Universität Münster
Institut für
Mathematische Statistik

Markovprozesse und
interagierende Teilchensysteme
SS 2010, Blatt 1
Gantert/Bartsch

Übungen
Abgabetermin: Dienstag, 27.04.2010, 10 Uhr, BK 47

Aufgabe 1 (4 Punkte)
S sei ein endlicher Zustandsraum und $\mathsf{P} = \big(\mathsf{p}(x,y)\big)_{x,y\in S}$ eine stochastische Matrix. Die Einträge der k-ten Potenz von P bezeichnen wir mit $\mathsf{p}^k(x,y)$. Ferner sei

$$p_t(x,y) := e^{-t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\, \mathsf{p}^k(x,y) \quad \text{für } x,y \in S.$$

Zeigen Sie, dass $\big(p_t(x,y)\big)_{x,y\in S}$ eine Übergangsfunktion definiert.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Gegeben seien $\beta, \delta > 0$. $(X_t)_{t\geq 0}$ sei die Markovkette mit Zustandsraum $S = \{0,1\}$, die in jedem Zustand unabhängige exponentialverteilte Wartezeiten verbringt, bevor sie in den anderen Zustand wechselt. Die Wartezeiten im Zustand 0 seien dabei $\mathrm{Exp}(\beta)$-verteilt und die Wartezeiten im Zustand 1 seien dabei $\mathrm{Exp}(\delta)$-verteilt. Für $x, y \in S$ sei $p_t(x,y) := \mathbb{P}_x[X_t = y]$.

(i) Zeigen Sie, dass

$$p_t(0,1) = \int_0^t \beta e^{-\beta s} p_{t-s}(1,1)\, ds$$

für alle $t \geq 0$ gilt.

(ii) Verifizieren Sie mit Hilfe von (i), dass die Übergangsfunktion zu $(X_t)_{t\geq 0}$ gegeben ist durch

$$p_t(0,0) = \frac{\delta}{\beta+\delta} + \frac{\beta}{\beta+\delta}\, e^{-t(\beta+\delta)}, \qquad p_t(0,1) = \frac{\beta}{\beta+\delta}\left[1 - e^{-t(\beta+\delta)}\right],$$
$$p_t(1,1) = \frac{\beta}{\beta+\delta} + \frac{\delta}{\beta+\delta}\, e^{-t(\beta+\delta)}, \qquad p_t(1,0) = \frac{\delta}{\beta+\delta}\left[1 - e^{-t(\beta+\delta)}\right].$$

(iii) Zeigen Sie, dass mit

$$Q := \begin{pmatrix} -\beta & \beta \\ \delta & -\delta \end{pmatrix}$$

und $p_t(\cdot,\cdot)$ wie in (ii) für alle $x, y \in S$ die Beziehung

$$q(x,y) = \frac{d}{dt}\, p_t(x,y)\Big|_{t=0}$$

erfüllt ist.

Bitte wenden!

(iv) Zeigen Sie, dass für $\beta, \delta < 1$ die Beschreibung aus Beispiel 1.5 aus der Vorlesung äquivalent ist zu der obigen.
Zeigen Sie zunächst: Seien $G, \tau_1, \tau_2, \ldots$ *unabhängige Zufallsvariablen mit* $G \sim \mathrm{Geom}(p)$ *und* $\tau_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ *für alle* $i \in \mathbb{N}$, *dann gilt*

$$\sum_{k=1}^{G} \tau_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda \cdot p).$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)
S sei ein endlicher Zustandsraum und $Q = \big(q(x,y)\big)_{x,y \in S}$ eine Q-Matrix. Zeigen Sie, dass

$$P_t := e^{tQ} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k Q^k}{k!}$$

für alle $t \geq 0$ eine stochastische Matrix definiert.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Betrachten Sie die lineare Geburtskette mit Zustandsraum $S = \{0, 1, \ldots\}$ und Q-Matrix $Q = \big(q(k,l)\big)_{k,l \in S}$ wobei

$$q(k,l) := \begin{cases} \rho k & \text{für } l = k+1 \\ -\rho k & \text{für } l = k \end{cases}$$

für ein $\rho > 0$ und für alle $k, l \in S$ gelte.
Berechnen Sie $p_t(k, k+1)$.