \Delta, & \text{falls } t \geq \varrho_E = \lim\limits_{n \to \infty} \sigma_n, \end{cases} \tag{1.7}$$

wobei $\sigma_0 = 0$ und $\sigma_n = \tau_1 + \ldots + \tau_n$ für $n \in \mathbb{N}$ die Sprungzeiten bezeichnen. Der anschließende Satz zeigt, dass der so konstruierte Prozess tatsächlich ein Markov-Sprungprozess ist.

Satz 1.2.3: *Der zu $\mathbf{Q}$ konstruierte Prozess X^* ist unter jedem $P_i,\ i \in \mathcal{S}$, ein Markov-Sprungprozess mit Zustandsraum $\mathcal{S}_\Delta$, Startpunkt i, Q-Matrix $\mathbf{Q}^*$ und einer SÜMF $\mathbf{P}^*(t) = (p_{ij}(t))_{i,j \in \mathcal{S}_\Delta}$, die (1.6) erfüllt.*

Satz 1.2.4: *Für jede zu $\mathbf{Q}$ gehörende SÜMF $(\tilde{\mathbf{P}}(t))_{t \geq 0}$ gilt*

$$\tilde{p}_{ij}(t) \geq p_{ij}(t) \tag{1.8}$$

für alle $i, j \in \mathcal{S}$ und $t \geq 0$. Ist $\mathbf{P}^*(t)$ stochastisch, also $p_{i,\Delta}(t) = 0$ für alle $i \in S, t \geq 0$, so ist $\mathbf{P}^*(t)$ die einzige zu $\mathbf{Q}$ gehörige SÜMF.

Die durch (1.8) beschriebene Minimalitätseigenschaft ist der Grund dafür, dass man X^* als zu $\mathbf{Q}$ gehörige *minimale Konstruktion* und $\mathbf{P}^*(t)$ als *minimale Q-Funktion* bezeichnet. $\mathbf{P}^*(t)$ ist genau dann stochastisch, wenn X^* nicht-explodierend ist. Der folgende Satz gibt eine notwendige und hinreichende Bedingung an $\mathbf{Q}$, dass der zugehörige Markov-Sprungprozess nicht explodierend ist. Das Ergebnis ist bekannt als Reuters Explosionskriterium (vgl. [Als91], Satz 7.2.3 auf Seite 179).

Satz 1.2.5: *Die minimale Konstruktion X^* ist genau dann nicht-explodierend, wenn $x = 0$ die einzige nichtnegative und beschränkte Lösung die Gleichung $\mathbf{Q}x = x$ bildet.*

Weitere Auskunft gibt der nächste Satz.

Satz 1.2.6: *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) Die minimale Q-Funktion $(\mathbf{P}(t))_{t\geq 0}$ ist die einzige Lösung der Rückwärts-Differentialgleichungen.

(ii) Die Gleichung $\mathbf{Q}x = \lambda x,\ 0 \leq x \leq 1$ hat keine nicht-triviale Lösung für ein (und damit alle) $\lambda > 0$.

(iii) Die Ungleichung $\mathbf{Q}x \geq \lambda x,\ 0 \leq x \leq 1$ hat keine nicht-triviale Lösung für ein (und damit alle) $\lambda > 0$.

(iv) Die Gleichung $\mathbf{Q}x = \lambda x,\ -1 \leq x \leq 1$ hat keine nicht-triviale Lösung, für ein (und damit alle) $\lambda > 0$.

Wenn $\mathbf{Q}$ konservativ ist, dann ist $(\mathbf{P}(t))_{t\geq 0}$ genau dann die einzige Q-Funktion, wenn eine obigen der Bedingungen erfüllt ist.

Beweis: Siehe [And91], Theorem 2.9 auf Seite 80. □

Definition 1.2.7: Eine konservative Q-Matrix $\mathbf{Q}$, die eine der Bedingungen (i)-(iv) aus Satz 1.2.6 erfüllt, heißt *regulär*. In diesem Fall ist die minimale Q-Funktion stochastisch und die einzige Q-Funktion.

Definition 1.2.8: Eine Q-Matrix $\mathbf{Q}$ wird als *gleichmäßig beschränkt* bezeichnet, wenn $\sup_{i\in\mathcal{S}} q_i < +\infty$.

Satz 1.2.9: *Sei $\mathbf{Q}$ eine gleichmäßig beschränkte Q-Matrix. Dann ist die minimale Q-Funktion die einzige Q-Funktion.*

Beweis: Siehe [And91], Proposition 2.9 auf Seite 83. □

Satz 1.2.10: *Jeder MSP besitzt die starke Markov-Eigenschaft.*

Beweis: Siehe [Als91], Korollar 1.3.3 auf Seite 34. □

1.3 Klassifikation von Zuständen

Definition 1.3.1: Gegeben $i, j \in \mathcal{S}$, heißt j *von i erreichbar*, kurz $i \to j$, wenn $p_{ij}(t) > 0$ für ein (und damit alle) $t > 0$ gilt.
Zwei Zustände $i, j \in \mathcal{S}$ heißen *kommunizierend* oder *verbunden*, kurz $i \leftrightarrow j$, wenn $i \to j$ und $j \to i$ gilt.

Definition 1.3.2: Ein Zustand $i \in \mathcal{S}$ heißt *stabil*, wenn $0 < q_i < +\infty$ und *augenblicklich*, wenn $q_i = +\infty$. Eine Übergangsmatrixfunktion heißt stabil, wenn alle Zustände $i \in \mathcal{S}$ stabil sind. Ein Zustand $i \in \mathcal{S}$ heißt *absorbierend*, wenn $q_i = 0$. Dazu äquivalent ist $p_{ii}(t) = 1$ für alle $t \geq 0$.

Bemerkung 1.3.3: Bei konservativen Markov-Sprungprozessen treten augenblickliche Zustände nicht auf.

Für die nächste Definition führen wir die Folge der sukzessiven *Eintrittszeiten* $(\sigma_n^E(i))_{n\geq 0}$ in einen beliebigen Zustand $i \in \mathcal{S}$ ein:

$$\sigma_n^E(i) := \inf\{\sigma_k > \sigma_{n-1}^E(i) : X_{\sigma_k} = i\}$$

für $n \geq 1$, wobei $\sigma_0^E(i) \equiv 0$. Weiter definieren wir

$$\begin{aligned} f_{ij}^* &:= P_i(\sigma_1^E(j) < \infty) \\ \mu_{ij} &:= E_i {\sigma_1}^E(j). \end{aligned}$$

Definition 1.3.4: Ein stabiler Zustand $i \in \mathcal{S}$ heißt

- *rekurrent*, falls $f_{ii}^* = 1$.
- *transient*, falls $f_{ii}^* < 1$.
- *positiv rekurrent*, falls $f_{ii}^* = 1$ und $\mu_{ii} < \infty$.
- *null-rekurrent*, falls $f_{ii}^* = 1$ und $\mu_{ii} = \infty$.

Dabei wird μ_{ii} als *mittlere Rekurrenzzeit* von i bezeichnet.

Lemma 1.3.5: *Sei $i \in \mathcal{S}$ ein stabiler Zustand. Wenn i*

- *rekurrent ist, dann gilt $\int_0^\infty p_{ii}(t)\ dt = \infty$.*
- *transient ist, dann gilt $\int_0^\infty p_{ii}(t)\ dt < \infty$.*

Definition 1.3.6: Eine Zustandseigenschaft, die, wenn sie für einen Zustand aus einer irreduziblen Klasse $\mathcal{C}_i = \{j \in \mathcal{S} : j \leftrightarrow i\}$ gilt, bereits für jeden Zustand $j \in \mathcal{C}_i$ gilt, heißt *Solidaritätseigenschaft.*

Der nächste Satz gibt Auskunft über Solidaritätseigenschaften.

Satz 1.3.7: *Rekurrenz, Transienz, positive Rekurrenz und Null-Rekurrenz bilden Solidaritätseigenschaften.*

Beweis: Siehe [Asm03], Proposition 1.3 auf Seite 6. □

Definition 1.3.8: Ein regulärer Markov-Sprungprozess mit Zustandsraum $\mathcal{S}$ heißt rekurrent/transient, positiv rekurrent/null-rekurrent, wenn er irreduzibel ist und die jeweilige Eigenschaft für einen und damit nach Satz 1.3.7 für alle $i \in \mathcal{S}$ gilt.

Definition 1.3.9: Sei $X = (X_t)_{t\geq 0}$ ein positiv rekurrenter Markov-Prozess mit stationärer Verteilung π. Dann heißt dieser *exponentiell ergodisch*, wenn reelle Zahlen $\alpha_{ij} > 0$ und $C_{ij} > 0$ existieren, so dass gilt

$$|P_{ij}(t) - \pi_j| \leq C_{ij} e^{-\alpha_{ij} t}, \quad t \geq 0. \tag{1.9}$$

1.4 Differentialgleichungen

Ein wichtiges Ergebnis der Theorie der Markov-Prozesse sind die so genannten *Rückwärts-* bzw. *Vorwärts-Differentialgleichungen*, die den Zusammenhang zwischen Q-Matrix $\mathbf{Q}$ und Übergangsmatrixfunktion $(\mathbf{P}(t))_{t\geq 0}$ verdeutlichen.

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k\in\mathcal{S}} q_{ik} p_{kj}(t), \quad \text{für } t > 0, i, j \in \mathcal{S}, \tag{RDGL}$$

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k\in\mathcal{S}} p_{ik}(t) q_{kj}, \quad \text{für } t > 0, i, j \in \mathcal{S}. \tag{VDGL}$$

In Matrixschreibweise lauten diese

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{Q}\mathbf{P}(t) \quad \text{und} \quad \mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{Q}.$$

Diese sind nicht notwendigerweise in jedem Fall erfüllt. Liegt eine konservative Q-Matrix vor, sichert der folgende Satz die Gültigkeit der Rückwärts-Differentialgleichungen.

Satz 1.4.1: *Sei* $\mathbf{Q}$ *eine Q-Matrix,* $(\mathbf{P}(t))_{t\geq 0}$ *eine Standard-Übergangsmatrixfunktion und i ein stabiler Zustand. Ist* $(\mathbf{P}(t))_{t\geq 0}$ *stochastisch, erfüllt* $(\mathbf{P}(t))_{t\geq 0}$ *die* (RDGL) *genau dann, wenn* $\mathbf{Q}$ *konservativ ist.*

Beweis: Siehe [And91], Proposition 1.2.7(2) auf Seite 13. □

Die Vorwärts-Differentialgleichungen (VDGL) sind möglicherweise nicht erfüllt. Es ist aber möglich zu zeigen, dass $(\mathbf{P}(t))_{t\geq 0}$ die so genannten *Vorwärts-Differentialungleichungen*

$$p'_{ij}(t) \geq \sum_{k\in\mathcal{S}} p_{ik}(t)q_{kj} \tag{VDUGL}$$

für $t > 0, i, j \in \mathcal{S}$ erfüllt (vgl. [And91], Proposition 1.2.7(1) auf Seite 13).

Setzt man voraus, dass $(\mathbf{P}(t))_{t\geq 0}$ die einzige SMÜF mit Q-Matrix $\mathbf{Q}$ ist, sind sowohl (VDGL) als auch die (RDGL) gültig.

Satz 1.4.2: *Sei* $\mathbf{Q}$ *eine Q-Matrix auf dem abzählbaren Zustandsraum* $\mathcal{S}$ *und* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *der zugehörige minimale Markov-Sprungprozess. Dann erfüllt die SÜMF* $(\mathbf{P}(t))_{t\geq 0}$ *die Vorwärts- und Rückwärts-Differentialgleichungen* (VDGL) *und* (RDGL).

Beweis: Siehe [Asm03], Theorem 3.4 auf Seite 48. □

1.5 Stationäre Maße

Bei der Untersuchung des Langzeitverhaltens stochastischer Prozesse spielen stationäre Maße, insbesondere stationäre Verteilungen, eine wichtige Rolle. Diese sind wie folgt definiert:

Definition 1.5.1: Gegeben eine Übergangsmatrixfunktion $(\mathbf{P}(t))_{t\geq 0}$, heißt ein Vektor $\pi = (\pi_i)_{i\in\mathcal{S}}$ nicht-negativer Zahlen mit

$$\sum_{i\in\mathcal{S}} \pi_i p_{ij}(t) = \pi_j \quad \text{für alle } j \in \mathcal{S} \text{ und } t \geq 0$$

invariantes Maß für $\mathbf{P}(t)$. Wenn außerdem $\sum_{i\in\mathcal{S}} \pi_i = 1$ gilt, heißt π *invariante Verteilung*. In der Literatur findet sich hierfür auch der Begriff *stationäre Verteilung*. In Matrixschreibweise ergibt sich $\pi\mathbf{P}(t) = \pi$ für alle $t \geq 0$. π bildet also einen linken Eigenvektor zur Übergangsmatrixfunktion $(\mathbf{P}(t))_{t\geq 0}$.

Satz 1.5.2: *Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein irreduzibler und rekurrenter Markov-Sprungprozess auf $\mathcal{S}$ und $\tau(i) := \inf\{t > 0 : \ X_t = i, \ \lim_{s\uparrow t} X_s \ \neq i\}$. Dann ist durch*

$$\pi_j = E_i\left(\int_0^{\tau(i)} \mathbf{1}(X_t = j)\ dt\right) \ \textit{f.a. } j \in \mathcal{S} \tag{1.10}$$

ein stationäres Maß $\pi = (\pi_j)_{j\in\mathcal{S}}$ definiert. Es gilt $\pi_j > 0$ für alle j und π ist bis auf ein skalares Vielfaches eindeutig bestimmt. Für einen positiv rekurrenten Prozess X ist durch $\pi_j^* = \pi_j / E_i(\tau(i))$ eine stationäre Verteilung definiert.

Beweis: Um den Satz zu zeigen berechnen wir die j-te Komponente von $\pi\mathbf{P}(s)$ für alle $s \geq 0$. Für alle $j \in \mathcal{S}$ und $s \geq 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathcal{S}} \pi_k p_{kj}(s) &= E_i\left(\int_0^{\tau(i)} \sum_{k\in\mathcal{S}} p_{kj}(s)\mathbf{1}_{\{X_t=k\}}\ dt\right) \\
&= E_i\left(\int_0^{\tau(i)} p_{X_t j}(s)\ dt\right) = E_i\left(\int_0^{\infty} p_{X_t j}(s)\mathbf{1}_{\{\tau(i)>t\}}\ dt\right) \\
&= E_i\left(\int_0^{\infty} P(X_{t+s} = j, \tau(i) > t \mid \mathcal{F}_t)\ dt\right) \\
&= E_i\left(\int_0^{\infty} \mathbf{1}_{\{X_{t+s}=j,\tau(i)>t\}}\ dt\right) \\
&= E_i\left(\int_0^{\tau(i)} \mathbf{1}_{\{X_{t+s}\}=j}\ dt\right) = E_i\left(\int_s^{\tau(i)+s} \mathbf{1}_{\{X_t=j\}}\ dt\right) \\
&= E_i\left(\int_s^{\tau(i)} \mathbf{1}_{\{X_t=j\}}\ dt\right) + E_i\left(\int_{\tau(i)}^{\tau(i)+s} \mathbf{1}_{\{X_t=j\}}\ dt\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= E_i\left(\int_s^{\tau(i)} \mathbf{1}_{\{X_t=j\}}\ dt\right) + E_i\left(\int_0^s \mathbf{1}_{\{X_t=j\}}\ dt\right) \\
&= E_i\left(\int_0^{\tau(i)} \mathbf{1}_{\{X_t=j\}}\ dt\right) = \pi_j
\end{aligned}
$$

Bei der Rechnung wurde die starke Markov-Eigenschaft und $X_{\tau(i)} = i$ benutzt. Außerdem spielt bei der Aufspaltung des Riemann-Integrals keine Rolle, ob $\tau(i) \leq s$ oder $\tau(i) > s$ gilt.

□

Eine weitere Möglichkeit ein stationäres Maß π zu berechnen gibt der nächste Satz, der π mittels der Q-Matrix $\mathbf{Q}$ charakterisiert.

Satz 1.5.3: *$X = (X_t)_{t\geq 0}$ sei ein regulärer Markov-Sprungprozess mit Q-Matrix $\mathbf{Q}$. Ein σ-endliches Maß $\pi \neq 0$ auf $\mathcal{S}$ ist genau dann stationär, wenn es die Gleichung $\pi\mathbf{Q} = 0$ erfüllt.*

Beweis: Mit der Vorwärts-DGL $\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{Q}, t \geq 0$, folgt

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{I} + \int_0^t \mathbf{P}'(s)\ ds = \mathbf{I} + \left(\int_0^t \mathbf{P}(s)\ ds\right)\mathbf{Q}$$

und für jedes stationäre Maß π

$$\pi = \pi\mathbf{P}(t) = \pi + t\pi\mathbf{Q}$$

für alle $t \geq 0$, also $\pi\mathbf{Q} = 0$.
Die Rückwärts-DGL $\mathbf{P}'(t) = \mathbf{Q}\mathbf{P}(t), t \geq 0$, liefern entsprechend

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{I} + \int_0^t \mathbf{P}'(s)\ ds = \mathbf{I} + \mathbf{Q}(\int_0^t \mathbf{P}(s)\ ds)$$

und damit für jedes π mit $\pi\mathbf{Q} = 0$

$$\pi\mathbf{P}(t) = \pi + \pi\mathbf{Q}\left(\int_0^t \mathbf{P}(s)\ ds\right) = \pi$$

für alle $t \geq 0$. □

1.6 Erneuerungsprozesse

In diesem Abschnitt werden grundlegende Definitionen und Eigenschaften von Erneuerungsprozessen geliefert. Sofern nicht anders gekennzeichnet, stammen diese aus [Als91]. Zunächst werden wir einige allgemeine Definitionen und Klassifikationen aus der Theorie der Random Walks geben. Diese werden wir dann auf den für Anwendung in dieser Arbeit relevanten Fall nichtarithmetischer Random Walks einschränken. Für die Behandlung des Falls d-arithmetischer Verteilungen verweisen wir auf [Als91].

Sei $(S_n)_{n\geq 0}$ ein Random Walk mit Zuwächsen $X_1, X_2, \ldots$ und von diesen unabhängigem Anfangspunkt S_0, d.h. $S_n = S_0 + \sum_{k=1}^{n} X_k$. Sei Q die Verteilung von X_1 und Q_0 die von S_0. Wir werden nun Klassifikationen von $(S_n)_{n\geq 0}$ angeben, die das Verhalten von $(S_n)_{n\geq 0}$ grundlegend beeinflussen.

Definition 1.6.1: $(S_n)_{n\geq 0}$ heißt *Standard-Random-Walk*, falls $S_0 = 0$ f.s. gilt und sonst *verschobener Random Walk*. Sind $S_0, X_1, X_2, \ldots$ alle f.s. nichtnegativ und $EX_1 > 0$, so heißt $(S_n)_{n\geq 0}$ *Erneuerungsprozess*. Gilt $S_0 = 0$ f.s. heißt $(S_n)_{n\geq 0}$ *Standard-Erneuerungsprozess*, sonst *verschobener Erneuerungsprozess*.

Eine zweite Klassifikation betrifft den *Gittertyp* von Q und Q_0. Dazu bezeichnen wir mit $\mathbb{G}_d = d\mathbb{Z}$ und $\mathbb{G}_\infty = \{0\}$ die additiven Untergruppen von $\mathbb{G}_0 = \mathbb{R}$.

Definition 1.6.2: Für ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf $\mathbb{R}$ wird durch

$$d(Q) = \sup\{d \in [0, \infty] : Q(\mathbb{G}_d) = 1\}$$

die *Spanne* von Q definiert. Außerdem sei $(Q_z)_{z\in\mathbb{R}}$ die zugehörige Translationsfamilie, die durch $Q_z = Q(z + \cdot)$ gegeben ist. Q bezeichnet man dann als

- nichtarithmetisch, falls $d(Q) = 0$;
- vollständig nichtarithmetisch, falls $d(Q_z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{R}$;
- d-arithmetisch, falls $d(Q) = d > 0$;
- vollständig d-arithmetisch, falls $d(Q_z) = d > 0$ für alle $z \in \mathbb{G}_d$.

Entsprechend heißt eine Zufallsgröße X nichtarithmetisch,..., falls P^X nichtarithmetisch,... ist.

Definition 1.6.3: Ein Random Walk $(S_n)_{n\geq 0}$ heißt (vollständig) nichtarithmetisch, falls X_1 (vollständig) nichtarithmetisch ist, und (vollständig) d-arithmetisch, falls X_1 (vollständig) d-arithmetisch ist und $P(S_0 \in \mathbb{G}_d) = 1$.

Definition 1.6.4: Sei $Q \in \mathfrak{W}(\mathbb{R})$, wobei $\mathfrak{W}(\mathbb{R})$ die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ bezeichne. Dann heißt jedes Modell

$$(\Omega, \mathfrak{A}, (S_n)_{n\geq 0}, (P_\lambda)_{\lambda \in \mathfrak{W}(\mathbb{R})}),$$

so dass $S_n : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B}), n \geq 0$, unter P_λ einen Random Walk mit Zuwachsverteilung Q und Anfangsverteilung λ bildet, *Standardmodell zu* Q. Es gilt also $P_\lambda(S_0 \in \cdot) = \lambda$ und $P_\lambda(X_1 \in \cdot) = Q$.

Ab jetzt werden wir nur noch nichtarithmetische Random Walks betrachten, da dies der für die Anwendung in dieser Arbeit interessante Fall ist. Für einen Erneuerungsprozess definieren wir das so genannte Erneuerungsmaß. Dazu sei für eine beliebige, messbare Teilmenge A von $[0, \infty)$ die Zufallsgröße $N(A)$ mit Werten in $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ definiert durch

$$N(A) = \sum_{n\geq 0} \mathbf{1}(S_n \in A).$$

Dieses ist die zufällige Anzahl an Erneuerungen in der Menge A. Die erwartete Anzahl von Erneuerungen in A ist dann gegeben durch

$$U(A) = EN(A) = \sum_{n\geq 0} P(S_n \in A).$$

Dieses U definiert ein unendliches Maß auf $\mathcal{B}^+$. Es wird wie oben angekündigt *Erneuerungsmaß* von $(S_n)_{n\geq 0}$ genannt. Im Anschluss werden wir die stationäre Erneuerungsverteilung definieren.

Definition 1.6.5: Sei $(S_n)_{n\geq 0}$ ein Standard-Random-Walk mit positiver Drift $\mu = EX_1 \in (0, \infty)$. Dann heißt eine Anfangsverteilung π^* für S_0 *stationäre Erneuerungsverteilung*, wenn $U_{\pi^*} = \pi^* * U_0$ auf ganz $(0, \infty)$ mit $\mu^{-1}\lambda\!\!\lambda$ übereinstimmt. Hierbei bezeichne $\lambda\!\!\lambda$ das Lebesguemaß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$.

Der folgende Satz zeigt, dass eine solche stationäre Erneuerungsverteilung existiert. Dazu sei $(S_n)_{n\geq 0}$ ein Erneuerungsprozess mit Drift $\mu = EX_1 \in (0, \infty)$.

Wir definieren die Funktion $\pi : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ durch $\pi(t) = 0$ für $t < 0$ und

$$\pi(t) = \int_{[0,t]} P(X_1 > s) \ \lambda\!\!\lambda(ds)$$

für $t \geq 0$. π ist monoton wachsend und rechtsstetig mit

$$\pi(\infty) = \int_{[0,\infty]} P(X_1 > s) \ \lambda\!\!\lambda(ds) = \int_0^\infty P(X_1 > s) \ ds = \mu.$$

Durch π ist ein Maß auf $[0, \infty)$ definiert, das genau dann endlich ist, wenn $\mu = EX_1 < \infty$. Falls $\mu < \infty$, wird durch

$$\pi^*(t) := \frac{\pi(t)}{\pi(\infty)} = \frac{\pi(t)}{\mu},$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $[0, \infty)$ definiert.
Der nun folgende Satz zeigt, dass durch π^* eine zu S_n gehörende stationäre Erneuerungsverteilung gegeben ist, falls die Zuwächse endlichen Erwartungswert besitzen.

Satz 1.6.6: *Für einen Erneuerungsprozess $(S_n)_{n\geq 0}$ in einem Standardmodell gilt*

$$U_\pi = \pi * U_0 = \lambda\!\!\lambda^+$$

und, falls $\mu = EX_1 \in (0, \infty)$,

$$U_{\pi^*} = \pi^* * U_0 = \mu^{-1} \lambda\!\!\lambda^+,$$

wobei für ein Maß λ auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ mit $\lambda^+ := \lambda(\cdot \cap [0, \infty))$ dessen Restriktion auf $[0, \infty)$ bezeichnet werden soll.

Beweis: Siehe [Als05], Satz 29.6 auf Seite 265. □

Definition 1.6.7: Gegeben einen Erneuerungsprozess $(S_n)_{n\geq 0}$, bezeichne

$$\tau(t) = \inf\{n \geq 0 : S_n > t\}, \quad t \geq 0,$$

die Erstaustrittszeiten. Dann heißt

$$R_t = S_{\tau(t)} - t, \quad t \geq 0,$$

Prozess der *Vorwärts-Rekurrenzzeiten.* In der Literatur auch *Exzess, Überschuss* oder *verbleibende Wartezeit* genannt.

$$\hat{R}_t = t - S_{\tau(t)}, \quad t \geq 0,$$

heißt Prozess der *Rückwärts-Rekurrenzzeiten.*

Satz 1.6.8: *Sei* $\mu = EX_1 < \infty$ *und* π^* *die in* (1.6) *definierte stationäre Erneuerungsverteilung. Dann gilt*

$$\lim_{t\to\infty} P_\lambda(R_t \leq r) = \lim_{t\to\infty} P_0(\hat{R}_t \leq r) = \pi^*(r)$$

für alle $r \in \mathbb{R}$ *und* $\lambda \in \mathfrak{W}(\mathbb{R})$.

Beweis: Siehe [Als05], Satz 34.3 auf Seite 309. □

Der Satz besagt also, dass R_t und $\hat{R}_t$ unter P_λ bzw. P_0 schwach gegen die stationäre Erneuerungsverteilung π^* konvergieren.

2 Quasi-stationäre Verteilungen

In diesem Kapitel geben wir zunächst allgemeine Definitionen und Charakterisierungen quasi-stationärer Verteilungen. Im zweiten Teil gehen wir auf die speziell auf das Hauptresultat zugeschnittene Situation ein, indem wir quasi-stationäre Verteilungen als Fixpunkte einer Transformationsabbildung charakterisieren.

2.1 Allgemeines über quasi-stationäre Verteilungen

Für einen Prozess mit fast sicherer Absorption in 0 ist es nicht zielführend, nach einer stationären Verteilung über den gesamten Zeitraum $T = [0, \infty)$ zu suchen, um das Verhalten des Prozesses zu analysieren. Dies ist die triviale Verteilung im absorbierenden Zustand 0 und gibt somit keine befriedigende Auskunft über das Verhalten des Prozesses vor dessen Absorption. Wir suchen deshalb nach stationären Verteilungen unter der Bedingung, dass der Prozess noch nicht absorbiert wurde. Zunächst geben wir zwei verschiedene Definitionen an. Wir werden diese zur Unterscheidung *quasi-invariant* bzw. *quasi-stationär* nennen.

Im Folgenden gehen wir immer von einem Markov-Prozess $X = (X_t)_{t\geq 0}$ auf dem abzählbaren Zustandsraum $\mathcal{S} = \mathbb{N}_0$, für den $0 \in \mathcal{S}$ der einzige absorbierende Zustand ist und alle Zustände $i \neq 0$ eine irreduzible Klasse $\mathcal{C}$ bilden.

Definition 2.1.1: Ein Wahrscheinlichkeitsmaß π auf $\mathcal{C} := \{1, 2, \ldots\} = \mathcal{S} \setminus \{0\}$ heißt *quasi-invariante Verteilung* für den Prozess $X = (X_t)_{t \geq 0}$, wenn

$$\frac{\sum_{i \geq 1} \pi(i) P_i(X_t = j)}{\sum_{i \geq 1} \pi(i) P_i(X_t \neq 0)} = \pi(j) \quad \text{für } t > 0 \text{ und alle } \; j \in \mathcal{C} \tag{2.1}$$

gilt.

Das bedeutet, dass die Verteilung des in $t = 0$ gemäß der Verteilung π gestarteten Prozesses, unter der Bedingung zur Zeit t noch nicht absorbiert zu sein, ebenfalls π ist.

Definition 2.1.2: Ein Wahrscheinlichkeitsmaß π auf $\mathcal{C} = \mathcal{S} \setminus \{0\} = \{1, 2, \ldots\}$ heißt *quasi-stationäre Verteilung* für den mit μ gestarteten Prozess $X = (X_t)_{t \geq 0}$, wenn

$$\lim_{t \to \infty} \frac{P_\mu(X_t = j)}{P_\mu(X_t \neq 0)} = \pi(j) \qquad \text{für alle } j \in \mathcal{C} \tag{2.2}$$

gilt.

Bemerkung 2.1.3: (2.2) wird auch *Yaglom-Limes* genannt. Vere-Jones hat in [VJ69] gezeigt, dass dieser eine quasi-invariante Verteilung definiert, falls er existiert und ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist.
Andererseits gilt für einen, gemäß einer quasi-invarianten Verteilung π, gestarteten Prozess

$$\lim_{t \to \infty} \frac{P_\pi(X_t = j)}{P_\pi(X_t \neq 0)} = \lim_{t \to \infty} \pi(j) = \pi(j) \qquad \text{für alle } j \in \mathcal{C}, \tag{2.3}$$

so dass eine quasi-invariante Verteilung immer eine quasi-stationäre Verteilung darstellt.
In der Literatur wird auch die durch (2.1) definierte Verteilung quasi-stationäre Verteilung genannt. Wir schreiben im Text quasi-invariante Verteilung, um klar zu machen, mit welcher Definition wir arbeiten.

Eine Möglichkeit die Quasi-Invarianz einer Verteilung zu zeigen, geht auf eine Arbeit [NP93] von Nair und Pollett zurück. Dort werden quasi-invariante Verteilungen durch so genannte β-invariante Verteilungen charakterisiert.

Wir werden hier einige Definitionen und Ergebnisse aus der oben genannten Arbeit angeben. Wir nehmen wieder an, dass 0 der einzige absorbierende Zustand ist und der Prozess auf $\mathcal{S} \setminus \{0\}$ irreduzibel ist. Ausgegangen werden soll von der Definition der β-Invarianz:

Definition 2.1.4: Sei $\mathcal{C}$ eine Teilmenge von $\mathcal{S}$, $\beta > 0$ und $(\mathbf{P}(t))_{t\geq 0}$ eine Standard-Übergangsmatrixfunktion zur Q-Matrix $\mathbf{Q}$. Dann heißt ein Maß $\pi = (\pi_j)_{j\in\mathcal{C}}$ *β-subinvariantes Maß auf $\mathcal{C}$ für $\mathbf{Q}$*, wenn

$$\sum_{i\in\mathcal{C}} \pi_i q_{ij} \leq -\beta\pi_j, \quad j \in \mathcal{C}, \tag{2.4}$$

gilt und *β-invariant*, wenn in (2.4) Gleichheit gilt für alle $j \in \mathcal{C}$.
π heißt *β-subinvariant auf $\mathcal{C}$ für $\mathbf{P}$*, wenn

$$\sum_{i\in\mathcal{C}} \pi_i p_{ij}(t) \leq \exp\left(-\beta t\right)\pi_j, \quad j \in \mathcal{C} \text{ und } t \geq 0, \tag{2.5}$$

gilt und *β-invariant*, wenn in (2.5) Gleichheit gilt für alle $j \in \mathcal{C}$ und $t \geq 0$.

Die β-Invarianz bietet eine Möglichkeit quasi-invariante Verteilungen zu charakterisieren, wie die nun folgenden Sätze zeigen. Dabei setzen wir zunächst nicht voraus, dass die betrachtete Q-Funktion stochastisch ist. Die Beweise der Sätze geben wir im Anhang A.1 dieser Arbeit.

Satz 2.1.5: *Gegeben eine beliebige Q-Funktion $(\mathbf{P}(t))_{t\geq 0}$, ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung π auf $\mathcal{C}$ genau dann eine quasi-invariante Verteilung auf $\mathcal{C}$ für $\mathbf{P}$, wenn π ein β-invariantes Maß auf $\mathcal{C}$ für $\mathbf{P}$ ist für ein $\beta > 0$.*

Satz 2.1.6: *Sei π ein β-subinvariantes Maß auf $\mathcal{C}$ für $\mathbf{P}$ für $\beta > 0$. Dann ist π ein β-subinvariantes Maß auf $\mathcal{C}$ für $\mathbf{Q}$.*
Ist π β-invariant auf $\mathcal{C}$ für $\mathbf{P}$, so ist π genau dann ein β-invariantes Maß auf $\mathcal{C}$ für $\mathbf{Q}$, wenn $\mathbf{P}$ die Vorwärts-Differentialgleichungen (VDGL) *für $i, j \in \mathcal{C}$ erfüllt.*

Aus den beiden Sätzen ergibt sich das folgende Ergebnis.

Korollar 2.1.7: *Sei π eine quasi-invariante Verteilung auf $\mathcal{C}$ für $\mathbf{P}$ und $\beta > 0$. Dann ist π ein β-subinvariantes Maß auf $\mathcal{C}$ für $\mathbf{Q}$ und β-invariant genau dann, wenn $(\mathbf{P}(t))_{t\geq 0}$ die Vorwärts-Differentialgleichung* (VDGL) *für $i, j \in \mathcal{C}$ erfüllt.*

Im Folgenden bezeichne $a_i^{\mathbf{P}}$, $i \in \mathcal{C}$, die durch $a_i^{\mathbf{P}} = \lim_{t\to\infty} p_{i0}(t)$ gegebene Absorptionswahrscheinlichkeit.

Lemma 2.1.8: *Sei $(\mathbf{P}(t))_{t\geq 0}$ eine Q-Funktion und $\beta > 0$. Es existiere ein β-invariantes Maß π auf $\mathcal{C}$ für $\mathbf{P}$ mit $\sum\limits_{i\in\mathcal{C}} \pi_i < \infty$. Dann gilt $a_i^{\mathbf{P}} = h_i^{\mathbf{P}}$ für alle $i \in \mathcal{C}$, wobei*

$$h_i^{\mathbf{P}} = \lim_{t\to\infty} \sum_{j\in\mathcal{S}} p_{ij}(t), \quad i \in \mathcal{C}.$$

Beweis: Da π ein β-subinvariantes Maß auf $\mathcal{C}$ ist, gilt $\pi_i p_{ij}(t) \leq \exp(-\beta t)\pi_j$ für $i, j \in \mathcal{C}$. Daraus folgt

$$\sum_{j\in\mathcal{C}} p_{ij}(t) \leq \exp(-\beta t)\frac{1}{\pi_i}\sum_{j\in\mathcal{C}} \pi_j, \quad i \in \mathcal{C}.$$

Weil $\sum\limits_{i\in\mathcal{C}} \pi_i < \infty$ und $\beta > 0$ vorausgesetzt wurde ergibt sich $\lim_{t\to\infty}\sum_{j\in\mathcal{C}} p_{ij}(t) = 0$ für alle $i \in \mathcal{C}$. Das liefert

$$h_1^{\mathbf{P}} = \lim_{t\to\infty}\sum_{j\in\mathcal{S}} p_{ij}(t) = \lim_{t\to\infty}\sum_{j\in\mathcal{C}} p_{ij}(t) + \lim_{t\to\infty} p_{i0} = a_i^{\mathbf{P}}.$$

□

Satz 2.1.9: *Sei $(\mathbf{P}(t))_{t\geq 0}$ eine Q-Funktion und π ein β-invariantes Maß auf $\mathcal{C}$ für $\mathbf{P}$ für ein $\beta > 0$. Für dieses gelte $\sum\limits_{i\in\mathcal{C}} \pi_i < \infty$. Dann gilt*

$$\beta \geq \frac{\sum\limits_{i\in\mathcal{C}} \pi_i q_{i0}}{\sum\limits_{i\in\mathcal{C}} \pi_i a_i^{\mathbf{P}}}. \tag{2.6}$$

Satz 2.1.10: *Sei $(\mathbf{P}(t))_{t\geq 0}$ eine Q-Funktion zur Q-Matrix $\mathbf{Q}$, die die Vorwärts-Differentialgleichung* (VDGL) *für $i, j \in \mathcal{C}$ erfüllt. Weiter sei π ein β-subinvariantes Maß auf $\mathcal{C}$ für P für ein $\beta > 0$. Dann gilt*

$$\beta\sum_{i\in\mathcal{C}} \pi_i a_i^{\mathbf{P}} \leq \sum_{i\in\mathcal{C}} \pi_i q_{i0}. \tag{2.7}$$

Ist $(\mathbf{P}(t))_{t\geq 0}$ *außerdem stochastisch, gilt*

$$\beta \leq \frac{\sum\limits_{i\in\mathcal{C}} \pi_i q_{i0}}{\sum\limits_{i\in\mathcal{C}} \pi_i}. \tag{2.8}$$

Korollar 2.1.11: *Sei* $(\mathbf{P}(t))_{t\geq 0}$ *eine Q-Funktion, die die Vorwärts-Differentialgleichungen* $p'_{i0}(t) = \sum_{k\in\mathcal{S}} p_{ik}(t)q_{i0}$ *für* $i \in \mathcal{C}$ *erfüllt. Weiter sei* π *für ein* $\beta > 0$ *ein* β*-invariantes Maß auf* $\mathcal{C}$ *für* $\mathbf{P}$ *mit* $\sum\limits_{i\in\mathcal{C}} \pi_i < \infty$*. Dann gilt*

$$\beta = \frac{\sum\limits_{i\in\mathcal{C}} \pi_i q_{i0}}{\sum\limits_{i\in\mathcal{C}} \pi_i a_i^{\mathbf{P}}}$$

und

$$\beta = \frac{\sum\limits_{i\in\mathcal{C}} \pi_i q_{i0}}{\sum\limits_{i\in\mathcal{C}} \pi_i}$$

genau dann, wenn $(\mathbf{P}(t))_{t\geq 0}$ *stochastisch ist.*

Aus den beiden Korollaren 2.1.7 und 2.1.11 ergibt sich der folgende Satz.

Satz 2.1.12: *Sei* π *eine quasi-invariante Verteilung auf* $\mathcal{C}$ *für* $\mathbf{P}$ *und* $(\mathbf{P}(t))_{t\geq 0}$ *erfülle die Vorwärts-Differentialgleichungen* (VDGL) *für* $i, j \in \mathcal{S}$*. Dann ist* π *ein* β*-invariantes Maß auf* $\mathcal{C}$ *für* $\mathbf{Q}$ *mit*

$$\beta = \frac{\sum\limits_{i\in\mathcal{C}} \pi_i q_{i0}}{\sum\limits_{i\in\mathcal{C}} \pi_i a_i^{\mathbf{P}}}$$

und

$$\beta = \sum_{i\in\mathcal{C}} \pi_i q_{i0}$$

genau dann, wenn $(\mathbf{P}(t))_{t\geq 0}$ *stochastisch ist.*

Satz 2.1.13: *Sei* $F(\cdot) = (f_{ij}(\cdot))_{i,j\in\mathcal{S}}$ *die minimale Q-Funktion und* π *ein* β*-subinvariantes Maß auf* $\mathcal{C}$ *für* $\mathbf{Q}$ *für ein* $\beta > 0$*, das* $\sum_{i\in\mathcal{C}} \pi_i < \infty$ *erfüllt. Genau dann ist* π *ein* β*-invariantes Maß auf* $\mathcal{C}$ *für* F*, wenn*

$$\beta \sum_{i\in\mathcal{C}} \pi_i a_i^F = \sum_{i\in\mathcal{C}} m_i q_{i0}. \tag{2.9}$$

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, dann ist π β*-invariant auf* $\mathcal{C}$ *für* $\mathbf{Q}$.

Bemerkung 2.1.14: Ist F stochastisch, gilt $a_i^F = h_i^F = 1$ für alle $i \in \mathcal{C}$ und (2.9) wird zu

$$\beta \sum_{i\in\mathcal{C}} \pi_i = \sum_{i\in\mathcal{C}} \pi_i q_{i0}. \tag{2.10}$$

2.2 Charakterisierung quasi-invarianter Verteilungen mittels Transformation

In diesem Abschnitt wird eine Charakterisierung quasi-invarianter Verteilungen gegeben, die sich für die weitere Untersuchung als nützlich erweisen wird.

Dazu sei wieder die folgende Situation gegeben: $X = (X_t)_{t\geq 0}$ bezeichne die minimale Konstruktion eines regulären Markov-Sprungprozesses zur konservativen Q-Matrix $\mathbf{Q}$. Dieser sei auf $\mathcal{C} = \{1, 2, \ldots\}$ irreduzibel und der Zustand 0 stellt den einzigen absorbierenden Zustand dar. Die Absorptionszeit in 0 definieren wir durch

$$R := \inf\{t \geq 0 : X_t = 0\}. \tag{2.11}$$

Wir konstruieren nun einen weiteren Markov-Prozess Y^μ auf $\{1, 2, \ldots\}$ für ein beliebiges Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $\{1, 2, \ldots\}$. Dabei gehen wir wie in der Arbeit [Pak93] von Pakes vor. Es wird sich zeigen, dass π eine quasi-invariante Verteilung des Prozesses X ist, wenn sie eine invariante Verteilung des Prozesses Y^μ ist. Dieser Prozess Y^μ wird mit Hilfe des Prozesses X konstruiert und zeichnet sich durch die Eigenschaft aus, dass unmittelbar nach Absorption ein neuer Prozess gemäß Startverteilung μ gestartet wird.

Die Konstruktion verläuft folgendermaßen. Sei $(X_t^{(k)})_{k=1,2,\dots}$ eine Folge unabhängiger Kopien von X_t, jeweils mit Startverteilung μ, und Absorptionszeiten $t_k = \inf\{t \geq 0 : X_t^{(k)} = 0\}$. Weiter seien $s_0 = 0$, $s_l = \sum_{k=1}^{l} t_k$ für $l \geq 1$. Der Prozess Y_t^μ wird dann definiert durch

$$Y_t^\mu = \sum_{k=1}^{\infty} X_{t-s_{k-1}}^{(k)} \mathbf{1}_{[s_{k-1},s_k)}(t). \tag{2.12}$$

Das folgende Resultat beschreibt die Q-Matrix von Y_t^μ.

Satz 2.2.1: *Die Q-Matrix $\mathbf{Q}^\mu$ des so konstruierten Prozesses Y_t^μ ist gegeben durch*

$$q_{ij}^\mu = q_{ij} + q_{i0}\mu(j), \quad i,j \geq 1. \tag{2.13}$$

Beweis: Siehe [Pak93], Theorem 4.1 auf Seite 95. □

Die s_k stellen die Erneuerungszeitpunkte eines Erneuerungsprozesses mit Zuwachsverteilung F^μ dar. Hierbei bezeichne F^μ die Verteilung der Absorptionszeit des mit Verteilung μ gestarteten Prozesses X.
Da alle Zustände $\{1,2,\dots\}$ verbunden sind, liefert die Annahme $E_\pi R < \infty$, dass Y_t^π positiv rekurrent ist. Daher folgt mit Satz 1.5.3, dass eine eindeutig bestimmte invariante Verteilung ν für Y^π existiert, die $\nu\mathbf{Q}^\pi = 0$ erfüllt.
Um diese zu berechnen und zu analysieren, führen wir eine Transformation Φ ein. Wir definieren diese durch

$$\begin{aligned} \Phi : \mathfrak{W}(\mathbb{N}) &\to \mathfrak{W}(\mathbb{N}) \\ \mu \mapsto \Phi\mu(j) &= \frac{1}{E_\mu R} \int_0^\infty P_\mu(X_t = j)\, dt \end{aligned} \tag{2.14}$$

für alle $\mu \in \mathfrak{W}(\mathbb{N})$. Dabei bezeichne $\mathfrak{W}(\mathbb{N})$ die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{N} = \{1,2,\dots\}$.
Nach Satz 1.5.2 gilt, dass $\Phi\mu$ die eindeutig bestimmte stationäre Verteilung von Y^μ ist. Der folgende Satz zeigt, dass Fixpunkte der Transformation Φ quasi-invariante Verteilungen bilden. Dieses wird im Beweis des Hauptresultates eine wesentliche Rolle spielen.

Satz 2.2.2: *Sei π ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\{1, 2, \ldots\}$, so dass $E_\pi R < \infty$ und $\mathbf{Q}$ eine reguläre Q-Matrix. Gilt $\Phi\pi = \pi$, dann folgt $\pi\mathbf{Q}^\pi = 0$. Die Verteilung π ist genau dann eine quasi-invariante Verteilung, wenn $\pi\mathbf{Q}^\pi = 0$ gilt .*

Beweis: Da durch $\Phi\pi = \nu$ das eindeutige Wahrscheinlichkeitsmaß gegeben ist, das $\nu\mathbf{Q}^\pi = 0$ erfüllt, ergibt sich, dass aus $\Phi\pi = \pi$ die Gleichung $\pi\mathbf{Q}^\pi = 0$ folgt.
Zu zeigen bleibt also, dass $\pi\mathbf{Q}^\pi = 0$ äquivalent dazu ist, dass π eine quasi-invariante Verteilung ist. Dieses ergibt sich folgendermaßen aus den in Abschnitt 2.1 angegebenen Sätzen.
Da wir $\mathbf{Q}$ als regulär vorausgesetzt haben, existiert nur eine Q-Funktion $(\mathbf{P}(t))_{t\geq 0}$, und zwar die minimale Q-Funktion, die sowohl die Rückwärts- als auch die Vorwärts-Differentialgleichungen für $i, j \in \mathcal{S}$ erfüllt.
Sei also π eine quasi-invariante Verteilung. Nach Satz 2.1.12 wissen wir, dass π ein β-invariantes Maß auf $\mathcal{C}$ für $\mathbf{Q}$ mit $\beta = \sum_{i\in\mathcal{C}} \pi_i q_{i0}$, wenn π eine quasi-invariante Verteilung auf $\mathcal{C}$ für $\mathbf{P}$ ist und $(\mathbf{P}(t))_{t\geq 0}$ die Vorwärts-Differentialgleichung (VDGL) für $i, j \in \mathcal{S}$ erfüllt. Es gilt also

$$\begin{aligned} & \sum_{i\in\mathcal{C}} \pi_i q_{ij} = -\beta\pi_j \\ \Leftrightarrow \quad & \sum_{i\in\mathcal{C}} \pi_i q_{ij} = -\sum_{i\in\mathcal{C}} \pi_i q_{i0}\pi_j \\ \Leftrightarrow \quad & \sum_{i\in\mathcal{C}} (\pi_i q_{ij} + \pi_i q_{i0}\pi_j) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \sum_{i\in\mathcal{C}} \pi_i (q_{ij} + q_{i0}\pi_j) = 0. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Aus der letzten Zeile aus (2.15) folgt, dass $\pi\mathbf{Q}^\pi = 0$ erfüllt ist für q_{ij}^π wie in (2.13).
Umgekehrt gelte $\pi\mathbf{Q}^\pi = 0$. Aus Rechnung (2.15) ergibt sich, dass dann π ein β-invariantes Maß auf $\mathcal{C}$ für $\mathbf{Q}$ ist mit $\beta = \sum_{i\in\mathcal{C}} \pi_i q_{i0}$. Da $\mathbf{P}$ stochastisch ist, gilt mit Bemerkung 2.1.14, $a_i^{\mathbf{P}} = 1$ für alle $i \in \mathcal{C}$. Da π ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{C}$ ist, gilt

$$\beta \sum_{i\in\mathcal{C}} \pi_i = \beta = \sum_{i\in\mathcal{C}} \pi_i q_{i0}. \tag{2.16}$$

Dies entspricht (2.9). Somit ist π ein β-invariantes Maß auf $\mathcal{C}$ für P, wie Satz 2.1.13 zeigt. Dies impliziert nach Satz 2.1.5 die Quasi-Invarianz von π. □

3 Quasi-stationärer Verteilungen und Erneuerungsprozesse

In diesem Kapitel werden wir eine Transformation Ψ für eine Familie von Erneuerungsprozessen einführen und studieren, mit deren Hilfe die Abbildung Φ weiter untersucht werden kann.

3.1 Zusammenhang mit Erneuerungsprozessen

Wir betrachten nun Erneuerungsprozesse. Mit τ_i bezeichnen wir die Zwischenankunftszeiten eines Erneuerungsprozesses, das heißt $\tau_i,\ i \geq 1$, sind unabhängig und identisch verteilt wie eine zufällige Zeit τ mit zugehöriger Verteilung F. Sei $N(t)$ die Anzahl der Erneuerungen bis zum Zeitpunkt $t \geq 0$ und sei $\sigma_i = \sum_{k=1}^{i} \tau_k$ die Zeit der i-ten Erneuerung. Des Weiteren nehmen wir an, dass $E\tau < \infty$ und F nichtarithmetisch ist.

Wir führen eine Abbildung $\Psi : F \mapsto \Psi F$ ein und definieren mit dieser rekursiv eine Folge von Verteilungsfunktionen $(F_k)_{k\geq 0}$. Mit $m_n(F)$ bezeichnen wir das n-te Moment von F. Im Folgenden nehmen wir $m_n(F) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ an. Wir setzen $F_0 := F$ und $F_k = \Psi^k F$ für $k \geq 1$. Damit definieren wir nun Ψ und $(F_k)_{k\geq 0}$, indem wir für $k = 1$

$$F_1(s) = \Psi F(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{m_1(F)} \displaystyle\int_0^s [1 - F(t)]\, dt, & \text{für } s > 0 \\ 0, & \text{für } s \leq 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

und für $k > 1$

$$F_{k+1}(s) = \Psi^{k+1}F(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{m_1(F_k)} \displaystyle\int_0^s [1 - F_k(t)]\ dt, & \text{für } s > 0 \\ 0, & \text{für } s \leq 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

setzen. Daraus ergibt sich mit der Beziehung

$$m_n(F) = \int_0^\infty x^n\ dF(x) = n \int_0^\infty x^{n-1} [1 - F(x)]\ dx, \tag{3.3}$$

dass F_1 und somit auch F_k Verteilungsfunktionen sind. Aus Satz 1.6.8 folgt, dass ΨF die Grenzverteilung der Rückwärts-Rekurrenzzeit ist. Diese ist gegeben durch

$$\lim_{t\to\infty} P\left(\sigma_{N(t)+1} - t < s\right) = \frac{1}{E\tau} \int_0^s (1 - F(t))\ dt = \Psi F(s).$$

Das folgende Lemma zeigt den Zusammenhang zwischen der stationären Verteilung $\Phi\pi$ und ΨF^π. Dies wird im späteren Beweis der Existenz einer quasi-invarianten Verteilung genutzt. Wir schreiben wieder F^μ für die Verteilung der Absorptionszeit eines mit Anfangsverteilung μ gestarteten Markov-Prozesses. Dabei ist μ zunächst eine beliebige Verteilung auf $\mathbb{N}$.

Lemma 3.1.1: *Sei $E_\pi R < \infty$. Dann gilt $F^{\Phi\pi} = \Psi F^\pi$.*

Beweis: Die Verteilung von R unter $\Phi\pi$ ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} 1 - F^{\Phi\pi}(s) &= P_{\Phi\pi}(R > s) \\ &= \sum_{i\geq 1} \Phi\pi(i)\ P_i\,(R > s) \\ &= \sum_{i\geq 1} \frac{1}{E_\pi R} \int_0^\infty P_\pi\,(X_t = i)\ dt P_i\,(R > s) \qquad (3.4) \\ &= \frac{1}{E_\pi R} \int_0^\infty \sum_{i\geq 1} P_\pi\,(X_t = i)\ P_i\,(R > s)\ dt \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{E_\pi R} \int_0^\infty P_\pi \left(R > t + s\right)\, dt \\
&= \frac{1}{E_\pi R} \int_s^\infty P_\pi \left(R > t\right)\, dt \\
&= 1 - \Psi F^\pi(s)
\end{aligned}
$$

$\square$

Damit folgt induktiv die Beziehung $F^{\Phi^n \pi} = \Psi^n F^\pi$, die wir später benötigen. Nach dem wir den Zusammenhang hergestellt haben, analysieren wir die Folge der Abbildungen $\Psi^n F^\pi$. Dazu dienen uns die folgenden Ergebnisse aus [HS69].

Satz 3.1.2: *Mit den obigen Bezeichnungen gelten die folgenden Aussagen:*

(i)

$$
m_1(F_k) = \frac{m_{k+1}(F)}{(k+1)\ m_k(F)} \text{ für alle } k \in \mathbb{N}. \tag{3.5}
$$

(ii)

$$
\frac{m_n(F_k)}{n!} = \prod_{i=k}^{k+n-1} m_1(F_i) \text{ für alle } k, n \in \mathbb{N}. \tag{3.6}
$$

Um dies zu beweisen, werden die beiden folgenden Lemmata benötigt.

Lemma 3.1.3: *Unter den bisher gemachten Voraussetzungen gelten die folgenden Aussagen:*

(i)

$$
m_n(F_1) = \frac{m_{n+1}(F)}{(n+1)\ m_1(F)} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.
$$

(ii)

$$
m_n(F_k) = \frac{m_{n+1}(F_{k-1})}{(n+1)\ m_1(F_{k-1})} \text{ für alle } k, n \in \mathbb{N}.
$$

Beweis:

$$
m_n(F_1) = \int_0^\infty x^n\ dF_1(x) \overset{(3.1)}{=} \frac{1}{m_1(F)} \int_0^\infty x^n \left[1 - F(x)\right]\, dx \overset{(3.3)}{=} \frac{m_{n+1}(F)}{(n+1)\ m_1(F)}
$$

Wendet man die Rekursion aus (3.2) an, so ergibt sich

$$m_n(F_k) = \int_0^\infty s^n \; dF_k(s) = \frac{1}{m_1(F_{k-1})} \int_0^\infty s^n \left[1 - F_{k-1}(s)\right] \, ds \overset{(3.3)}{=} \frac{m_{n+1}(F_{k-1})}{(n+1) \; m_1(F_{k-1})}.$$

□

Lemma 3.1.4: *Für alle $n, k \in \mathbb{N}$ gilt*

$$m_n(F_k) = \binom{k+n}{n}^{-1} \frac{m_{k+n}(F)}{m_k(F)}. \tag{3.7}$$

Beweis: Der Beweis des Lemmas basiert auf Induktion nach k.
Der Induktionsanfang k=1 ist durch die Aussage in Lemma 3.1.3 gezeigt.
Sei also (3.7) für alle $k \leq m$ für ein $m \in \mathbb{N}$ als Induktionsvoraussetzung erfüllt.
Als nächstes zeigen wir den Induktionsschritt $(k-1) \to k$:

$$\begin{aligned}
m_n(F_k) &\overset{3.1.3(\mathrm{ii})}{=} \frac{m_{n+1}(F_{k-1})}{(n+1) \; m_1(F_{k-1})} \\
&\overset{IV}{=} \frac{1}{(n+1)} \frac{\binom{k+n}{n+1}^{-1} \frac{m_{k+n}(F)}{m_{k-1}(F)}}{\binom{k}{1}^{-1} \frac{m_k(F)}{m_{k-1}(F)}} \\
&= \frac{\frac{(k-1)!(n+1)!}{(k+n)!} \; m_{k+n}(F)}{\frac{(n+1)(k-1)!}{k!} \; m_k(F)} \\
&= \binom{k+n}{n}^{-1} \frac{m_{k+n}(F)}{m_k(F)}
\end{aligned}$$

□

Unter Benutzung der Lemmata kann nun der Satz gezeigt werden.

Beweis von Satz 3.1.2: Setzt man in (3.7) $n = 1$, so folgt aus

$$m_1(F_k) = \binom{k+1}{1}^{-1} \frac{m_{k+1}(F)}{m_k(F)} = \frac{m_{k+1}(F)}{(k+1)\; m_k(F)}$$

unmittelbar (3.5).
Gleichung (3.6) ergibt sich aus folgender Rechnung:

$$\begin{aligned}
\frac{m_n(F_k)}{n!} &= \frac{1}{n!}\binom{k+n}{n}^{-1} \frac{m_{k+n}(F)}{m_k(F)} = \frac{m_{k+n}(F)}{m_k(F)} \prod_{i=k}^{k+n-1} \frac{1}{i+1} \\
&= \frac{m_{k+n}(F)}{m_{k+n-1}(F)} \frac{m_{k+n-1}(F)}{m_{k+n-2}(F)} \cdots \frac{m_{k+1}(F)}{m_k(F)} \prod_{i=k}^{k+n-1} \frac{1}{i+1} \\
&= \prod_{i=k}^{k+n-1} \frac{1}{i+1} \frac{m_{i+1}(F)}{m_i(F)} \\
&\overset{(3.5)}{=} \prod_{i=k}^{k+n-1} m_1(F_i)
\end{aligned}$$

□

3.2 Konvergenzbetrachtungen

Mit den zuvor gewonnenen Ergebnissen kann die Folge $(F_k)_{k\geq 0}$ auf Konvergenz entlang einer Teilfolge untersucht werden. Mit der bereits gezeigten Beziehung werden die Ergebnisse im Abschnitt 4.2 benutzt um die Konvergenz einer Teilfolge von $(\Phi^n \pi)_{n=1,2,\ldots}$ gegen eine quasi-invariante Verteilung zeigen. Die Konvergenzaussage liefern die nächsten Sätze.

Satz 3.2.1: *Sei $\mathcal{N} = (n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigenden Folge in $\mathbb{N}$, so dass für alle $l \geq 1$*

$$\lim_{j\to\infty} \frac{m_{n_j+l}(F)}{(n_j+l)m_{n_j+l-1}(F)} = \theta \geq 0$$

gilt. Dann konvergiert F_{n_j} schwach gegen eine Exponentialverteilung mit Erwartungswert θ. Im Fall $\theta = 0$ entspricht dies δ_0, der Dirac-Verteilung in 0.

Der Beweis basiert auf folgendem Satz aus [Chu74] auf Seite 99, den wir an dieser Stelle angeben, aber nicht beweisen.

Satz 3.2.2: *Sei F eine Verteilungsfunktion mit endlichen Momenten $(m_r)_{r\geq 1}$und $(F_n)_{n\geq 0}$ eine Folge von Verteilungsfunktionen, so dass deren jeweilige Momente $m_r^{(n)} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^r \; dF_n$ alle endlich sind. Außerdem gelte für alle $r \geq 1$*

$$\lim_{n\to\infty} m_r^{(n)} = m_r.$$

Dann konvergiert F_n schwach gegen F, in Zeichen $F_n \xrightarrow{w} F$.

Beweis von Satz 3.2.1: Aus Satz 3.1.2 folgt

$$\begin{aligned} m_n(F_k) &\overset{(3.6)}{=} n! \prod_{i=k}^{n+k-1} m_1(F_i) \overset{(3.5)}{=} n! \prod_{i=k}^{n+k-1} \frac{m_{i+1}(F)}{(i+1)\; m_i(F)} \\ &= n! \; \frac{1}{(k+1)\dots(n+k)} \frac{m_{n+k}(F)}{m_k(F)} \\ &= n! \prod_{l=1}^{n} \frac{m_{l+k}(F)}{(l+k)\; m_{l+k-1}(F)} \to n! \; \theta^n \end{aligned}$$

für $k \to \infty,\ k \in \mathcal{N}$.
Sei F eine exponentialverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert θ. Dann gilt

$$n! \; \theta^n = \frac{1}{\theta} \int\limits_0^\infty t^n e^{-t/\theta} \; dt = m_n(F).$$

Damit gilt für alle $n \geq 0$

$$\lim_{n\to\infty} m_n(F_k) = m_n(F)$$

und mit Satz 3.2.2 folgt die schwache Konvergenz von F_{n_j} gegen die gewünschte Verteilung. $\square$

Der anschließende Satz wird im nächsten Kapitel Verwendung finden, um die Konvergenz der Teilfolge von $(\Phi^n \pi)_{n=1,2,\ldots}$ gegen eine quasi-invariante Verteilung zu zeigen.

Satz 3.2.3: *Seien $C < \infty$, $\lambda > 0$ und $1 - F(t) \leq Ce^{-\lambda t}$ für alle $t \geq 0$. Dann existiert ein $\theta \leq 1/\lambda$ und eine aufsteigende Folge $\mathcal{N} = (n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}$, so dass F_n für $n \to \infty$, $n \in \mathcal{N}$, gegen eine Exponentialverteilung mit Erwartungswert θ konvergiert.*

Beweis: Aus $1 - F(t) \leq Ce^{-\lambda t}$ für alle $t \geq 0$ folgt

$$\begin{aligned} m_k(F) &= \int_0^\infty t^k \, dF(t) = \left[-t^k(1-F(t))\right]_0^\infty + k \int_0^\infty t^{k-1}(1-F(t)) \, dt \\ &= k \int_0^\infty t^{k-1}(1-F(t)) \, dt \leq Ck \int_0^\infty t^{k-1} e^{-\lambda t} \, dt \\ &= Ck!\lambda^{-k}. \end{aligned}$$

Daraus folgt mit

$$\prod_{j=1}^k \frac{m_j(F)}{j m_{j-1}(F)} = \frac{m_k(F)}{k!} \leq C\lambda^{-k}$$

die Abschätzung

$$\theta := \liminf_{j \to \infty} \frac{m_j(F)}{j m_{j-1}(F)} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Sei $\mathcal{J} = \{j_1, j_2, \ldots\}$ eine Teilfolge von $\mathcal{N}$ mit

$$\frac{m_{j_l}(F)}{j_l m_{j_l - 1}(F)} \to \theta \quad \text{für } l \to \infty.$$

Um diese zu analysieren, betrachten wir zwei Fälle:

Im Fall $\theta = 0$ gilt

$$m_1(F_{j_l - 1}) \overset{(3.5)}{=} \frac{m_{j_l}(F)}{j_l m_{j_l - 1}(F)} \to \theta = 0.$$

Das zeigt, dass $F_{j_l - 1}$ gegen δ_0 konvergiert.

Betrachten wir nun den Fall $\theta > 0$:
Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung gilt für die Zufallsvariable R mit Verteilung F

$$\begin{aligned} m_j(F)^2 &= E\left(R^{\frac{j+1}{2}} R^{\frac{j-1}{2}}\right)^2 \\ &\overset{CSU}{\leq} E\left((R^{\frac{j+1}{2}})^2\right) E\left((R^{\frac{j-1}{2}})^2\right) \\ &= m_{j+1}(F)\; m_{j-1}(F) \end{aligned}$$

und damit

$$\frac{m_j(F)}{m_{j-1}(F)} \leq \frac{m_{j+1}(F)}{m_j(F)}.$$

Dies impliziert, dass $m_{j+1}(F)/m_j(F)$ wachsend in j ist, und es folgt für alle $k \geq 0$

$$\begin{aligned} \theta &\leq \liminf_{l\to\infty} \frac{m_{j_l-k}(F)}{(j_l-k)m_{j_l-k-1}(F)} \leq \limsup_{l\to\infty} \frac{m_{j_l-k}(F)}{(j_l-k)m_{j_l-k-1}(F)} \\ &= \limsup_{l\to\infty} \frac{m_{j_l-k}(F)}{j_l m_{j_l-k-1}(F)} \overset{(3.2)}{\leq} \limsup_{l\to\infty} \frac{m_{j_l}(F)}{j_l m_{j_l-1}(F)} = \theta. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass für jedes feste k gilt:

$$\frac{m_{j_l-k}(F)}{(j_l-k)m_{j_l-k-1}(F)} \to \theta. \tag{3.8}$$

Wir setzen nun $n_l = j_l - r_l$ mit $r_l \to \infty$ langsam genug, so dass für jedes $k \geq 0$

$$\lim_{l\to\infty} \frac{m_{n_l+k}(F)}{(n_l+k)\; m_{n_l+k-1}(F)} = \theta \tag{3.9}$$

gilt.
Wendet man nun Satz 3.2.1 an, so sieht man, dass F_n gegen eine Exp$(1/\theta)$-Verteilung konvergiert.

□

4 Existenz quasi-stationärer Verteilungen

In diesem Kapitel geben wir zuerst das Hauptresultat der Arbeit an, das eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz quasi-invarianter Verteilungen liefert. Im zweiten Abschnitt bereiten wir den Beweis vor und führen diesen im letzten Teil des Kapitels. Dabei werden die Ergebnisse aus dem vorherigen Kapitel genutzt, um die Verteilung der Absorptionszeit R zu analysieren. Die Resultate dieses Kapitels stammen aus [FKMP95].

4.1 Hauptresultat

Wir geben nun das Hauptresultat an, dass wir am Ende des Kapitels beweisen. Wir nehmen wie vorher an, dass 0 der einzige absorbierende Zustand und der Prozess $X = (X_t)_{t \geq 0}$ auf $\{1, 2, \ldots\}$ irreduzibel ist.

Theorem 1: *Sei $X = (X_t)_{t \geq 0}$ ein Markov-Prozess mit zugehöriger konservativer und regulärer Q-Matrix $\mathbf{Q}$. Es gelte*

$$\lim_{i \to \infty} P_i(R < t) = 0 \quad \textit{für alle } t \geq 0 \tag{4.1}$$

und $P_i(R < \infty) = 1$ für ein $i \in \{1, 2, \ldots\}$. Unter diesen Voraussetzungen existiert genau dann eine quasi-invariante Verteilung, wenn

$$E_i e^{\lambda R} < \infty \tag{4.2}$$

für ein $\lambda > 0$ und $i \in \{1, 2, \ldots\}$.

Aufgrund der Irreduzibilität des Prozesses X gelten die Aussagen für alle $i \in \{1, 2, \ldots\}$, wenn sie für einen Zustand i gelten.
Der folgende Satz liefert eine Bedingung, die zu $E_i e^{\lambda R} < \infty$ äquivalent ist.

Satz 4.1.1: *Unter den Bedingungen von Theorem 1 sind äquivalent,*

(i) $E_i e^{\lambda R} < \infty$ *für ein* $\lambda > 0$ *und* $i \in \{1, 2, \ldots\}$.

(ii) Die Absorptionszeit R *hat exponentiell beschränkte Tail-Wahrscheinlichkeiten, d.h. es existieren Konstanten* $C, \gamma > 0$*, so dass*

$$P_i(R > t) \leq Ce^{-\gamma t}. \tag{4.3}$$

Beweis: Die Rechnung

$$E_i(e^{\lambda R} - 1) = \int_0^\infty \lambda e^{\lambda t} P_i(R > t)\, dt \leq \int_0^\infty \lambda e^{\lambda t} C e^{-\gamma t}\, dt < \infty \tag{4.4}$$

für $C > 0$ und $\gamma > \lambda > 0$ beweist (ii)$\Rightarrow$(i).
Da $E_i e^{\lambda R} < \infty$ gilt, folgt (i)$\Rightarrow$(ii) aus der Markov-Ungleichung, wegen

$$P(R > t) = P(e^{\lambda R} > e^{\lambda t}) \leq e^{-\lambda t} E_i e^{\lambda R} = Ce^{-\lambda t}.$$

□

Eine weitere Möglichkeit (4.3) zu verifizieren, ist ein passendes Supermartingal zu finden. Die Details liefert der nächste Satz.

Satz 4.1.2: *Sei* f *eine auf* $\mathbb{N}$ *definierte Funktion für die Konstanten* $D_1, D_4, D_5 > 0$*,* $D_2, D_3, D_6 < \infty$ *und* $D_6 \in \mathbb{N}$ *existieren mit*

$$f(i) \geq 0 \quad \text{und } f(i) \to \infty \quad \text{für } i \to \infty, \tag{4.5}$$

$$\sum_{j \neq i} q_{ij} f(j) \leq f(i) - D_1 \quad \text{für } i \geq D_6, \tag{4.6}$$

$$|f(i) - f(j)| \leq D_2 \quad \text{für } i \geq D_6 \text{ und } q_{ij} > 0, \tag{4.7}$$

$$\sum_{\substack{j \neq i \\ f(j) \geq n}} q_{ij} \leq D_3 e^{-D_4 n} \text{ für } 1 \leq i \leq D_6 - 1 \text{ und } n \geq 1, \tag{4.8}$$

und

$$-q_{ii} \geq D_5 \quad \textit{für } i \geq D_6. \tag{4.9}$$

Dann gilt

$$E_i e^{\lambda R} < \infty$$

für ein $\lambda > 0$ *und* $i \geq 1$.

Beweis: $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ seien die sukzessiven Sprungzeiten von $(X_t)_{t \geq 0}$. Weiter sei $i \geq D_6, \lambda \geq 0$ und $\varphi(\lambda)$ definiert durch

$$\varphi(\lambda) := [D_1 + D_2]^{-2}[\exp(\lambda(D_1 + D_2) - 1 - \lambda(D_1 + D_2)]. \tag{4.10}$$

Nach den Ergebnissen aus [Nev75], Lemma VII-2-8, gilt in einer Umgebung von 0

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{2}\lambda^2 + O(\lambda^2) \tag{4.11}$$

und

$$\exp(\lambda y) \leq 1 + \lambda y + \varphi(\lambda) y^2.$$

Mit diesen Voraussetzungen ergibt sich

$$\begin{aligned}
&E_i \exp(\lambda[f(X(\sigma_1) - f(i) + D_1])\\
&\leq E_i\Big(1 + \lambda[f(X(\sigma_1) - f(i) + D_1] + \varphi(\lambda)[f(X(\sigma_1) - f(i) + D_1]^2\Big)\\
&\overset{(4.7)}{\leq} 1 + E_i(\lambda[f(X(\sigma_1) - f(i) + D_1]) + \varphi(\lambda)[D1 + D2]^2\\
&\overset{(4.6)}{\leq} 1 + \varphi(\lambda)[D_1 + D_2]^2\\
&\leq \exp(\varphi(\lambda)[D_1 + D_2]^2).
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Sei $0 < \varepsilon < D_5$. Dann folgt mit dem vorher Gezeigten

$$\begin{aligned}
&E_i \exp\left(\lambda[f(X(\sigma_1)) - f(i) + \varepsilon\sigma_1\right) \\
&= E_i \exp\left(\lambda[f(X(\sigma_1) - f(i)]\right) E_i \exp(\varepsilon\sigma_1) \\
&= E_i \exp\left(\lambda[f(X(\sigma_1) - f(i)]\right) \frac{-q_{ii}}{-q_{ii} - \varepsilon} \\
&\overset{(4.13)}{\leq} \exp(-\lambda D_1 + \varphi(\lambda)[D_1 + D_2]^2] \frac{D_5}{D_5 - \varepsilon}.
\end{aligned}$$

Dabei wurde

$$\begin{aligned}
&-q_{ii} \geq D_5 \\
\Leftrightarrow\ &-q_{ii} D_5 - D_5 \varepsilon \geq -q_{ii} D_5 + q_{ii} \varepsilon \\
\Leftrightarrow\ &D_5(-q_{ii} - \varepsilon) \geq -q_{ii}(D_5 - \varepsilon) \\
\Leftrightarrow\ &\frac{D_5}{D_5 - \varepsilon} \geq \frac{-q_{ii}}{-q_{ii} - \varepsilon}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

benutzt.

Wegen (4.11) kann man ein festes $\lambda > 0$ wählen, so dass

$$-\lambda D_1 + \varphi(\lambda)[D_1 + D_2]^2 \leq \frac{-\lambda D_1}{2}.$$

Anschließend wählt man ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$\exp(-\lambda D_1 + \varphi(\lambda)[D_1 + D_2]^2) \frac{D_5}{D_5 - \varepsilon} \leq 1$$

gilt. Setzt man mit dieser Wahl

$$g(t) := \exp(\lambda[f(X_t) - f(X_0)] + \varepsilon t),$$

so gilt

$$E_i(g(\sigma_1)) \leq 1 = g(0) \quad \text{für } i \geq D_6. \tag{4.14}$$

Wir definieren jetzt $T := \inf\{t \geq \sigma_1 : X_t < D_6\}$ und $\nu := \inf\{k \geq 1 : \sigma_k \geq T\}$. Dann ist $(g(X_{\sigma_{k\wedge\nu}}))_{k\geq 0}$ nach (4.14) ein positives Supermartingal. Auf der Menge $\{T \geq t\}$ gilt außerdem $\sigma_\nu \geq t$ und daraus ergibt sich

$$g(X_{\sigma_\nu}) = \exp(\lambda[f(X_{\sigma_\nu}) - f(X_0)] + \varepsilon\sigma_\nu) \geq \exp(-\lambda f(X_0) + \varepsilon t).$$

Daraus folgt für $i \geq D_6$

$$\begin{aligned} P_i(T \geq t) &= E_i(\mathbf{1}_{\{T\geq t\}}) \\ &\leq E_i\big(\mathbf{1}_{\{T\geq t\}} \exp(\lambda f(X_0) - \varepsilon t) \exp(\lambda[f(X_{\sigma_\nu}) - f(X_0)] + \varepsilon\sigma_\nu)\big) \\ &\leq \exp(\lambda f(X_0) - \varepsilon t) E_i\big(\exp(\lambda[f(X_{\sigma_\nu}) - f(X_0)] + \varepsilon\sigma_\nu)\big) \\ &= \exp(\lambda f(X_0) - \varepsilon t) E_i(g(X_{\sigma_\nu})) \\ &\overset{(4.14)}{\leq} \exp(\lambda f(X_0) - \varepsilon t) \leq D_7 \exp(-\varepsilon t). \end{aligned} \tag{4.15}$$

Im Fall $i < D_6$ gilt andererseits mit der starken Markov-Eigenschaft

$$\begin{aligned} P_i(T \geq t) &= P_i(T \geq t, \sigma_1 \leq t) + P_i(T \geq t, \sigma_1 > t) \\ &= \sum_{j\geq D_6} P_j(T \geq t - s) P_i(X_{\sigma_1} = y, \sigma_1 \in ds) + P_i(\sigma_1 \geq t) \\ &\overset{(4.15)}{\leq} \sum_{j\geq D_6} \exp(\lambda f(j) - \varepsilon(t - s)) P_i(X_{\sigma_1} = y, \sigma_1 \in ds) + P_i(\sigma_1 \geq t) \\ &\leq E_i(\exp(\lambda f(X_{\sigma_1}) + \varepsilon\sigma_1) \exp(-\varepsilon t); X_{\sigma_1} \geq D_6) + P_i(\sigma_1 \geq t) \\ &= \exp(-\varepsilon t) E_i(\exp(\lambda f(X_{\sigma_1}) + \varepsilon\sigma_1); X_{\sigma_1} \geq D_6) + P_i(\sigma_1 \geq t) \\ &\leq D_8 \exp(-\varepsilon t) \end{aligned}$$

für eine Konstante $D_8 > 0$.

Diese ist wegen (4.8) und der Regularität der Q-Matrix endlich, wenn λ und ε hinreichend klein gewählt werden. Damit gilt $P_i(T \geq 0) \leq C \exp(-\varepsilon t)$ für ein $C > 0$. Da $P_i(R > t) \leq P_i(T > t) \leq C \exp(-\varepsilon t)$ gilt, folgt somit, dass R exponentiell beschränkte Tail-Wahrscheinlichkeiten besitzt. Nach Satz 4.1.1 ist somit $E_i e^{\lambda R} < \infty$ für ein $\lambda > 0$ und $i \geq 1$ gewährleistet und der Beweis abgeschlossen. $\square$

4.2 Vorbereitungen für den Beweis

In diesem Abschnitt analysieren wir die Folge $F_n := \Phi^n \delta_i$. Wir werden mit Hilfe der Ergebnisse aus Kapitel 3 zeigen, dass eine Teilfolge dieser gegen eine quasi-invariante Verteilung konvergiert.

Lemma 4.2.1: *Sei $X = (X_t)_{t\geq 0}$ ein Markov-Prozess mit zugehöriger konservativer und regulärer Q-Matrix $\mathbf{Q}$. Seien (4.1) sowie (4.2) erfüllt. Dann ist* $\lambda_0 := \sup\{\lambda > 0 : E_i e^{\lambda R} < \infty\}$ *unabhängig von der Wahl von i.*

Beweis: Angenommen, λ_0 ist nicht unabhängig von i. Dann sei für alle $i \in \mathcal{S}$ jeweils λ_i definiert durch

$$\lambda_i := \sup\{\lambda > 0 : E_i e^{\lambda R} < \infty\}.$$

Sei o.B.d.A. $\lambda_i > \lambda_j$ für $i \neq j$. Für $t, s > 0$ muss wegen (4.3) und der Definition von λ_i gelten

$$\begin{aligned} Ce^{-\lambda_i t} &\overset{\lambda_i > 0}{\geq} Ce^{-\lambda_i (t+s)} \\ &\geq P_i(R > t + s) \\ &\geq \sum_{k\geq 1} P_i(X_s = k) P_k(R > t) \\ &\geq P_i(X_s = j) P_j(R > t). \end{aligned}$$

Dies impliziert $P_j(R > t) \leq C_j e^{-\lambda_i t}$ mit $C_j = \dfrac{C}{P_i(X_s = j)}$, weil aus der Irreduzibilität $P_i(X_s = j) > 0$ für alle $j > 0$ folgt. Dies ist ein Widerspruch zur Definition von λ_j und damit ist λ_0 unabhängig von i. $\square$

Der nun anschließende Satz ist ein Kernbestandteil des Beweises des Hauptresultats.

Satz 4.2.2: *Sei $X = (X_t)_{t\geq 0}$ ein Markov-Prozess mit zugehöriger konservativer und regulärer Q-Matrix* $\mathbf{Q}$. *Seien* (4.1) *und* (4.2) *erfüllt und sei λ_0 wie in Lemma 4.2.1 definiert.*
Dann gilt für alle i

$$F_n(t) := F^{\Phi^n\delta_i}(t) = P_{\Phi^n\delta_i}(R \leq t) \to 1 - e^{-\lambda_0 t}, \tag{4.16}$$

mit

$$0 < \lambda_0 = (\lim_{n\to\infty} E_{\Phi^n\delta_i} R)^{-1} < \infty. \tag{4.17}$$

Für ein fest gewähltes $i \geq 1$ existiert außerdem eine Teilfolge $\mathcal{N}'$ von $\mathbb{N}$ und ein Wahrscheinlichkeitsmaß π_∞ auf $\{1, 2, \ldots\}$, so dass $\Phi^n\delta_i \xrightarrow{w} \pi_\infty$ für $n \to \infty$, $n \in \mathcal{N}'$, und

$$P_{\pi_\infty}(R > t) = e^{-\lambda_0 t} \tag{4.18}$$

gilt.

Beweis: Da λ_0 unabhängig von i ist, wählen wir für den Beweis ein beliebiges, aber fest gewähltes $i \geq 1$. Wir schreiben F für $F_0 = F^{\delta_i}$, d.h. $F(t) = P_i(R \leq t)$.
Wenn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m_{n+1}(F)}{(n+1)m_n(F)} = \frac{1}{\lambda_0} \tag{4.19}$$

gilt, folgt mit Satz 3.2.1 die Konvergenz von F_n gegen den gewünschten Grenzwert.
Um die Gültigkeit von (4.19) nachzuweisen, zeigen wir

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{m_{n+1}(F)}{(n+1)m_n(F)} \geq \frac{1}{\lambda_0} \tag{4.20}$$

und

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{m_{n+1}(F)}{(n+1)m_n(F)} \leq \frac{1}{\lambda_0}. \tag{4.21}$$

Wir beweisen dieses, indem wir einen Widerspruch zeigen.

Sei angenommen, (4.20) gilt nicht. Dann kann man, wie im Beweis von Satz 3.2.3, eine aufsteigende Folge $\mathcal{N} = (n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}$ finden, so dass $(F_n)_{n\in\mathcal{N}}$ schwach gegen eine Exponentialverteilung mit Erwartungswert $\theta < \frac{1}{\lambda_0}$ konvergiert. Wir setzen $\pi_n = \Phi^n\delta_i$ und zeigen, dass $\mathfrak{M} = (\pi_n)_{n\in\mathcal{N}}$ straff ist. Aus der fast sicheren Absorption ergibt sich für alle $\varepsilon > 0$ die Existenz eines $t(\varepsilon)$, so dass für alle $n \in \mathcal{N}$

$$\begin{aligned}\varepsilon &\geq P_{\pi_n}(R > t(\varepsilon)) = 1 - F_n(t(\varepsilon))\\ &= \sum_{j\geq 1} \pi_n(j)P_j(R > t(\varepsilon))\\ &\geq \sum_{\substack{j\geq 1\\ \{j:P_j(R>t(\varepsilon))>1/2\}}} \pi_n(j)P_j(R > t(\varepsilon))\\ &\geq \sum_{\substack{j\geq 1\\ \{j:P_j(R>t(\varepsilon))>1/2\}}} \pi_n(j)\frac{1}{2}\end{aligned}$$

gilt. Dies zeigt

$$2\varepsilon \geq \pi_n\Big(\big\{j : P_j\left(R \leq t(\varepsilon)\right) \leq 1/2\big\}\Big),$$

woraus mit (4.34) die Straffheit von $\mathfrak{M}$ folgt. Damit existiert nach Satz A.2.5 eine Teilfolge $\mathcal{N}'$ von $\mathcal{N}$ und ein Wahrscheinlichkeitsmaß π_∞ auf $\{1, 2, \ldots\}$ mit der Eigenschaft, dass π_n schwach gegen π_∞ konvergiert für $n \to \infty,\ n \in \mathcal{N}'$, kurz $\pi_n \xrightarrow{w} \pi_\infty$.

Darüber hinaus gilt wegen majorisierter Konvergenz

$$\begin{aligned}P_{\pi_\infty}(R > t) &= \sum_{j\geq 1} \pi_\infty(j)P_j(R > t)\\ &= \lim_{\substack{n\to\infty\\ n\in\mathcal{N}'}} \sum_{j\geq 1} \pi_n(j)P_j(R > t)\\ &= \lim_{\substack{n\to\infty\\ n\in\mathcal{N}'}} (1 - F_n(t)) = e^{-t/\theta} \quad \text{für alle } t \geq 0.\end{aligned} \tag{4.22}$$

Weil π_∞ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\{1, 2, \ldots\}$ ist, gilt $\pi_\infty(j) > 0$ für ein $j \in \{1, 2, \ldots\}$ und mit (4.22) ergibt sich daraus

$$\pi_\infty(j)P_j(R > t) \leq P_{\pi_\infty}(R > t) \quad \text{für alle } t \geq 0. \tag{4.23}$$

Somit kommt man insgesamt zu dem Ergebnis

$$P_j(R > t) \leq \frac{1}{\pi_\infty(j)} e^{-t/\theta}.$$

Für $1/\theta$ ist also (4.3) erfüllt und es ergibt sich ein Widerspruch zur Wahl von λ_0, denn $\lambda_0 < 1/\theta$. Damit folgt (4.20).

Wir zeigen nun, dass man ein π_∞ finden kann, das (4.18) erfüllt. Nach der Definition von λ_0 existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine positive Konstante $C = C(\varepsilon) > 0$, für die gilt

$$P_i(R > t) \leq Ce^{(-(\lambda_0 - \varepsilon)t)} \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

In Satz 3.2.3 haben wir gezeigt, dass unter den gegebenen Voraussetzungen eine Folge $\mathcal{N}'$ existiert, für die $(F_n)_{n\in\mathcal{N}'}$ gegen eine Exponentialverteilung mit Erwartungswert $\theta \leq 1/(\lambda_0 - \varepsilon)$ konvergiert. Macht man dieses für verschiedene ε, so findet man eine Folge $\mathcal{N}'$, so dass $(F_n)_{n\in\mathcal{N}'}$ gegen eine Exponentialverteilung mit Erwartungswert $\alpha \leq \frac{1}{\lambda_0}$ konvergiert. Analog zu den Berechnungen aus dem ersten Teil dieses Beweises zeigt man für die Folge $\mathcal{N}'$, dass $\alpha = \frac{1}{\lambda_0}$ gelten muss. Das impliziert, dass ein π_∞ existiert, das (4.18) erfüllt. Aus der Existenz dieses π_∞ folgt

$$P_i(R > t) \leq Ce^{-\lambda_0 t}. \tag{4.24}$$

Der Beweis von (4.21) verläuft ebenfalls per Widerspruch.
Angenommen (4.21) gilt nicht. Dann existiert ein $\varepsilon' > 0$ und eine Teilfolge $\mathcal{N}''$, so dass

$$\frac{m_{n+1}(F)}{(n+1)m_n(F)} \geq \frac{1}{\lambda_0} + \varepsilon' \quad \text{für alle } n \in \mathcal{N}''. \tag{4.25}$$

Seien $n \leq j \leq j+1 < n(1 + C\varepsilon'), n \in \mathcal{N}''$ und $C > 0$ so gewählt, dass

$$\frac{1}{1 + C\varepsilon'} \left(\frac{1}{\lambda_0} + \varepsilon' \right) \geq \frac{1}{\lambda_0} + \frac{\varepsilon'}{2} \tag{4.26}$$

gilt.

Dann ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda_0}+\frac{\varepsilon'}{2} &\leq \frac{1}{1+C\varepsilon'}\left(\frac{1}{\lambda_0}+\varepsilon'\right)\\ &\overset{(4.25)}{\leq} \frac{1}{1+C\varepsilon'}\frac{m_{n+1}(F)}{(n+1)m_n(F)}\\ &\overset{(4.27)}{\leq} \frac{n}{n+1}\frac{m_{n+1}(F)}{(j+1)m_n(F)}\\ &\leq \frac{1}{j+1}\frac{m_{n+1}(F)}{m_n(F)}\\ &\leq \frac{1}{j+1}\frac{m_{j+1}(F)}{m_j(F)}.\end{aligned}$$

Dabei wurde die aus (4.26) abgeleitete Relation

$$j+1 \leq n(1+C\varepsilon') \Leftrightarrow \frac{1}{1+C\varepsilon'} \leq \frac{n}{j+1} \tag{4.27}$$

und die Monotonie von $m_{k+1}(F)/m_k(F)$ benutzt.
Somit haben wir

$$\frac{m_{j+1}(F)}{(j+1)m_j(F)} \geq \frac{1}{\lambda_0}+\frac{\varepsilon'}{2}. \tag{4.28}$$

Um die nachfolgenden Rechnungen übersichtlicher zu gestalten, bezeichnen wir den ganzzahligen Anteil von $n(1+C\varepsilon')$ für $n \in \mathcal{N}''$ mit $i(n)$. Dies impliziert

$$\lfloor C\varepsilon' n\rfloor = i(n)-n = (i(n)-1)-(n-1). \tag{4.29}$$

Zusammen mit (4.28) liefert dies

$$\begin{aligned}\frac{m_{i(n)}}{i(n)!} &= \frac{m_n(F)}{n!}\prod_{j=n}^{i(n)-1}\frac{1}{j+1}\frac{m_{j+1}(F)}{m_j(F)}\\ &\overset{(4.28)}{\geq} \frac{m_n(F)}{n!}\prod_{j=n}^{i(n)-1}\left(\frac{1}{\lambda_0}+\frac{\varepsilon'}{2}\right)\\ &= \frac{m_n(F)}{n!}\left(\frac{1}{\lambda_0}+\frac{\varepsilon'}{2}\right)^{\lfloor C\varepsilon' n\rfloor}.\end{aligned}$$

Um den Beweis abschließen zu können, benötigen wir nun noch Informationen über $(m_n(F)/n!)^{\frac{1}{n}}$. Nach (4.25) wissen wir, dass

$$\frac{m_{n+1}(F)}{(n+1)m_n(F)} \geq \frac{1}{\lambda_0} + \frac{\varepsilon'}{2} \overset{(\varepsilon'>0)}{\geq} \frac{1}{\lambda_0}.$$

Wendet man $\frac{m_{n+1}(F)}{(n+1)} \geq \frac{m_n(F)}{\lambda_0}$ rekursiv an, so ergibt sich

$$\frac{m_n(F)}{(n)!} \geq \left(\frac{1}{\lambda_0}\right)^n.$$

Abschließend folgt also

$$\begin{aligned}\liminf_{\substack{n\to\infty\\ n\in\mathcal{N}''}} \left(\frac{m_{i(n)}(F)}{i(n)!}\right)^{\frac{1}{i(n)}} &\geq \liminf_{\substack{n\to\infty\\ n\in\mathcal{N}''}} \left[\frac{m_n(F)}{n!}^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{\lambda_0} + \frac{\varepsilon'}{2}\right)^{C\varepsilon'}\right]^{\frac{n}{i(n)}} \\ &\geq \left[\frac{1}{\lambda_0}\left(\frac{1}{\lambda_0} + \frac{\varepsilon'}{2}\right)^{C\varepsilon'}\right]^{\frac{1}{1+C\varepsilon'}} \geq \frac{1}{\lambda_0}.\end{aligned} \tag{4.30}$$

Mit $P_i(R > t) \leq Ce^{-\lambda_0 t}$ kann man, analog zu den Rechnungen im Beweis von Satz 3.2.3, die Gültigkeit von $m_k(F) \leq Ck!(\frac{1}{\lambda_0})^k$ zeigen. Damit schließt man

$$\liminf_{\substack{n\to\infty\\ n\in\mathcal{N}''}} \left(\frac{m_{i(n)}(F)}{i(n)!}\right)^{\frac{1}{i(n)}} \leq \frac{1}{\lambda_0}$$

und erhält einen Widerspruch zu (4.30).
Insgesamt ergibt sich also

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m_{n+1}(F)}{(n+1)m_n(F)} = \frac{1}{\lambda_0}.$$

Wendet man jetzt Satz 3.2.1 an, so garantiert dieser die Konvergenz der Folge F_n gegen eine Exponentialverteilung mit Erwartungswert $1/\lambda_0$. Wir haben somit die Aussage in (4.16) ist bewiesen.

Zu zeigen bleibt noch (4.17), also $0 < \lambda_0 = (\lim_{n\to\infty} E_{\Phi^n\delta_i} R)^{-1} < \infty$.
Aus (3.5) folgt

$$E_{\Phi^n\delta_i} R = m_1(F_n) = \frac{m_{n+1}(F)}{(n+1)m_n(F)} \to \frac{1}{\lambda_0}.$$

Für jede Wahrscheinlichkeitsverteilung π auf $\{1, 2, \ldots\}$ gilt für i mit $\pi(i) > 0$

$$E_\pi R \geq \pi(i) E_i R > 0$$

und $E_i R \to \infty$ für $i \to \infty$, wegen (4.1). Daraus folgt $\lambda_0 = (E_{\Phi^n\delta_i} R)^{-1} < \infty$.
Aus (4.2) folgt direkt $\lambda_0 > 0$.

□

Wir geben jetzt eine Version des Schauderschen Fixpunktsatzes an. Diese wurde von Cauty in [Cau01] gezeigt und wird zum Beweis des nächsten Satzes benötigt.

Satz 4.2.3: *Sei K eine kompakte, konvexe Teilmenge eines hausdorffschen topologischen Vektorraums V und $F : K \to K$ eine stetige Abbildung. Dann hat F einen Fixpunkt.*

Wir verzichten an dieser Stelle auf den Beweis und verweisen auf die angegebene Arbeit.

Ausgehend von diesem Satz zeigen wir, dass unter den bisher gemachten Voraussetzungen ein Fixpunkt der Abbildung Φ existiert. Dazu folgen einige einführende Bemerkungen.
Wir bezeichnen die Menge der endlichen signierten Maße auf $\mathbb{N}$ mit $\mathfrak{M}(\mathbb{N})$. Diese Menge bildet einen reellen Vektorraum. Auf diesem wird durch

$$d(\pi_1, \pi_2) = \sum_{j\geq 1} |\pi_1(j) - \pi_2(j)|/j^2$$

eine Metrik definiert. Daraus folgt, dass $\mathfrak{M}(\mathbb{N})$ hausdorffsch ist. Durch die Metrik wird eine Topologie erzeugt. Dies ist die Topologie der punktweisen Konvergenz, d. h. es gilt $\pi_k \to \pi$ genau dann, wenn $\pi_k(i) \to \pi(i)$ für alle $i \geq 0,\ \pi \in \mathfrak{M}(\mathbb{N})$.

Wir definieren

$$\mathcal{M}_\theta = \{\pi : \pi \text{ W-Maß auf } \{1,2,\ldots\} \text{ mit } P_\pi(R > t) = e^{-t/\theta}\}.$$

$\mathcal{M}_\theta$ bildet eine Teilmenge des Raums $\mathfrak{M}(\mathbb{N})$ und ist somit ebenfalls ein metrischer Raum, der die Topologie der punktweisen Konvergenz trägt. Wir kommen nun zum angekündigten Resultat.

Satz 4.2.4: *Sei $X = (X_t)_{t\geq 0}$ ein Markov-Prozess mit zugehöriger konservativer und regulärer Q-Matrix $\mathbf{Q}$, der (4.1) und (4.2) erfüllt. Wie in Lemma 4.2.1 sei $\lambda_0 := \sup\{\lambda > 0 : E_i e^{\lambda R} < \infty\}$. Dann hat die Abbildung Φ einen Fixpunkt in $\mathcal{M}_\theta$, falls $\mathcal{M}_\theta \neq \emptyset$.*

Beweis: Für $\theta = 1/\lambda_0$ wurde in Satz 4.2.2 gezeigt, dass eine Teilfolge $\mathcal{N}$ existiert, so dass $\Phi^n \delta_i \xrightarrow{w} \pi_\infty$ und $P_{\pi_\infty}(R > t) = e^{-t/\theta}$ gilt. Das impliziert, dass $\mathcal{M}_\theta \neq \emptyset$. Darüber hinaus gilt

$$\Phi : \mathcal{M}_\theta \to \mathcal{M}_\theta, \tag{4.31}$$

denn für $\pi \in \mathcal{M}_\theta$ gilt mit (3.4)

$$P_{\Phi\pi}(R > s) = \frac{1}{E_\pi R} \int_s^\infty P_\pi\,(R > t)\; dt = \frac{1}{\theta} \int_s^\infty e^{-t/\theta}\; dt = e^{-s/\theta}.$$

Um Satz 4.2.3 anwenden zu können, bleibt zu zeigen, dass

(i) die Abbildung Φ auf $\mathcal{M}_\theta$ stetig ist,

(ii) $\mathcal{M}_\theta$ eine kompakte und konvexe Menge ist.

Zeigen wir zuerst (i). Für die Stetigkeit von Φ, genügt es $\Phi\pi_k(z) \to \Phi\pi(z)$ für $\pi_k(z) \to \pi(z)$ und alle $z \geq 1$ zu zeigen, da $\mathcal{M}_\theta$ ein metrischer Raum ist (vgl. Satz A.2.3). Wenn $\pi_k(z) \to \pi(z)$ für alle $z \geq 0$ und $\pi_k, \pi \in \mathcal{M}_\theta$, dann gilt

$$E_{\pi_k} R = E_\pi R = \theta.$$

Für eine beliebige Teilmenge A aus $\{1, 2, \ldots\}$ gilt dann mit (2.14) und dem Lemma von Fatou

$$\begin{aligned}
\liminf_{k\to\infty} \sum_{j\in A} \Phi\pi_k(j) &\overset{(2.14)}{=} \liminf_{k\to\infty} \sum_{j\in A} \frac{1}{E_{\pi_k} R} \int\limits_0^\infty P_{\pi_k}\left(X_t = j\right)\, dt \\
&= \liminf_{k\to\infty} \sum_{j\in A} \frac{1}{E_{\pi_k} R} \int\limits_0^\infty \sum_{z\geq 1} \pi_k(z) P_z\left(X_t = j\right)\, dt \\
&= \liminf_{k\to\infty} \frac{1}{E_{\pi_k} R} \int\limits_0^\infty \sum_{z\geq 1} \pi_k(z) \sum_{j\in A} P_z\left(X_t = j\right)\, dt \\
&\geq \frac{1}{\theta} \int\limits_0^\infty \liminf_{k\to\infty} \sum_{z\geq 1} \pi_k(z) \sum_{j\in A} P_z\left(X_t = j\right)\, dt \\
&\geq \frac{1}{\theta} \int\limits_0^\infty \sum_{z\geq 1} \pi_(z) \sum_{j\in A} P_z\left(X_t = j\right)\, dt \\
&= \sum_{j\in A} \Phi\pi(j).
\end{aligned}$$

Also ergibt sich insgesamt

$$\liminf_{k\to\infty} \sum_{j\in A} \Phi\pi_k(j) \geq \sum_{j\in A} \Phi\pi(j). \tag{4.32}$$

Da A beliebig war, muss dies auch für A^c gelten, und wir haben

$$\liminf_{k\to\infty} \sum_{j\in A} \Phi\pi_k(j) = \sum_{j\in A} \Phi\pi(j). \tag{4.33}$$

Des Weiteren gilt

$$\begin{aligned}
1 &= \lim_{k\to\infty} \sum_{z} \Phi\pi_k(z) \\
&\geq \limsup_{k\to\infty} \Phi\pi_k(j) + \liminf_{k\to\infty} \sum_{z\neq j} \Phi\pi_k(z) \\
&\overset{(4.32)}{\geq} \limsup_{k\to\infty} \Phi\pi_k(j) + \sum_{z\neq j} \Phi\pi_(z).
\end{aligned}$$

Damit haben wir nun

$$
\begin{aligned}
& 1-\sum_{z\neq j}\Phi\pi_(z) \geq \limsup_{k\to\infty}\Phi\pi_k(j) \\
\Leftrightarrow\quad & \Phi\pi(j) \geq \limsup_{k\to\infty}\Phi\pi_k(j) \\
\Rightarrow\quad & \Phi\pi(j) \overset{(4.33)}{=} \limsup_{k\to\infty}\Phi\pi_k(j)
\end{aligned}
$$

und es folgt

$$
\lim_{k\to\infty}\Phi\pi_k(j) = \Phi\pi(j).
$$

Zusammen mit $\pi_k(j)\to\pi(j)$ folgt daraus die Stetigkeit der Abb. Φ.
Jetzt zeigen wir (ii) und beginnen mit der Konvexität von $\mathcal{M}_\theta$. Für $\pi_1,\pi_2\in\mathcal{M}_\theta$, $\alpha\ \in[0,1]$ gilt

$$
\begin{aligned}
P_{\alpha\pi_1+(1-\alpha)\pi_2}(R>t) &= \sum_{j\geq 1}\Big(\alpha\pi_1(j)+(1-\alpha)\pi_2(j)\Big)P_j(R>t) \\
&= \alpha\sum_{j\geq 1}\pi_1(j)P_j(R>t)+(1-\alpha)\sum_{j\geq 1}\pi_2(j)P_j(R>t) \\
&= \alpha e^{\frac{-t}{\theta}}+(1-\alpha)e^{\frac{-t}{\theta}} = e^{\frac{-t}{\theta}}.
\end{aligned}
$$

Dies zeigt die Konvexität von $\mathcal{M}_\theta$.

Bleibt die Kompaktheit von $\mathcal{M}_\theta$ zu zeigen. Da die Topologie metrisch ist, genügt es Folgenkompaktheit von $\mathcal{M}_\theta$ zu zeigen, was mit Satz A.2.2 die Kompaktheit von $\mathcal{M}_\theta$ impliziert. Wir zeigen nun, dass jede Folge aus $\mathcal{M}_\theta$ straff ist, was nach dem Satz A.2.5 die Folgenkompaktheit impliziert.

Aus der fast sicheren Absorption ergibt sich, dass wie im Beweis von Satz 4.2.2 für jedes $\varepsilon > 0$ ein $t(\varepsilon)$ existiert, so dass für alle π in $\mathcal{M}_\theta$ gilt

$$\begin{aligned}
\varepsilon \geq P_\pi(R > t(\varepsilon)) &= \sum_{j\geq 1} \pi(j) P_j(R > t(\varepsilon)) \\
&\geq \sum_{\substack{j\geq 1 \\ \{j: P_j(R>t(\varepsilon))>1/2\}}} \pi(j) P_j(R > t(\varepsilon)) \\
&\geq \sum_{\substack{j\geq 1 \\ \{j: P_j(R>t(\varepsilon))>1/2\}}} \pi(j) \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Mit

$$2\varepsilon \geq \pi\Big(\big\{j : P_j\left(R \leq t(\varepsilon)\right) \leq 1/2\big\}\Big)$$

und Voraussetzung (4.1) folgern wir wieder die Straffheit von $\mathcal{M}_\theta$. Zu zeigen bleibt, dass der Limes wieder in $\mathcal{M}_\theta$ liegt. Dazu wählt man das gleiche Vorgehen wie in im Beweis von Satz 4.2.2.
Sei $\mathcal{N} = (n_k)$ eine Folge mit $\pi_{n_k} \to \pi_\infty$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
P_{\pi_\infty}(R > t) &= \sum_{j\geq 1} \pi_\infty(j) P_j(R > t) \\
&= \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in\mathcal{N}}} \sum_{j\geq 1} \pi_n(j) P_j(R > t) \\
&= \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in\mathcal{N}}} \left(\pi_n(j) P_j(R > t)\right) = e^{-t/\theta}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt $\pi_\infty \in \mathcal{M}_\theta$ und somit die Folgenkompaktheit. Nach Satz A.2.2 folgt daraus bereits, dass $\mathcal{M}_\theta$ kompakt ist.
Die Voraussetzungen von Satz 4.2.3 sind somit erfüllt und die Existenz eines Fixpunkts der Transformation Φ gesichert. $\square$

4.3 Beweis des Hauptresultats

An dieser Stelle stehen alle Hilfsmittel für den Beweis des Hauptresultats zur Verfügung. Wir geben es zur Erinnerung noch einmal an.

Satz 4.3.1: *Sei $X = (X_t)_{t\geq 0}$ ein Markov-Prozess mit zugehöriger konservativer und regulärer Q-Matrix $\mathbf{Q}$. Es gelte*

$$\lim_{i\to\infty} P_i(R < t) = 0 \quad \textit{für alle } t \geq 0 \tag{4.34}$$

und $P_i(R < \infty) = 1$ für ein $i \in \{1, 2, \ldots\}$.
Unter diesen Voraussetzungen existiert genau dann eine quasi-invariante Verteilung, wenn

$$E_i e^{\lambda R} < \infty \tag{4.35}$$

für ein $\lambda > 0$ und $i \in \{1, 2, \ldots\}$ gilt.

Beweis von Satz 4.3.1: Zunächst werden wir zeigen, dass $E_i e^{\lambda R} < \infty$ eine notwendige Bedingung für die Existenz einer quasi-invarianten Verteilung ist.

Sei π eine quasi-invariante Verteilung. Dann ergibt sich aus den Chapman-Kolmogorov-Gleichungen $P_\pi(R > s + t) = P_\pi(R > s)P_\pi(R > t)$. Das impliziert, dass die Absorptionszeit R eine Exponentialverteilung F^π besitzt. Nach Voraussetzung gilt $P_i(R < \infty) = 1$ für alle i. Daraus ergibt sich die Gültigkeit von $P_\pi(R < \infty) = 1$ und folglich $E_\pi R < \infty$.
Sei nun $\lambda < E_\pi R$.
Mit

$$\varphi_R(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{\lambda R} \; R\;(dx) = E_\pi e^{\lambda R}$$

bezeichnen wir die momenterzeugende Funktion von R. Für die exponentialverteilte Zufallsvariable R berechnet man

$$\varphi_R(\lambda) = \frac{(E_\pi R)^{-1}}{(E_\pi R)^{-1} - \lambda}.$$

Nach Wahl von λ muss dann $E_\pi e^{\lambda R} < \infty$ gelten.
Die Irreduzibilität auf $\{1, 2, \ldots\}$ impliziert $\pi(i) > 0$ für alle $i \in \{1, 2, \ldots\}$. Somit

haben wir

$$E_i e^{\lambda R} \leq \frac{1}{\pi(i)} E_\pi e^{\lambda R} < \infty.$$

Das zeigt das Gewünschte.

Als nächstes werden wir zeigen, dass $E_i e^{\lambda R} < \infty$ hinreichend für die Existenz einer quasi-invarianten Verteilung ist. In Satz 4.2.2 wurde gezeigt, dass die Menge $\mathcal{M}_\theta$ für $\theta = 1/\lambda_0$ unter den hier gemachten Voraussetzungen nicht leer ist. Mit Satz 4.2.4 folgt, dass die Transformation Φ einen Fixpunkt in $\mathcal{M}_\theta$ besitzt. Dies ist nach Satz 2.2.2 gleichbedeutend mit der Existenz einer quasi-invarianten Verteilung. $\square$

5 Minimale quasi-stationäre Verteilungen

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit so genannten *minimalen quasi-invarianten Verteilungen*. Wir zeigen, dass minimale quasi-invariante Verteilungen als Limes einer Teilfolge von $\Phi^n \delta_i$ beschrieben werden können. Dazu muss gleichmäßige Beschränktheit der Übergangsraten gefordert werden. Im zweiten Abschnitt dieses Kapitels betrachten wir Geburts- und Todesprozesse. Für diesen Spezialfall lässt sich über die Existenzaussage hinaus auch eine Eindeutigkeitsaussage treffen. Wenn nicht anders vermerkt, stammen die Ergebnisse dieses Kapitels aus [FKMP95].

5.1 Minimale quasi-stationäre Verteilungen: Der allgemeine Fall

Vor der Definition minimaler quasi-invarianter Verteilungen machen wir einige einführende Bemerkungen:
Sei $\lambda(\pi)$ definiert durch $\lambda(\pi) := \sup\{\lambda > 0 : E_\pi e^{\lambda R} < \infty\}$. Dann gilt

$$\lambda(\pi) \leq \lambda_0 = \sup\{\lambda > 0 : E_i e^{\lambda R} < \infty\} \tag{5.1}$$

für jedes Wahrscheinlichkeitsmaß π auf $\{1, 2, \ldots\}$, weil

$$\pi_\infty(j) P_j(R > t) \leq P_{\pi_\infty}(R > t)$$

(vgl. 4.23). Wir haben in Satz 4.3.1 gezeigt, dass F^π eine Exponentialverteilung besitzt, wenn π eine quasi-invariante Verteilung ist.

Aus der Definition von $\lambda(\pi)$ leitet man ab, dass F^π Erwartungswert $E_\pi R = 1/\lambda(\pi)$ besitzt. Daraus ergibt sich $\lambda(\pi) = \frac{1}{E_\pi R} \leq \lambda_0$.

Mit diesen Bezeichnungen kommen wir zur angekündigten Definition.

Definition 5.1.1: Sei π eine quasi-invariante Verteilung mit $\lambda(\pi) = \lambda_0$. Dann heißt π *minimale quasi-invariante Verteilung.*

Die Wahl dieser Bezeichnung begründet sich darin, dass die erwartete Absorptionszeit bei Gleichheit in (5.1) minimal ist. Im vorherigen Kapitel wurde gezeigt, dass die Menge $\mathcal{M}_\theta$ für alle θ mit $\mathcal{M}_\theta \neq \emptyset$ eine quasi-invariante Verteilung enthält. Das Ziel dieses Kapitels ist es minimale quasi-invariante Verteilungen, die zu $\theta = \frac{1}{\lambda_0}$ gehören, als Limes einer Teilfolge von $(\Phi^n \delta_i)_{n\geq 1}$ zu charakterisieren. Dazu fordern wir die gleichmäßige Beschränktheit der Übergangsraten, d.h.

$$-q_{ii} = \sum_{j\neq i} q_{ij} \leq C_1 < \infty \quad \text{für ein } C_1 \text{ und alle } i \in \mathbb{N}. \tag{5.2}$$

Das nächste Lemma bildet die Grundlage des anschließenden Resultats.

Lemma 5.1.2: *Sei* $-q_{ii} = \sum\limits_{j\neq i} q_{ij} \leq C_1 < \infty$ *für ein* C_1 *und alle* $i \in \mathbb{N}$ *. Dann gilt*

(i)

$$\lim_{t\to\infty} \left(P_i(X_t = j)\right)^{1/t} = e^{-\lambda_1} \tag{5.3}$$

für ein $\lambda_1 \in [\lambda_0, \infty)$ *und alle* $i, j \geq 1$.

(ii)

$$\lim_{t\to\infty} \frac{P_i(X_{t+s} = j)}{P_i(X_t = j)} = e^{-\lambda_1 s} \tag{5.4}$$

für dasselbe λ_1 *und alle* $i, j \geq 1$ *und* $s \geq 0$.

Darüber hinaus ist λ_1 *unabhängig von* i *und* j.

Beweis: (i) Wie üblich schreiben wir $p_{ij}(t) = P_i(X_t = j)$ für alle $i, j \in \mathcal{S}$ und $t \geq 0$. Wegen der Chapman-Kolmogorov-Gleichungen gilt $p_{ii}(s + t) \geq p_{ii}(s)p_{ii}(t)$ für alle $s, t > 0$.

Weil $p_{ii}(t) > 0$ gilt, ist die Funktion $\varphi(t)$, definiert durch

$$\varphi(t) = -\log p_{ii}(t),$$

eine endliche, nicht-negative, subadditive Funktion für $t > 0$. Aus Satz A.2.4 folgt, dass der Limes

$$\lambda_i = \lim_{t\to\infty} \varphi(t)/t = \inf_{t>0} \varphi(t)/t \tag{5.5}$$

existiert und $0 \leq \lambda_i < \infty$ gilt. Daraus ergibt sich $\varphi(t) \geq \lambda_i t$ und folglich gilt $p_{ii}(t) \leq e^{-\lambda_i t}$. Seien $a, b, t > 0$, dann gilt

$$p_{ij}(a)p_{jj}(t)p_{ji}(b) \leq p_{ii}(t+a+b) \leq e^{-\lambda_i(t+a+b)},$$

woraus $p_{jj}(t) \leq Ke^{-\lambda_i t}$ für ein $K > 0$ folgt. Daraus ergibt sich

$$-\frac{1}{t}\log p_{jj}(t) \leq \frac{1}{t}\log(K) - \lambda_i$$

und unter Beachtung von (5.5) schließlich $\lambda_j \geq \lambda_i$. Vertauscht man die Rollen von i und j zeigen analoge Rechnungen $\lambda_i \geq \lambda_j$, also die gewünschte Unabhängigkeit. Wir schreiben λ_1 für den Grenzwert. Für $a, t > 0$ gilt

$$p_{ij}(a+t) \geq p_{ij}(a)p_{ii}(t) \quad \text{und} \quad p_{jj}(a+t) \geq p_{ji}(a)p_{ij}(t),$$

woraus

$$\begin{aligned} & t^{-1}\log p_{ij}(a) + t^{-1}\log p_{jj}(t-a) && (5.6)\\ \leq\ & t^{-1}\log p_{ij}(t) \\ \leq\ & t^{-1}\log p_{jj}(a+t) - t^{-1}\log p_{ji}(a) && (5.7) \end{aligned}$$

für $t > a$ folgt. Die Ausdrücke in (5.6) und (5.6) haben jeweils Limes $-\lambda_1$ für $t \to \infty$. Daraus ergibt sich dann $t^{-1}\log p_{ij}(t) \to -\lambda_1$ und schließt den Beweis von (i) ab.

(ii) Für $h \geq 0$ und $kh \leq t \leq (k+1)h$ gilt:

$$\begin{aligned}
&P_i(X_{kh} = j)P_j(X_{t-kh} = j) \\
&\leq P_i(X_t = j) \\
&\leq P_i(X_{(k+1)h} = j)P_j(X_{(k+1)h-t} = j)^{-1}.
\end{aligned}$$

Außerdem gilt für alle u mit $0 \leq u \leq h$

$$1 \geq P_i(X_u = i) \geq P_i(X_v = i, \text{ für } 0 \leq v \leq h) \geq e^{-C_1 h}.$$

Für $h \to 0$ folgt somit $P_i(X_u = i) = 1$.
Mit Hilfe dieser Rechnungen folgt, dass es genügt

$$\lim_{k\to\infty} \frac{P_i(X_{h(k+l)} = j)}{P_i(X_{hk} = j)} = e^{-\lambda_1 lh} \tag{5.8}$$

für alle $i, j \geq 1, l \geq 1$ und $h > 0$ zu zeigen.
Dies ergibt sich, weil für $(l-1)h < s < (l+1)h$ einerseits

$$\begin{aligned}
&\frac{P_i(X_{t+s} = j)}{P_i(X_t = j)} \\
&\leq \frac{P_i(X_{h(k+l+1)} = j)P_j(X_{h(k+l+1)-(t+s)} = j)^{-1}}{P_i(X_t = j)} \\
&\leq \frac{P_i(X_{h(k+l+1)} = j)P_j(X_{h(k+l+1)-(t+s)} = j)^{-1}}{P_i(X_{hk} = j)P_j(X_{t-hk} = j)}
\end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned}
&\frac{P_i(X_{t+s} = j)}{P_i(X_t = j)} \\
&\geq \frac{P_i(X_{h(k+l)} = j)P_j(X_{h(k+l)-(t+s)} = j)}{P_i(X_t = j)} \\
&\geq \frac{P_i(X_{h(k+l)} = j)P_j(X_{h(k+l)-(t+s)} = j)}{P_i(X_{h(k+1)} = j)P_j(X_{t-h(k+1)} = j)^{-1}}
\end{aligned}$$

gilt. Damit folgt die Aussage (5.4) aus Lemma 5.1.4, das die Gültigkeit von (5.8) beweist.

Schließlich zeigen wir noch $\lambda_1 \in [\lambda_0, \infty)$. Für $\varepsilon > 0$ und genügend großes t folgt aus der Definition von λ_0

$$e^{-\lambda_1 t} \leq P_i(R > t) = \sum_{j \geq 1} P_i(X_t = j) \leq e^{-(\lambda_0 - \varepsilon)t}$$

und somit die Behauptung $\lambda_1 \geq \lambda_0$. □

Im Lemma benötigen wir folgende Bezeichnungen für diskrete Markov-Ketten.

Definition 5.1.3: Sei P eine Matrix gegeben durch $P = (p_{ij})_{i,j \in \mathcal{S}}$. Sie heißt *positiv*, wenn $p_{ij} > 0$ für alle $i, j \in \mathcal{S}$. P heißt *irreduzibel*, wenn für alle $i, j \in \mathcal{S}$ ein $n = n(i,j)$ existiert mit $P^n_{i,j} > 0$ und *aperiodisch*, wenn $\mathrm{ggT}(n \geq 1 : P^n_{ii} > 0) = 1$, wobei ggT den größten gemeinsamen Teiler bezeichnet. Eine Matrix P heißt *substochastisch*, wenn $\sum_{j \in \mathcal{S}} p_{i,j} \leq 1$ für alle $i \in \mathcal{S} \setminus \{0\}$.

Lemma 5.1.4: *Sei $P = (p_{i,j})_{i,j \in \mathcal{S}}$ eine substochastische, irreduzible Matrix. Es existieren Konstanten $\delta_1 > 0$ und $N < \infty$, und für jedes $i \in \mathcal{S}_0 = \{1, 2, \ldots\}$ existieren natürliche Zahlen $1 \leq k_1, \ldots k_r \leq N$ (mit $k_j = k_j(i)$ und $r = r(i)$), so dass $P^{k_s}(i,i) \geq \delta_1$ für $1 \leq s \leq r$ und $\mathrm{ggT}(k_1 \ldots, k_r) = 1$. Dann gilt für feste i, j*

$$\lim_{m \to \infty} \frac{P^{m+k}(i,j)}{P^m(i,j)} = e^{-\lambda_1 k},$$

für dasselbe λ_1 wie in (5.3).

Wir verzichten auf den langen Beweis für diskrete Markov-Ketten. Dieser findet sich in [Kes95], Seite 661ff. Die Forderung (5.2) wird für den Beweis dieses Lemmas benötigt und impliziert die im Lemma angegebenen Bedingungen. Durch diese wird eine gleichmäßige Aperiodizität für die diskrete Markov-Kette gegeben. Vergleiche dazu [Kes95], Seite 657.

Ziel des Abschnittes ist der Beweis des folgenden Satzes.

Satz 5.1.5: *Sei $X = (X_t)_{t \geq 0}$ mit $-q_{ii} = \sum_{j \neq i} q_{ij} \leq C_1 < \infty$ für ein C_1 und alle $i \in \mathbb{N}$ und es gelte (4.2). Dann gelten folgende Aussagen:*

(i) Sei $\mathcal{N} = (n_k)_{k \geq 1}$, $n_1 < n_2 < \ldots$, eine Folge ganzer Zahlen, so dass $\Phi^{n_k} \delta_i$ für ein $i \geq 1$ schwach gegen ein Wahrscheinlichkeitsmaß π_∞ auf $\{1, 2, \ldots\}$ konvergiert. Dann ist π_∞ eine minimale quasi-invariante Verteilung.

(ii) *Sei $\mathcal{T} = (t_k)_{k\geq 1}$ eine Folge reeller Zahlen mit $t_k \to \infty$ und π_∞ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\{1, 2, \ldots\}$. Für ein $i \geq 1$ gelte*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{P_i(X_{t_k} = j)}{P_i(R > t_k)} = \pi_\infty(j) \tag{5.9}$$

für $j \geq 1$. Dann ist π_∞ eine minimale quasi-invariante Verteilung.

Beweis: (i) Zuerst zeigen wir mit Induktion eine Darstellung von $\Phi^n\nu(j)$, gegeben durch

$$\begin{aligned}\Phi^n\nu(j) &= \prod_{k=0}^{n-1} (E_{\Phi^k\nu}R)^{-1} \int_0^\infty \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty P_\nu(X_{t_1+t_2+\ldots+t_n} = j)\ dt_n \ldots\ dt_2\ dt_1 \\ &= \prod_{k=0}^{n-1} (E_{\Phi^k\nu}R)^{-1} \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty t^{n-1} P_\nu(X_t = j)\ dt.\end{aligned} \tag{5.10}$$

Nach (2.14) gilt für ein Wahrscheinlichkeitsmaß ν auf $\{1, 2, \ldots\}$ und $j \geq 1$,

$$\Phi\nu(j) = \frac{1}{E_\nu R} \int_0^\infty \sum_{i\geq 1} \nu(i) P_i(X_t = j)\ dt = \frac{1}{E_\nu R} \int_0^\infty P_\nu(X_t = j)\ dt$$

womit der Induktionsanfang für $n = 1$ gezeigt ist. Sei also (5.10) für beliebiges n als Induktionsvoraussetzung angenommen.
Für den Induktionsschluss $(n-1) \to n$ zeigen wir:

$$\begin{aligned}&\Phi^n\nu(j) = \Phi\left(\Phi^{n-1}\nu(j)\right) \\ &\overset{(2.14)}{=} \frac{1}{E_{\Phi^{n-1}\nu}R} \int_0^\infty \sum_{i\geq 1} (\Phi^{n-1}\nu(i)) P_i(X_t = j)\ dt \\ &\overset{IV}{=} \frac{1}{E_{\Phi^{n-1}\nu}R} \int_0^\infty \sum_{i\geq 1} \left(\prod_{k=0}^{n-2} (E_{\Phi^k\nu}R)^{-1} \frac{1}{(n-2)!} \int_0^\infty s^{n-2} P_\nu(X_s = i)\ ds \right) P_i(X_t = j)\ dt \\ &= \prod_{k=0}^{n-1} (E_{\Phi^k\nu}R)^{-1} \int_0^\infty \sum_{i\geq 1} \left(\frac{1}{(n-2)!} \int_0^\infty s^{n-2} P_\nu(X_s = i)\ ds \right) P_i(X_t = j)\ dt\end{aligned}$$

$$= \prod_{k=0}^{n-1} \left(E_{\Phi^k \nu} R\right)^{-1} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{s^{n-2}}{(n-2)!} P_\nu(X_{s+t} = j)\ ds\ dt$$
$$= \prod_{k=0}^{n-1} \left(E_{\Phi^k \nu} R\right)^{-1} \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty z^{n-1} P_\nu(X_z = j)\ dz.$$

Damit ist (5.10) gezeigt und für festes $i \in \mathcal{S}$ die folgende Darstellung:

$$\Phi^n \delta_i(j) = c_n \int_0^\infty t^{n-1} P_i(X_t = j)\ dt \tag{5.11}$$

mit $c_n = \dfrac{1}{(n-1)!} \prod_{k=0}^{n-1} \left(E_{\Phi^k \nu} R\right)^{-1}$.

Um die Aussage in (i) zu zeigen, verifizieren wir

$$P_{\pi_\infty}(X_s = j) = e^{-\lambda_1 s} \pi_\infty(j). \tag{5.12}$$

Summation über $j \geq 1$ liefert dann

$$P_{\pi_\infty}(R > s) = \sum_{j \geq 1} P_{\pi_\infty}(X_s = j) = \sum_{j \geq 1} e^{-\lambda_1 s} \pi_\infty(j) = e^{-\lambda_1 s}. \tag{5.13}$$

Dabei wurde benutzt, dass π_∞ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist.
Damit gelangen wir dann zum gewünschten Ergebnis

$$\pi_\infty(j) = \frac{P_{\pi_\infty}(X_s = j)}{P_{\pi_\infty}(R > s)} = \frac{\sum_{i \geq 1} \pi_\infty(i) P_i(X_s = j)}{\sum_{i \geq 1} \pi_\infty(i) P_i(X_s \neq 0)}.$$

Die Minimalität ergibt sich aus (5.13), weil für alle i mit $\pi_\infty(i) > 0$ und $\varepsilon > 0$

$$\pi_\infty(i) E_i e^{(\lambda_1 - \varepsilon) R} \leq E_{\pi_\infty} e^{(\lambda_1 - \varepsilon) R} < \infty.$$

folgt, was $\lambda_0 \geq \lambda_1$ zeigt. In Lemma 5.1.2 wurde bereits $\lambda_1 \geq \lambda_0$ hergeleitet, so dass $\lambda_1 = \lambda_0$ gilt. Dies gewährleistet, dass π_∞ eine minimale quasi-invariante Verteilung ist.

Abschließend beweisen wir die Gültigkeit von (5.12). Dazu zeigen wir, dass in

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in\mathcal{N}}} c_n \int_0^\infty t^{n-1} P_i(X_{t+s} = j)\ dt \tag{5.14}$$

der Beitrag über das Intervall $[0, T]$ zu vernachlässigen ist. Dabei werden wir mit der Konvergenzgeschwindigkeit der Integrale argumentieren. Die daran anschließende Rechnung schließt den Beweis ab.
Zum einen gilt für festes $T > 0$

$$\int_0^T t^{n-1} P_i(X_t = j)\ dt \leq \int_0^T t^{n-1}\ dt \leq T^n/n. \tag{5.15}$$

Andererseits gilt für $0 < \varepsilon < \lambda_1/2$ und große n

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty t^{n-1} P_i(X_t = j)\ dt \\
&\geq \int_{n/(2e\lambda_1)}^\infty t^{n-1} e^{-(\lambda_1+\varepsilon)t}\ dt \\
&\geq \int_0^\infty t^{n-1} e^{-(\lambda_1+\varepsilon)t}\ dt - \int_0^{n/2e\lambda_1} t^{n-1} e^{-(\lambda_1+\varepsilon)t}\ dt \\
&\geq \int_0^\infty t^{n-1} e^{-(\lambda_1+\varepsilon)t}\ dt - \int_0^{n/2e\lambda_1} t^{n-1}\ dt \\
&= \frac{(n-1)!}{(\lambda_1+\varepsilon)^n} - \frac{n^{n-1}}{(2e\lambda_1)^n} \\
&= \frac{(n-1)!}{2(\lambda_1+\varepsilon)^n} + \frac{(n-1)!}{2(\lambda_1+\varepsilon)^n} - \frac{n^{n-1}}{(2e\lambda_1)^n} \\
&\geq \frac{(n-1)!}{2(\lambda_1+\varepsilon)^n}.
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Die letzte Ungleichung ergibt sich aus nachstehender Rechnung.

$$\begin{aligned}\frac{(n-1)!}{2(\lambda_1+\varepsilon)^n} - \frac{n^{n-1}}{(2e\lambda_1)^n} &\geq \frac{n!}{3n(\lambda_1+\varepsilon)^n} - \frac{3n^n}{3n(2\lambda_1)^n e^n} \\ &\geq \frac{1}{3n(2\lambda_1)^n}\left(n! - \frac{3n^n}{e^n}\right) \\ &\geq \frac{1}{3n(2\lambda_1)^n}\underbrace{\left(n! - \frac{3n^n}{3^n}\right)}_{\overset{(**)}{\geq} 0} \geq 0\end{aligned}$$

$(**)$ folgt aus der bekannten Relation $n! \geq 3\left(\frac{n}{3}\right)^n$.

Damit haben wir

$$\int_0^\infty t^{n-1} P_i(X_t = j)\; dt \geq \frac{(n-1)!}{2(\lambda_1+\varepsilon)^n}. \tag{5.17}$$

Anhand der Konvergenzgeschwindigkeit kann man nun schließen, dass das Integral über $[0,T]$ vernachlässigt werden kann: Das Integral in (5.15) hat eine Größenordnung von höchstens T^n, während das Integral in (5.17) schneller wächst als $\frac{(n-1)!}{2(\lambda_1+\varepsilon)^n}$. Damit ist der Beitrag des Integrals über $[0,T]$ für $n \to \infty$ gering.

Sei nun $\mathcal{N}$ eine Folge, wie in (i) gefordert, d.h $\Phi^n\delta_i \xrightarrow{w} \pi_\infty$ für $n \in \mathcal{N}$ und ein Wahrscheinlichkeitsmaß π_∞ auf $\{1,2,\ldots\}$. Dann gilt für $s \geq 0$ und $j \geq 1$

$$\begin{aligned}P_{\pi_\infty}(X_s = j) &= \sum_{z\geq 1} \pi_\infty(z) P_z(X_s = j) \\ &= \sum_{z\geq 1} \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in\mathcal{N}}} \Phi^n\delta_i(z) P_z(X_s = j) \\ &= \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in\mathcal{N}}} \sum_{z\geq 1} \Phi^n\delta_i(z) P_z(X_s = j) \\ &= \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in\mathcal{N}}} \sum_{z\geq 1} c_n \int_0^\infty t^{n-1} P_i(X_t = z) P_z(X_s = j)\; dt \\ &= \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in\mathcal{N}}} c_n \int_0^\infty t^{n-1} \overbrace{\sum_{z\geq 1} P_i(X_t = z) P_z(X_s = j)}^{P_i(X_{t+s}=j)}\; dt\end{aligned}$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in\mathcal{N}}} c_n \int_0^\infty t^{n-1} P_i(X_{t+s} = j)\ dt$$
$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in\mathcal{N}}} c_n \int_0^\infty t^{n-1} \frac{P_i(X_{t+s} = j)}{P_i(X_t = j)} P_i(X_t = j)\ dt.$$

Da, wie oben gezeigt, der Anteil des Integrals für festes T klein ist, folgt mit (5.4)

$$\begin{aligned} P_{\pi_\infty}(X_s = j) &= \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in\mathcal{N}}} c_n \int_0^\infty t^{n-1} \frac{P_i(X_{t+s} = j)}{P_i(X_t = j)} P_i(X_t = j)\ dt \\ &= \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in\mathcal{N}}} c_n \int_0^\infty t^{n-1} e^{-\lambda_1 s} P_i(X_t = j)\ dt \\ &= \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in\mathcal{N}}} e^{-\lambda_1 s} \overbrace{c_n \int_0^\infty t^{n-1} P_i(X_t = j)\ dt}^{\Phi^n \delta_i \to \pi_\infty(j)} = e^{-\lambda_1 s} \pi_\infty(j). \end{aligned} \tag{5.18}$$

Das zeigt die Gültigkeit von (5.12) und der Beweis von Teil (i) ist abgeschlossen. Um (ii) zu zeigen, also dass π_∞ unter (5.9) eine minimale quasi-stationäre Verteilung ist, betrachten wir folgende Rechnung.
Wir setzen $c_k := (P_i(R > t_k))^{-1} = \left(\sum_{z\geq 1} P_i(X_{t_k} = z)\right)^{-1}$. Damit gilt

$$\begin{aligned} P_{\pi_\infty}(X_s = j) &= \sum_{z\geq 1} \pi_\infty(z) P_z(X_s = j) \\ &= \sum_{z\geq 1} \lim_{k\to\infty} c_k P_z(X_s = j) \\ &\overset{A.2.1}{=} \lim_{k\to\infty} \sum_{z\geq 1} c_k P_z(X_s = j) \\ &= \lim_{k\to\infty} c_k P_i(X_{t_k+s} = j) \\ &= e^{-\lambda_1 s} \lim_{t\to\infty} c_k P_i(X_{t_k} = j) = e^{-\lambda_1 s} \pi_\infty(j). \end{aligned} \tag{5.19}$$

Dabei nutzen wir einen Satz von Scheffé, der die Vertauschung von Summation und Limes ermöglicht (vgl. Satz A.2.1 im Anhang der Arbeit).

Damit folgt, dass π_∞ eine minimale quasi-stationäre Verteilung ist, weil sich aus (5.19) und Summation über $j \geq 1$ die Identität

$$P_{\pi_\infty}(R > s) = e^{-\lambda_1 s}$$

und schließlich

$$\pi_\infty(j) = \frac{P_{\pi_\infty}(X_s = j)}{P_{\pi_\infty}(R > s)}$$

ergibt. $\lambda_1 = \lambda_0$ ergibt sich wie im Beweis von Teil (i).

□

Zum Abschluß dieser Betrachtungen geben wir ein Korollar an, das ein Kriterium für die Gleichheit von λ_0 und λ_1 und somit für die Existenz einer minimalen quasi-invarianten Verteilung liefert.

Korollar 5.1.6: *Sei* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *ein Markov-Prozess zur Q-Matrix* $\mathbf{Q}$ *mit* (4.1),(4.2) *und* $-q_{ii} = \sum\limits_{j\neq i} q_{ij} \leq C_1 < \infty$ *für ein* C_1 *und alle* $i \in \mathbb{N}$ *. Dann gilt* $\lambda_0 = \lambda_1$*.*

Beweis: Unter den gemachten Voraussetzungen existiert nach Satz 4.2.2 ein Wahrscheinlichkeitsmaß π_∞ und eine Folge $\mathcal{N}$ in $\mathbb{N}$, so dass $\Phi^n \delta_i \overset{w}{\to} \pi_\infty$ für $n \to \infty, n \in \mathcal{N}$. Für dieses π_∞ gilt $P_{\pi_\infty}(R > t) = e^{-\lambda_0 t}$. Satz 5.1.5 zeigt, dass dieses π_∞ auch $P_{\pi_\infty}(R > t) = e^{-\lambda_1 t}$ erfüllt. Damit folgt sofort, dass $\lambda_1 = \lambda_0$ erfüllt ist. □

5.2 Minimale quasi-invariante Verteilungen für Geburts- und Todesprozesse

Nachdem wir im vorhergehenden Abschnitt einen Satz zur Existenz minimaler quasi-stationärer Verteilungen im allgemeinen Fall bewiesen haben, werden wir nun den Spezialfall der Geburts- und Todesprozesse betrachten. Für diese kann man unter Annahme gleichmäßiger Beschränktheit der Übergangsraten zeigen, dass minimale quasi-invariante Verteilungen existieren. Darüber hinaus kann man eine Eindeutigkeitsaussage treffen.

Von nun an sei $X = (X_t)_{t\geq 0}$ ein Geburts- und Todesprozess. Zusätzlich nehmen wir an, dass die Übergangsraten gleichmäßig beschränkt sind, also ein $C > 0$ existiert, so dass

$$-q_{ii} < C \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}. \tag{5.20}$$

Daraus folgt mit Satz 1.2.9, dass die Q-Matrix $\mathbf{Q}$ regulär ist. Da $\mathbf{Q}$ für einen Geburts- und Todesprozess konservativ ist, gelten die Rückwärts-Differentialgleichungen, also

$$\frac{d}{dt} p_{i,j}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} q_{ik} p_{kj}(t).$$

Die gleichmäßige Beschränktheit impliziert außerdem, dass (4.1) erfüllt ist.
Seien darüber hinaus alle Zustände $i \neq 0$ verbunden, d.h.

$$q_{i,i+1} > 0 \text{ und } q_{i,i-1} > 0, \text{ für alle } i > 0 \tag{5.21}$$

und gelte weiter $E_i e^{\lambda R} < \infty$ für ein $\lambda > 0$. Dann folgt unter Benutzung von Satz 4.3.1 die Existenz einer quasi-invarianten Verteilung.
Als Vorbereitung des angekündigten Eindeutigkeitsresultats beweisen wir das folgende Lemma.

Lemma 5.2.1: *Sei $X = (X)_{t\geq 0}$ ein Geburts- und Todesprozess mit* (5.20) *und* (5.21) *und ν ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\{1, 2, \ldots\}$. Dann ist die Funktion $\nu \mapsto F^\nu$ injektiv.*

Beweis: Aus der gleichmäßigen Beschränktheit der Übergangsraten folgt mit den (RDGL)

$$\frac{d^n}{dt^n} p_{ij}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} q_{ik}^{(n)} p_{kj}(t),$$

wobei $q_{ik}^{(n)}$ den ij-ten Eintrag der Matrix $\mathbf{Q}^n$ bezeichne. Damit ergibt sich

$$\left.\frac{d^n}{dt^n} p_{i0}(t)\right|_{t=0} = q_{i0}^{(n)} = \sum_{k_1,k_2,\ldots,k_{n-2}} q_{ik_1} q_{k_1k_2} \ldots q_{k_{n-2}1} q_{10}.$$

Im Fall von Geburts- und Todesprozessen erhält man damit

$$\left.\frac{d^n}{dt^n} p_{i0}(t)\right|_{t=0} = q_{i0}^{(n)} = q_{n(n-1)} q_{(n-1)(n-2)} \ldots q_{10} \tag{5.22}$$

und

$$\left.\frac{d^n}{dt^n} p_{i0}(t)\right|_{t=0} = 0 \tag{5.23}$$

für $k > n$.

Da wir Geburts- und Todesprozesse betrachten kann $q_{ij} > 0$ nur für endlich viele $i \in \mathcal{S}$ gelten. Dies zusammen mit der gleichmäßigen Beschränktheit der Übergangsraten impliziert, dass die n-te Ableitung $\frac{d^n}{dt^n} F^\nu(t)$ existiert. Diese ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dt^n} F^\nu(t) =& \frac{d^n}{dt^n} \sum_{k=0}^{\infty} \nu(k) p_{k0}(t)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \nu(k) \frac{d^n}{dt^n} p_{k0}(t).\end{aligned}$$

Aus (5.22) und (5.23) folgt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \nu(k) \left.\frac{d^n}{dt^n} p_{k0}(t)\right|_{t=0} = \sum_{k=0}^{n} \nu(k) \left.\frac{d^n}{dt^n} p_{k0}(t)\right|_{t=0}.$$

Nutzt man an dieser Stelle

$$\frac{d^k}{dt^k} p_{k0}(t) = q_{k(k-1)} \ldots q_{10} > 0 \quad \text{für } k = 1, \ldots, n$$

folgt, dass $\nu(n)$ eine lineare Funktion von $\left.\frac{d^k}{dt^k}F^\nu(t)\right|_{t=0}$ für $k = 1, \ldots, n$ ist. Daraus folgt die Injektivität der Abbildung. $\square$

Mit dem Lemma ist es möglich, die folgende Aussage für Geburts- und Todesprozesse mit gleichmäßig beschränkten Übergangsraten zu beweisen.

Korollar 5.2.2: *Ein Wahrscheinlichkeitsmaß π auf $\{1, 2, \ldots\}$ ist genau dann eine quasi-invariante Verteilung für einen Geburts- und Todesprozess mit* (5.20) *und* (5.21)*, wenn die Absorptionszeit R eine Exponentialverteilung F^π besitzt. Für jedes θ existiert höchstens eine quasi-invariante Verteilung π mit $E_\pi R = \theta$.*

Beweis: Im Beweis von Satz 4.3.1 haben wir gezeigt, dass F^π für eine quasi-invariante Verteilung π exponentialverteilt ist.
Umgekehrt sei F^π exponentialverteilt mit $\theta = E_\pi R$. Dann gilt nach vorherigen Lemma, dass $\mathcal{M}_\theta$ aus einem einzelnen Wahrscheinlichkeitsmaß π bestehen muss. Mit Satz 4.2.4, der die Existenz eines Fixpunktes zeigt, folgt schließlich, dass π ein Fixpunkt von Φ und damit eine quasi-invariante Verteilung ist. $\square$

Der folgende Satz zeigt, dass eine eindeutige minimale quasi-invariante Verteilung existiert.

Satz 5.2.3: *Für einen Geburts- und Todesprozess $X = (X_t)_{t \geq 0}$ mit* (5.20), (5.21) *und $E_i e^{\lambda R} < \infty$ für ein $\lambda > 0$ existiert $\pi_\infty = \lim_{n\to\infty} \Phi^n \delta_i$ $n \in \mathbb{N}$. Dieses π_∞ ist die eindeutige (minimale) quasi-invariante Verteilung.*

Beweis: Analog zu den Berechnungen im Beweis von Satz 4.2.2 zeigt man, dass $(\Phi^n \delta_i)_{n\in\mathbb{N}}$ straff ist. Für jede Teilfolge $\mathcal{N}'$ von $\mathbb{N}$ existiert nach Satz A.2.5 der Limes $\lim_{n\to\infty} \Phi^{n_l}\delta_i, n \in \mathcal{N}'$. Nach Satz 5.1.5 gilt, dass der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \Phi^{n_l}\delta_i = \pi_\infty$ eine minimale quasi-invariante Verteilung ist. Für jede minimale quasi-invariante Verteilung, muss nach Definition gelten, dass die Absorptionszeit eine $\mathrm{Exp}(1/\lambda_0)$-Verteilung besitzt. Lemma 5.2.1 impliziert, dass die Limiten aller Teilfolgen von $\lim_{n\to\infty} \Phi^n \delta_i$, $n \in \mathbb{N}$ übereinstimmen müssen. Damit ist die Eindeutigkeit gezeigt. Insbesondere existiert dann $\lim_{n\to\infty} \Phi^n \delta_i$, $n \in \mathbb{N}$. $\square$

A Anhang

Im Anhang geben wir zunächst die Beweise aus Kapitel 2.1 an. Im zweiten Teil geben wir Resultate an, die in der Arbeit benutzt werden, aber nicht sinnvoll im Text integriert werden können.

A.1 Beweise der Sätze aus Kapitel 2.1

Dieser Abschnitt dient dazu, die Beweise der Sätze aus Abschnitt 2.1 anzugeben, soweit dies dort nicht geschehen ist. Der Lesbarkeit halber führen wir die Resultate erneut an.

Satz A.1.1 (Satz 2.1.5)**:** *Gegeben eine beliebige Q-Funktion* $(\mathbf{P}(t))_{t\geq 0}$ *ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung* π *auf* $\mathcal{C}$ *genau dann eine quasi-invariante Verteilung auf* $\mathcal{C}$ *für* $\mathbf{P}$*, wenn* π *ein* β*-invariantes Maß auf* $\mathcal{C}$ *für* $\mathbf{P}$ *ist für ein* $\beta > 0$.

Beweis: Sei $\beta > 0$ und π ein β-invariantes Maß auf $\mathcal{C}$ für $\mathbf{P}$.
Definiere $p(\cdot) = (p_j(\cdot))_{j\in\mathcal{C}}$ durch

$$p_j(t) = \sum_{i\in\mathcal{C}} \pi_i p_{ij}(t), \quad j \in \mathcal{S}, t \geq 0.$$

Wegen der β-Invarianz von π gilt $p_j(t) = \exp(-\beta t)\pi_j$. Da π eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathcal{C}$ ist, folgt

$$\sum_{j\in\mathcal{C}} p_j(t) = \sum_{j\in\mathcal{C}} \exp(-\beta t)\pi_j = \exp(-\beta t).$$

Kombiniert man dieses, erhält man

$$\pi_j = \frac{p_j(t)}{\exp(-\beta t)} = \frac{p_j(t)}{\sum\limits_{j \in \mathcal{C}} p_j(t)}.$$

Das zeigt, dass π quasi-invariant ist.

Sei π umgekehrt eine quasi-invariante Verteilung auf $\mathcal{C}$ für $\mathbf{P}$.
Dann gilt $p_j(t) = g(t)\pi_j$ mit $g(t) = \sum_{j \in \mathcal{C}} p_j(t)$. Das ist nach Definition äquivalent zu

$$\sum_{i \in \mathcal{C}} \pi_i p_{ij}(t) = g(t)\pi_j, \quad j \in \mathcal{C}, t > 0.$$

Wir zeigen $g(t) = \exp(-\beta t)$ für ein $\beta > 0$. Mit den Chapman-Kolmogorov-Gleichungen folgt nach Multiplikation mit π_i, Summation über $i \in \mathcal{C}$ und der Tatsache, dass 0 ein absorbierender Zustand ist,

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathcal{C}} \pi_i p_{ij}(s+t) &= \sum_{i \in \mathcal{C}} \pi_i \sum_{k \in \mathcal{C}} p_{ik}(s) p_{kj}(t) \\ \Leftrightarrow p_j(s+t) &= \sum_{k \in \mathcal{C}} p_k(s) p_{kj}(t), \end{aligned}$$

für alle $j \in \mathcal{C}$ und $s, t \geq 0$. Setzt man den Ausdruck $p_j(t) = g(t)\pi_j$ für $p(\cdot)$ ein, erhält man

$$g(t+s)\pi_j = \sum_{k \in \mathcal{C}} g(t)\pi_k p_{kj}(t) = g(t) p_j(t).$$

Summiert man über $j \in \mathcal{C}$ zeigt dies, dass g die Gleichung $g(t+s) = g(s)g(t)$ für $s, t \geq 0$ erfüllt.
Es muss $0 < g(t) \leq 1$ gelten, weil $p_j(t) \geq \pi_j p_{jj}(t) > 0$ und

$$g(t) = \sum_{j \in \mathcal{C}} \sum_{i \in \mathcal{C}} \pi_i p_{ij}(t) = \sum_{i \in \mathcal{C}} \pi_i \sum_{j \in \mathcal{C}} p_{ij}(t) \leq 1$$

gilt. Daraus folgt, dass $g(t) = \exp(-\beta t)$ für ein $\beta \geq 0$. Da $p_{i0}(t) > 0$ für alle $t > 0$ für mindestens ein $i \in \mathcal{C}$ gelten muss, folgt $g(t) < 1$ für alle $t > 0$ und damit ist der Fall $\beta = 0$ ausgeschlossen. $\square$

Satz A.1.2 (Satz 2.1.6)**:** *Sei π ein β-subinvariantes Maß auf $\mathcal{C}$ für $\mathbf{P}$ für $\beta > 0$. Dann ist π ein β-subinvariantes Maß auf $\mathcal{C}$ für $\mathbf{Q}$.*
Ist π β-invariant auf $\mathcal{C}$ für $\mathbf{P}$, so ist π genau dann ein β-invariantes Maß auf $\mathcal{C}$ für $\mathbf{Q}$, wenn $\mathbf{P}$ die Vorwärts-Differentialgleichungen (VDGL) *für $i, j \in \mathcal{C}$ erfüllt.*

Beweis: Sei π ein β-invariantes Maß auf $\mathcal{C}$ für $\mathbf{P}$ und $(\mathbf{P}^*(t))_{t\geq 0}$ definiert durch

$$p^*_{ij}(t) := e^{\beta t}\frac{\pi_j p_{ji}(t)}{\pi_i} \quad \text{für } i, j \in \mathcal{C},\ t \geq 0.$$

Dann ist $\mathbf{P}^*$ eine Standard-Matrixübergangsfunktion auf $\mathcal{C}$ mit einer stabilen Q-Matrix $\mathbf{Q}^*$, gegeben durch

$$q^*_{ij} = \frac{\pi_j q_{ji}}{\pi_i} + \beta\delta_{ij} \quad \text{für alle } i, j \in \mathcal{C},$$

die genau dann konservativ ist, wenn π β-invariant auf $\mathcal{C}$ für $\mathbf{Q}$ ist. Aus der β-Invarianz auf $\mathcal{C}$ für $\mathbf{P}$ folgt direkt, dass $\mathbf{P}^*$ stochastisch ist, denn in diesem Fall gilt

$$\sum_{j\in\mathcal{C}} p^*_{ij}(t) = (e^{-\beta t}\pi_i)^{-1} \sum_{j\in\mathcal{C}} \pi_j p_{ji}(t) = 1.$$

Außerdem gilt, dass $\mathbf{P}$ genau dann die (VDGL) erfüllt, wenn $\mathbf{P}^*$ die RDGL für $i, j \in \mathcal{C}$ erfüllt (vgl. dazu [PVJ92], Seite 533).

Sei also π β-invariant für $\mathbf{Q}$ ist, dann ist $\mathbf{Q}^*$ konservativ und somit erfüllt $\mathbf{P}^*$ die (RDGL). Nach obigen Überlegungen erfüllt $\mathbf{P}$ dann die (VDGL) für $i, j \in \mathcal{C}$. Gelte umgekehrt, dass $\mathbf{P}$ die (VDGL) für alle $i, j \in \mathcal{C}$ erfüllt. Dann erfüllt $\mathbf{P}^*$ die (RDGL) und weil $\mathbf{P}^*$ stochastisch ist, folgt dass $\mathbf{Q}^*$ konservativ ist (vgl. Satz 1.4.1). Somit ist π ein β-invariantes Maß auf $\mathcal{C}$ für $\mathbf{Q}$. □

Satz A.1.3 (Satz 2.1.9)**:** *Sei $(\mathbf{P}(t))_{t\geq 0}$ eine Q-Funktion und π ein β-invariantes Maß auf $\mathcal{C}$ für $\mathbf{P}$ für ein $\beta > 0$ mit $\sum\limits_{i\in\mathcal{C}} \pi_i < \infty$. Dann gilt*

$$\beta \geq \frac{\sum\limits_{i\in\mathcal{C}} \pi_i q_{i0}}{\sum\limits_{i\in\mathcal{C}} \pi_i a_i^{\mathbf{P}}}. \tag{A.1}$$

Beweis: Wir nutzen die Vorwärts-Differentialungleichung $p'_{i0}(t) \geq \sum\limits_{k \in \mathcal{S}} p_{ik}(t) q_{k0}$ für $i \in \mathcal{C}$. Integriert man diese, so folgt

$$p_{i0}(t) \geq \sum_{k \in \mathcal{C}} \int_0^t p_{ik}(s) q_{k0} ds, \quad i \in \mathcal{C}.$$

Multiplikation mit π_i und Summation über $i \in \mathcal{C}$ liefert, dass $\sum_{k \in \mathcal{C}} \pi_k q_{k0}$ konvergiert, weil π als β-invariantes Maß auf $\mathcal{C}$ für $\mathbf{P}$ mit $\sum\limits_{i \in \mathcal{C}} \pi_i < \infty$ vorausgesetzt wurde. Außerdem gilt für alle $t \geq 0$,

$$\sum_{i \in \mathcal{C}} \pi_i p_{i0}(t) \geq \frac{1}{\beta}(1 - \exp(-\beta t)) \sum_{k \in \mathcal{C}} \pi_k q_{k0}. \tag{A.2}$$

Weil π β-invariant auf $\mathcal{C}$ für $\mathbf{P}$ ist, gilt

$$\sum_{i \in \mathcal{C}} \pi_i \sum_{j \in \mathcal{C}} p_{ij}(t) = \exp(-\beta t) \sum_{i \in \mathcal{C}} \pi_i, \quad t \geq 0.$$

Für eine substochastische Funktion $e^{\mathbf{P}}(\cdot) = (e_i^{\mathbf{P}}(\cdot), i \in \mathcal{S})$, definiert durch $e_i^{\mathbf{P}}(t) = 1 - \sum\limits_{j \in \mathcal{S}} p_{ij}(t), t \geq 0$, folgt

$$\sum_{i \in \mathcal{C}} \pi_i p_{i0}(t) = (1 - \exp(-\beta t)) \sum_{i \in \mathcal{C}} \pi_i - \sum_{i \in \mathcal{C}} \pi_i e_i^{\mathbf{P}}(t), \quad t \geq 0. \tag{A.3}$$

Zusammen mit (A.2) haben wir

$$\frac{1}{\beta}(1 - \exp(-\beta t)) \left(\beta \sum_{i \in \mathcal{C}} \pi_i - \sum_{i \in \mathcal{C}} \pi_i q_{i0} \right) \geq \sum_{i \in \mathcal{C}} \pi_i e_i^{\mathbf{P}}(t).$$

Daraus folgt für $t \to \infty$ mit majorisierter Konvergenz

$$\beta \sum_{i \in \mathcal{C}} \pi_i \geq \sum_{i \in \mathcal{C}} \pi_i q_{i0} + \beta \sum_{i \in \mathcal{C}} \pi_i e_i^{\mathbf{P}},$$

wobei $e_i^{\mathbf{P}} = \lim_{t \to \infty} e_i^{\mathbf{P}}(t)$. Da $e_i^{\mathbf{P}} = 1 - h_i^{\mathbf{P}}$ ist und nach Lemma 2.1.8 $h_i^{\mathbf{P}} = a_i^{\mathbf{P}}$, für alle $i \in \mathcal{C}$ gilt, folgt

$$\beta \sum_{i \in \mathcal{C}} \pi_i a_i^{\mathbf{P}} \geq \sum_{i \in \mathcal{C}} \pi_i q_{i0}.$$

Weil $q_{i0} > 0$ für mindestens ein $i \in \mathcal{C}$ erfüllt ist, gilt $\sum\limits_{i\in\mathcal{C}} \pi_i q_{i0} > 0$ und damit $\beta \geq \frac{\sum\limits_{i\in\mathcal{C}} \pi_i q_{i0}}{\sum\limits_{i\in\mathcal{C}} \pi_i a_i^{\mathbf{P}}}$. Daraus ergibt sich (A.1). $\square$

Satz A.1.4 (Satz 2.1.10)**:** *Sei $(\mathbf{P}(t))_{t\geq 0}$ eine Q-Funktion zur Q-Matrix $\mathbf{Q}$, die die Vorwärts-Differentialgleichung* (VDGL) *für $i, j \in \mathcal{C}$ erfüllt. Sei π für ein $\beta > 0$ ein β-subinvariantes Maß auf $\mathcal{C}$ für P. Dann gilt*

$$\beta \sum_{i\in\mathcal{C}} \pi_i a_i^{\mathbf{P}} \leq \sum_{i\in\mathcal{C}} \pi_i q_{i0}. \tag{A.4}$$

Ist $(\mathbf{P}(t))_{t\geq 0}$ außerdem stochastisch, gilt

$$\beta \leq \frac{\sum\limits_{i\in\mathcal{C}} \pi_i q_{i0}}{\sum\limits_{i\in\mathcal{C}} \pi_i}. \tag{A.5}$$

Beweis: Da $(\mathbf{P}(t))_{t\geq 0}$ die Vorwärts-DGL erfüllt, gilt

$$p_{i0}(t) = \sum_{k\in\mathcal{C}} \int_0^t p_{ik}(s) q_{k0}\, ds, \quad i \in \mathcal{C}.$$

Multipliziert man dieses mit π_i und summiert über $i \in \mathcal{C}$ erhält man, wegen der β-Invarianz von π

$$\sum_{i\in\mathcal{C}} \pi_i p_{i0}(t) \leq \frac{1}{\beta}(1 - \exp(-\beta t)) \sum_{k\in\mathcal{C}} \pi_k q_{k0}$$

für alle $t \geq 0$. Aus

$$\sum_{i\in\mathcal{C}} \pi_i \sum_{j\in\mathcal{C}} p_{ij}(t) \leq \exp(-\beta t) \sum_{i\in\mathcal{C}} \pi_i, \quad t \geq 0,$$

folgt außerdem

$$\sum_{i\in\mathcal{C}} \pi_i p_{i0}(t) \geq (1 - \exp(-\beta t)) \sum_{i\in\mathcal{C}} \pi_i - \sum_{i\in\mathcal{C}} \pi_i e_i^{\mathbf{P}}(t), \quad t \geq 0.$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{\beta}(1-\exp(-\beta t))\left(\beta\sum_{i\in\mathcal{C}}\pi_i-\sum_{i\in\mathcal{C}}\pi_i q_{i0}\right)\leq\sum_{i\in\mathcal{C}}\pi_i e_i^{\mathbf{P}}(t)$$

und für $t\to\infty$ schließlich

$$\beta\sum_{i\in\mathcal{C}}\pi_i\leq\sum_{i\in\mathcal{C}}\pi_i q_{i0}+\beta\sum_{i\in\mathcal{C}}\pi_i e_q^{\mathbf{P}}(t).$$

Dies ist äquivalent zu

$$\beta\sum_{i\in\mathcal{C}}\pi_i h_i^{\mathbf{P}}\leq\sum_{i\in\mathcal{C}}\pi_i q_{i0}.$$

Mit Lemma 2.1.8 folgt dann $\beta\sum_{i\in\mathcal{C}}\pi_i a_i^{\mathbf{P}}\leq\sum_{i\in\mathcal{C}}\pi_i q_{i0}$, also (A.4). Wenn $(\mathbf{P}(t))_{t\geq 0}$ stochastisch ist, dann ist $h_i^{\mathbf{P}}=1$ und somit (A.5) erfüllt. □

Satz A.1.5 (Satz 2.1.13)**:** *Sei $F(\cdot)=(f_{ij}(\cdot))_{i,j\in\mathcal{S}}$ die minimale Q-Funktion und π ein β-subinvariantes Maß auf $\mathcal{C}$ für $\mathbf{Q}$ für ein $\beta>0$, dass $\sum_{i\in\mathcal{C}}\pi_i<\infty$ erfüllt. Genau dann ist π ein β-invariantes Maß auf $\mathcal{C}$ für F, wenn*

$$\beta\sum_{i\in\mathcal{C}}\pi_i a_i^F=\sum_{i\in\mathcal{C}}m_i q_{i0}. \tag{A.6}$$

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, dann ist π β-invariant auf $\mathcal{C}$ für $\mathbf{Q}$.

Beweis: Es gilt, dass F die Vorwärts-Differentialgleichungen für $i,j\in\mathcal{C}$ erfüllt. Mit Korollar 2.1.11 folgt unmittelbar, dass (A.6) erfüllt sein muss.
Sei umgekehrt (A.6) erfüllt. Wir zeigen nun, dass π ein β-invariantes Maß auf $\mathcal{C}$ für F ist.
Sei $\mathbf{Q}^*=(q_{ij}^*)_{i,j\in\mathcal{C}}$, die zum zeitinvertierten Prozess gehörende Q-Matrix , wobei

$$q_{ij}^*:=\frac{\pi_k(q_{jk^*}+\beta\delta_{jk})}{\pi_j}\quad j,k\in\mathcal{C}.$$

$F^*=(f_{ij}^*)_{i,j\in\mathcal{S}}$ bezeichne die minimale $\mathbf{Q}^*$-Funktion.
Dann gilt $\pi_i f_{ij}(t)=\exp(-\beta t)\pi_j f_{ji}^*(t)$ für $i,j\in\mathcal{C}$ (vgl. Lemma 3.3 aus [Pol88]). Summation über i zeigt, dass π ein β-subinvariantes Maß für F ist. Dieses ist genau dann β-invariant, wenn F^* stochastisch ist. Der Beweis ist abgeschlossen,

wenn man nachgewiesen hat, dass F^* stochastisch ist. Um dieses zu zeigen, wird auf Laplace-Transformierte zurückgegriffen. Für die ausführlichen Rechnungen verweisen wir an dieser Stelle auf [NP93], Seite 91f. Die letzte Behauptung folgt aus Proposition 2 aus der Arbeit [Twe74] von Tweedie . □

A.2 Weitere Hilfsresultate

Satz A.2.1: *Sei* $(f_n)_{n\geq 1}$ *eine Folge von Dichten von absolutstetigen Verteilungsfunktionen mit* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *für fast alle* $x \in \mathbb{R}$. *Sei* $f(x)$ *ebenfalls eine Dichte. Dann gilt* $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\mathcal{B}} f_n(x)\ dx = \int_{\mathcal{B}} p(x)$ *für alle Borelmengen* $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}$.

Beweis: Siehe [Sch47], Seite 435f. □

Satz A.2.2: *Für einen metrischen Raum* (M, d) *sind äquivalent:*

(i) M *ist kompakt.*

(ii) Jede Folge in M *hat eine konvergente Teilfolge („*M *ist folgenkompakt“).*

Beweis: Siehe [Wer07], Satz B.1.7 auf Seite 503f. □

Satz A.2.3: *Sei* $f : T_1 \to T_2$ *eine Abbildung zwischen metrischen Räumen. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:*

(i) f *ist stetig bei* t_0.

(ii) $t_n \to t_0 \Rightarrow f(t_n) \to f(t_0)$ *für alle Folgen* (t_n).

Beweis: Siehe [Wer07], Satz B.1.3 auf Seite 501. □

Satz A.2.4: *Sei f(t) eine subadditive Funktion, die endlich ist auf* (a, ∞), $a \geq 0$. *Dann gilt*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t} = \inf_{t>a} \frac{f(t)}{t} < \infty.$$

Beweis: Siehe [HP57], Theorem 7.6.1 auf Seite 244. □

Satz A.2.5: *Sei* (π_n) *eine straffe Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf* $\mathbb{N}$, *dann besitzt jede Folge in* (π_n) *eine schwach konvergente Teilfolge.*

Beweis: Siehe [Bil68], Theorem 6.1 auf Seite 37. □

Literaturverzeichnis

[Als91] Alsmeyer, G.: *Erneuerungstheorie.* Stuttgart : Teubner, 1991

[Als05] Alsmeyer, G.: *Stochastische Prozesse.* 3. Auflage. Münster : Universität Münster, 2005. – Skripten zur Mathematischen Statistik Nr.33

[And91] Anderson, W. J.: *Continuous-Time Markov Thains: An Applications-Orientes Approach.* New York : Springer, 1991

[Asm03] Asmussen, S.: *Applied probability and queues.* 2. Auflage. New York : Springer, 2003

[Bil68] Billingsley, P.: *Convergence of probability measures.* New York-London-Sydney-Toronto: John Wiley and Sons, Inc. XII,, 1968

[Cau01] Cauty, R.: Solution to the Schauder fixed point problem. (Solution du problème de point fixe de Schauder.). In: *Fundam. Math.* 170 (2001), Nr. 3, S. 231–246

[Cav78] Cavender, J. A.: Quasi-stationary distributions of birth-and-death processes. In: *Adv. Appl. Probab.* 10 (1978), S. 570–586

[Chu74] Chung, K. L.: *A Course in Probability Theory.* 2. Auflage. New York : Academic Press, 1974

[FKMP95] Ferrari, P.A. ; Kesten, H. ; Martínez, S. ; Picco, P.: Existence of quasi-stationary distributions: A renewal dynamical approach. In: *Ann. Probab.* 23 (1995), Nr. 2, S. 501–521

[FMP92] Ferrari, P. A. ; Martínez, S. ; Picco, P.: Existence of non-trivial quasi-stationary distributions in the birth- death chain. In: *Adv. Appl. Probab.* 24 (1992), Nr. 4, S. 795–813

[HP57] Hille, E. ; Phillips, R. S.: *Functional analysis and semigroups. Rev. ed.* Colloquium Publications. 31. Providence, R. I. American Mathematical Society (AMS). XII, 808 p., 1957

[HS69] Harkness, W.L. ; Shantaram, R.: Convergence of a sequence of transformations of distribution functions. In: *Pacific J. Math.* 31 (1969), S. 403–415

[Kes95] Kesten, H: A ratio limit theorem for (sub) Markov chains on $\{1, 2, \cdots\}$ with bounded jumps. In: *Adv. Appl. Probab.* 27 (1995), S. 652–691

[Nev75] Neveu, J.: *Discrete-parameter martingales. Translated by T. P. Speed.* North-Holland Mathematical Library. Vol. 10. Amsterdam - Oxford: North-Holland Publishing Company; New York: American Elsevier Publishing Company, Inc. VIII, 1975

[NP93] Nair, M. G. ; Pollet, P. K.: On the relationship between μ-invariant measures and quasi-stationary distributions for continuous-time Markov chains. In: *Adv. in Appl. Probab.* 25 (1993), S. 82–102

[Pak93] Pakes, A. G.: Absorbing Markov and branching processes with instantaneous resurrection. In: *Stochastic Processes Appl.* 48 (1993), S. 85–106

[Pol88] Pollett, P.K.: Reversibility, invariance and μ-invariance. In: *Adv. Appl. Probab.* 20 (1988), Nr. 3, S. 600–621

[Pol08] Pollett, P.K.: Quasi-stationary Distributions: A Bibliography. (2008). – http:// www.maths.uq.edu.au/~pkp/papers/qsds/qsds.pdf, Letztes Update: 30th March 2008

[PVJ92] Pollett, P.K. ; Vere Jones, D.: A note on evanescent processes. In: *Aust. J. Stat.* 34 (1992), Nr. 3, S. 531–536

[Sch47] Scheffé, H.: A useful convergence theorem for probability distributions. In: *Ann. Math. Statist.* 18 (1947), S. 434–438

[Twe74] Tweedie, R.L.: Some ergodic properties of the Feller minimal process. In: *Quart. J. Math. Oxford* 25 (1974), S. 485–495

[van91] van Doorn, E. A.: Quasi-stationary distributions and convergence to quasi-stationarity of birth-death processes. In: *Adv. Appl. Probab.* 23 (1991), Nr. 4, S. 683–700

[VJ69] Vere-Jones, D.: Some limit theorems for evanescent processes. In: *Aust. J. Stat.* 11 (1969), S. 67–78

[vS95] van Doorn, E. A. ; Schrijner, P.: Geometric ergodicity and quasi-stationarity in discrete-time birth-death processes. In: *J. Aust. Math. Soc., Ser. B* 37 (1995), Nr. 2, S. 121–144

[Wer07] Werner, D.: *Funktionalanalysis.* 6. Auflage. Berlin : Springer, 2007

Hiermit versichere ich, dass ich diese Diplomarbeit selbständig verfasst und keine anderen als die aufgeführten Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Münster, den 18. Dezember 2008

Sebastian Brüninghoff