Übungen
Abgabetermin: Dienstag, 13.07.2010, 10 Uhr, BK 47

Aufgabe 40 (4 Punkte)
Wir betrachten das Wählermodell auf $S := \{0,1\}^V$ mit Übergangshalbgruppe $(T_t)_{t\geq 0}$. Die zugehörige Q-Matrix sei die der symmetrischen Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ wie in Aufgabe 39. Geben Sie ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf S an, für das μT_t für $t \to \infty$ nicht schwach konvergiert. Stellen Sie den Zusammenhang mit Aufgabe 30 her.

Aufgabe 41 (4 Punkte)
Sei Q eine Q-Matrix auf einer abzählbaren Menge V, so dass $\sup_{x\in V}\sum_{u\in V:u\neq x} q(x,u) < \infty$ gilt und die zugehörige Markov-Kette $(X(t))_{t\geq 0}$ irreduzibel ist. Wir betrachten wieder das Wählermodell auf $S := \{0,1\}^V$ zu der Q-Matrix Q. Zeigen Sie die folgende Aussage: Falls μ ein invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß für das Wählermodell ist, so ist die Funktion

$$h : V \longrightarrow [0,1],\ h(x) := \mu(\{\eta \in S : \eta(x) = 1\})$$

harmonisch für die Markov-Kette $(X(t))_{t\geq 0}$.

Aufgabe 42 (4 Punkte)
Wir betrachten wieder das Wählermodell auf $S := \{0,1\}^V$ mit $V := \mathbb{Z}$. Die zugehörige Q-Matrix sei gegeben durch:

$$\begin{aligned}
q(x,x+1) &= \begin{cases} 2 & \text{für } x > 0, \\ 1 & \text{für } x < 0. \end{cases} \\
q(x,x-1) &= \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0, \\ 2 & \text{für } x < 0. \end{cases} \\
q(0,1) &= q(0,-1) = 1, \\
q(x,y) &= 0 \text{ falls } |x-y| > 1.
\end{aligned}$$

(i) Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Limiten für $\mu \in \mathcal{I}$ existieren:

$$\lim_{x\to-\infty} \mu(\{\eta \in S : \eta(x) = 1\}), \qquad \lim_{x\to+\infty} \mu(\{\eta \in S : \eta(x) = 1\}).$$

(ii) Zeigen Sie, dass $|\mathcal{I}_e| = 4$ gilt.