Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

Das Vasicek–Modell

Ein Short–Rate–Modell zur Beschreibung von Rentenmärkten

Daniel Schlotmann

20. Juli 2010

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In diesem Vortrag wollen wir einige Betrachtungen am Rentenmarkt vornehmen. Wir werden eines der grundlegenden Modelle zur Beschreibung von Rentenmärkten kennen lernen. Dazu werden wir wichtige Definitionen und Annahmen treffen, um schließlich das Vasicek–Modell betrachten zu können. Dieses stochastische Zinsmodell wurde 1977 von Oldrich Vasicek veröffentlicht und ist eines der ersten Short–Rate–Modelle.

Wir werden sehen, dass man mit diesem Modell gut umgehen kann, das heißt es lassen sich geschlossene Formeln für die Short–Rate selbst und auch für die Bewertung angeben. Gleichzeitig werden wir aber auch Schwächen des Modells aufdecken.

1 Der Rentenmarkt

Der Rentenmarkt ist neben dem Aktienmarkt Teil des organisierten Kapitalmarkts. Es werden festverzinsliche Wertpapiere gehandelt, die ein Forderungsrecht beinhalten. Im Vergleich zum Aktienmarkt erwirbt der Käufer also nicht einen Anteil am Unternehmen, sondern gewährt dem Emittenten einen Kredit. Die Verzinsung und die Laufzeit sind bei der Ausgabe schon festgelegt.

Wichtig für die folgenden Betrachtungen sind die Nullkupon–Anleihen (Zero–Coupon–Bonds). Es handelt sich um Anleihen ohne laufende Kuponzahlungen. Dies bedeutet, dass sie keine laufende Verzinsung haben und sich die Auszahlung auf den festen Geldbetrag (normiert etwa 1,- €) zu einem zukünftigen Zeitpunkt T beschränkt. Der Gewinn stellt sich somit für den Anleger lediglich als Differenz von Anfangswert der Nullkupon-Anleihe und Auszahlung am Ende dar.

Am Markt gibt es nicht nur einen einheitlichen Zinssatz, sondern Zinssätze in Abhängigkeit z.B. von der Bonität des Schuldners, also der Kreditwürdigkeit und vor allem von der Laufzeit. Deshalb betrachtet man so genannte Zinsstrukturen.

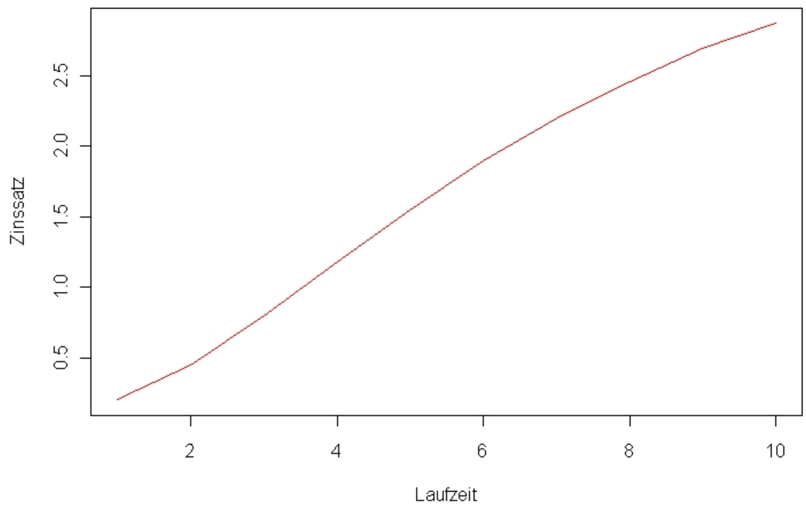
Wird der Zinssatz in Abhängigkeit von der Bonität des Schuldners betrachtet, so kann man eine Bonitätseinstufung des Schuldners durchführen. Gibt man N Bonitätsklassen vor mit $1 \mathrel{\widehat{=}}$ ausgezeichnete Bonität (z.B. Klasse AAA) $\ldots$ $N-1 \mathrel{\widehat{=}}$ schlechte Bonität (z.B. Klasse CCC) und $N \mathrel{\widehat{=}}$ Default-Klasse, dann ist der Zinssatz umso höher, je schlechter die Ratingeinstufung des Schuldners ist.

Betrachtet man den Zinssatz in Abhängigkeit von der Anlagedauer, so erhält man üblicherweise eine steigende (normale) Zinsstrukturkurve. Dies bedeutet, dass ein Anleger für eine kürzere Anlagezeit einen niedrigeren Zinssatz bekommt, als für eine längere Anlagezeit. Hierzu betrachten wir das folgende Beispiel:

(1.1) Beispiel: Im Folgenden ist die Zinsstrukturkurve in Abhängigkeit von der Anlagedauer vom 14. Juni 2010 mit dem Programm R dargestellt. Die Daten stammen von der Deutschen Bundesbank und sind Zinssätze für (hypothetische) Null-Kupon-Anleihen ohne Kreditausfallrisiko.

Laufzeit in Jahren	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Zinssatz in % p.a.	0.20	0.45	0.80	1.18	1.55	1.90	2.20	2.46	2.69	2.87

Tabelle 1: Zinssätze 14. Juni 2010



Der zugehörige R-Code lautet:

```
Zinssatz <- c(0.20,0.45,0.80,1.18,1.55,1.90,2.20,2.46,2.69,2.87)
Laufzeit <- c(1:10)
plot(Laufzeit, Zinssatz, type="l",col="red")
```

Am 14. Juni 2010 lag eine normale Zinsstrukturkurve vor, da die Kurve streng monoton wachsend ist. Dies bedeutet, dass der Zinssatz umso größer ist, je länger die Anlage läuft.

An dieser Stelle sei allerdings bemerkt, dass auch inverse Zinskurven zu verzeichnen sind. Anfang der 90er Jahre lag z.B. eine inverse Zinsstrukturkurve vor. Es gab für kurzfristige Anlagen höhere Zinssätze, als für längerfristige. Schließlich gibt es auch noch flache Zinskurven, bei denen der Zinssatz in Bezug zur Laufzeit annähernd konstant ist.

Ziel:

Unser Ziel ist es Zinsderivate bewerten zu können. Zinsderivate sind Derivate am Rentenmarkt, deren Underlying ein Zins ist. Dazu wollen wir mit dem No–Arbitrage–Prinzip (beim Handel mit Finanzgütern gibt es keinen risikolosen Profit) ein Derivat durch Rückführung auf Nullkupon–Anleihen bewerten. Hierzu müssen wir die Zinsstruktur beschreiben. Dies ist jedoch aufwändiger, als bei einer Aktienbewertung, da es wie zuvor beschrieben nicht nur einen Zinssatz gibt, sondern viele Zinssätze, die zeitgleich simuliert werden müssen. Des Weiteren wird der Zinssatz selbst nicht gehandelt, sondern nur Derivate, die den Zins als Grundlage haben. Hierzu gibt es nun mehrere Ansatzpunkte:

- ***Die Short–Rate–Modelle***
  Modellierung eines Zeitpunktes der Zinsstruktur. Die Short–Rate ist der Zinssatz auf einem infinitesimal kleinen Zeitintervall. Sie wird mit Hilfe von stochastischen Differentialgleichungen modelliert. Ein Ansatz stammt von Oldrich Vasicek, den wir im Folgenden näher kennen lernen werden.

- ***Die Forward–Rate–Modelle***
  Bei diesem Ansatz wird mit den so genannten Forward–Rates (Terminzinssätzen) die gesamte Zinsstruktur modelliert. Dies ist also eine Verallgemeinerung der Short–Rate–Modelle, da die Forward–Rates zukünftige Short–Rates darstellen. Allerdings sind auch hier die Forward–Rates nicht am Markt zu beobachtende Größen.

- ***Die Markt–Modelle***
  Verwendet man Markt–Modelle, so legt man Zinssätze wie z.B. den LIBOR (London Interbank Offered Rate) zu Grunde, die am Markt beobachtbar sind. Der LIBOR–Zinssatz wird täglich in London um 11h Ortszeit von 12 Banken der British Bankers‘ Association festgelegt und stellt einen Interbankenzins dar, zu dem Banken Geld aufnehmen bzw. selbst anbieten.

Die Bewertungsgleichungen, die man in den Markt–Modellen erhält, sind ähnlich gut zu handhaben wie z.B. die Black–Scholes–Formel. Deswegen sind die Markt–Modelle in der Praxis weit verbreitet.

2 Einführung Short–Rate–Modelle

Im zweiten Teil werden wir nun zu Beginn einige grundlegende Definitionen und Zusammenhänge ausführen, die wir im Folgenden für das Verständnis des Vasicek–Modells benötigen.

2.1 Grundlagen

Zunächst werden wir festlegen in welchem wahrscheinlichkeitstheoretischen Rahmen wir uns bei der Betrachtung von Short–Rate–Modellen bewegen. Wir werden anschließend das Rentenmarktmodell und die Short–Rate allgemein definieren. Außerdem werden wir das Geldmarktkonto, die risikoneutrale Bewertungsformel und Ornstein–Uhlenbeck–Prozesse einführen.

2.1.1 Wahrscheinlichkeitstheoretischer Rahmen

(2.1) Definition: (W'Raum, Filtration)

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ der zu Grunde liegende Wahrscheinlichkeitsraum und $(\mathcal{F})_{t\geq 0}$ eine Filtration, so dass $(W_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung bzgl. $(\mathcal{F})_{t\geq 0}$ ist. Die Filtration erfülle zudem die 'usual conditions', d.h.

(i) $(\mathcal{F})_{t\geq 0}$ ist rechtsseitig stetig, also $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+} = \bigcap_{\epsilon>0} \mathcal{F}_{t+\epsilon}$

(ii) $\mathcal{F}_0$ enthält alle P–Nullmengen und alle Teilmengen von P–Nullmengen

$(\mathcal{F})_{t\geq 0}$ stellt hier wie üblich den Informationsverlauf dar, so dass $\mathcal{F}_t$ den Informationsstand zum Zeitpunkt t beschreibt.

Nun wollen wir uns aber beschränken auf einen endlichen Zeithorizont. Dazu fixieren wir ein T^* mit $T^* < \infty$. Außerdem sei im Folgenden $0 \leq t \leq T \leq T^*$ mit $T > 0$. Nun können wir das Rentenmarktmodell mit einem endlichen Zeithorizont T^* definieren.

(2.2) Definition: (Rentenmarktmodell)

Das Rentenmarktmodell mit endlichem Zeithorizont T^* ist gegeben durch:

- $T^* \in [0, \infty)$, welches der letzte Fälligkeitszeitpunkt im Modell ist
- $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T^*}$ Filtration, welche die 'usual conditions' erfülle
- $p(t,T)_{t \in [0,T]}$ mit $T \in [0, T^*]$ als adaptierte reellwertige stochastische Prozesse, welche die Preisentwicklungen der NKAs mit Fälligkeit in T beschreiben.

Um nun die Short–Rate definieren zu können, stellen wir einige Überlegungen an:

Im Black–Scholes–Modell haben wir eine feste Zinsrate r vorausgesetzt. Dort wäre die Preisentwicklung der NKAs mit Fälligkeit in T gegeben durch $p(t,T) = e^{-r(T-t)}$. Da wir aber an den zufälligen Schwankungen der Zinsen interessiert sind, wollen wir diese in Abhängigkeit von der Zeit darstellen.

Gegeben seien Zeitpunkte t, T_1, T_2 mit $0 \leq t \leq T_1 < T_2 \leq T^*$. Es sei ρ die in t festgelegte Zinsrate. Man betrachte nun die folgenden 2 Zahlungsströme:

	Zeitpunkt t	*Zeitpunkt T_1*	*Zeitpunkt T_2*
(1)	*lege Betrag 1 von T_1 bis T_2 fest*		
Zahlungsstrom	0	-1	$e^{\rho(T_2-T_1)}$
(2)	*Short Selling T_1-Bond* *Kaufe* $\frac{p(t,T_1)}{p(t,T_2)}$ $p(t,T_2)-$*Bonds*		
Zahlungsstrom	$1 \cdot p(t,T_1) - (\frac{p(t,T_1)}{p(t,T_2)}) \cdot p(t,T_2) = 0$	-1	$\frac{p(t,T_1)}{p(t,T_2)}$

Nach dem No–Arbitrage–Prinzip müssen die Zahlungen in T_2 übereinstimmen:

$$\begin{aligned}
e^{\rho(T_2-T_1)} &= \frac{p(t,T_1)}{p(t,T_2)} && \Big| logarithmieren \\
\Leftrightarrow \rho(T_2 - T_1) &= \log(p(t,T_1)) - \log(p(t,T_2)) && \Big| umformen, da\ T_2 - T_1 > 0 \\
\Leftrightarrow \qquad \rho &= \frac{\log(p(t,T_1)) - \log(p(t,T_2))}{T_2 - T_1}
\end{aligned}$$

Wir schreiben hier nun den Zinssatz ρ in Abhängigkeit von t, T_1, T_2:

$$\rho(t, T_1, T_2) = -\frac{\log(p(t,T_2)) - \log(p(t,T_1))}{T_2 - T_1}$$

Diese Darstellung gibt uns im Zeitpunkt t die sogenannte ***Forward–Rendite*** für das Zeitintervall $[T_1, T_2]$.

Die ***Rendite eines*** T_1***–Bonds*** (NKA mit Fälligkeit in T_1) in t ist dann wegen $\log(p(t,t) = \log(1) = 0$ gegeben durch:

$$\rho(t, T_1) := \rho(t, t, T_1) = -\frac{\log(p(t, T_1))}{T_1 - t}$$

Wenn wir nun annehmen, dass der Preisprozess $p(t, T)$ differenzierbar ist (nach T), so können wir auch die zukünftige augenblickliche und die augenblickliche Zinsrate definieren, indem wir das jeweilige Zeitintervall beliebig klein werden lassen:

Die ***Forward–Rate*** stellt einen augenblicklichen in der Zukunft zum Zeitpunkt T_1 liegenden Zinssatz dar, welcher definiert ist durch:

$$f(t, T_1) := \lim_{T_2 \to T_1} \rho(t, T_1, T_2) = -\frac{\partial \log(p(t, T_1))}{\partial T_1}$$

Ähnlich zu der Forward–Rate erhalten wir nun die ***Short–Rate*** als Zinssatz auf einem infinitesimal kleinen Zeitintervall. Anschaulich wird hier die Nullkupon–Anleihe im nächsten Moment fällig:

$$r(t) := f(t, t) = \lim_{T_1 \to t} \rho(t, T_1)$$

Nun haben wir die Forward–Rate und die Short–Rate definiert, von denen viele Zinsstrukturmodelle ausgehen. Das Vasicek–Modell ist ein Short–Rate–Modell und hat wie oben bereits erwähnt die Short–Rate als Grundlage zur Betrachtung von Veränderungen der Zinsstrukturkurve im Zeitverlauf.

Die Short–Rate ist ein stochastischer Prozess, da sie über die Preisentwicklung der NKA definiert wird. Wir wollen noch einige Forderungen an die Short–Rate stellen. Genauer fordern wir, dass $(r(t))_{0 \leq t \leq T^*}$ stetige Pfade hat und zusätzlich der Markov–Eigenschaft genügt. Diese Eigenschaften benötigen wir, um sicher zu gehen, dass die Short–Rate keine Sprünge aufweist und nicht von der vergangenen Entwicklung abhängt, also der zukünftige Short–Rate–Wert nur von dem Heutigen abhängt.

2.1.2 Das Geldmarktkonto

In diesem Abschnitt wollen wir das Geldmarktkonto, bezeichnet mit $\beta(t)$, einführen. Es soll den Preisprozess der risikolosen Anlage auf Basis der Short–Rate $r(t)$ darstellen. Weiter soll es möglich sein zu jedem beliebigen Zeitpunkt $t \geq 0$ Geld zum Zins $r(t)$ anzulegen oder abzuheben. Es bezeichnet $\beta(t)$ den Betrag in t unter stetiger Verzinsung mit der Short–Rate bei Anlage von 1 im Zeitpunkt 0.

Das Geldmarktkonto hat die Darstellung:

$$\beta(t) = exp\left(\int_0^t r(s)ds\right)$$

Da $r(t)$ aufgrund der Markov–Eigenschaft adaptiert ist, ist auch $\beta(t)$ ein an $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T^*}$ adaptierter stochastischer Prozess. Im Folgenden wird uns $\beta(t)$ als stochastischer Diskontfaktor dienen.

Die obige Darstellung von $\beta(t)$ erhalten wir als Lösung der folgenden stochastischen Differentialgleichung mit Anfangsbedingung $\beta(0) = 1$:

$$d\beta(t) = r(t)\beta(t)dt$$

Da wir uns in einem zeitstetigen Modell befinden, wird die Änderung von $\beta(t)$ in der Zeit in Form einer Differentialgleichung angegeben. Mit stochastischen Differentialgleichungen möchte man in einer Gleichung die Beziehung des aktuellen Wertes des stochastischen Prozesses zum zukünftigen Verlauf darstellen. Den zukünftigen Verlauf kann man sich als Ableitung vorstellen. Schreiten wir in der Zeit voran, so wird $\beta(t)$ mit der zugehörigen Short–Rate $r(t)$ verzinst.

2.1.3 Die risikoneutrale Bewertungsformel

Bevor wir nun zur allgemeinen risikoneutralen Bewertungsformel für Nullkupon–Anleihen kommen, wollen wir zunächst noch die Annahme treffen, dass es zu unserem (realen) Maß P ein äquivalentes Martingalmaß P^* gibt, das heißt wir wollen eine Arbitragemöglichkeit ausschließen. Hierbei definieren wir:

(2.3) Definition: (Äquivalentes Martingalmaß)

Ein Wahrscheinlichkeitsmaß P^* auf $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ heißt äquivalentes Martingalmaß falls

(i) $P^* \sim P$ auf $\mathcal{F}_T$

(ii) $\left(\frac{p(t,T)}{\beta(t)}\right)_{0 \leq t \leq T}$ ist ein P^*–Martingal

also mit der Eigenschaft, dass P^* äquivalent ist und der abdiskontierte Preis einer Nullkupon–Anleihe für jede Fälligkeit $T \geq 0$ ein Martingal ist unter P^*.

Wir folgen nun einem üblichen Ansatz, der als „Martingale Modelling“ bezeichnet wird. Hierbei setzen wir die Existenz eines risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaßes voraus und modellieren nicht bzgl. des real vorliegenden Wahrscheinlichkeitsmaßes P, sondern bzgl. unseres risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaßes P^*.

Wie wir auch schon bei der Bewertung von Aktienoptionen in der Vorlesung Finanzmathematik gesehen haben, ist eine Modellierung der Basisinstrumente erforderlich. Im Black–Scholes Modell konnte man in der Aktie und im Bankkonto handeln. Wir konnten so Optionen durch ein geeignetes Portfolio bestehend aus Aktie und risikoloser Anlage bzw. Kredit im Bankkonto mit Zinssatz r duplizieren. Um aber nun eine Option auf NKAs bewerten zu können müssten wir die NKAs hedgen. Für eine duplizierende Handelsstrategie einer NKA gibt es aber kein anderes zu Grunde liegendes Finanzgut. Wir müssen folglich NKAs mit verschiedenen Fälligkeiten gegenseitig hedgen.

Wir wollen also die NKAs besser verstehen und zunächst eine allgemeine risikoneutrale Bewertungsformel für NKAs kennen lernen. Es sei an dieser Stelle schon vorweggenommen, dass wir diese Formel im Vasicek–Modell als geschlossene Fromel angeben können.

(2.4) Satz: (Die risikoneutrale Bewertungsformel)

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ Wahrscheinlichkeitsraum und P^* ein äquivalentes Martingalmaß. Für den Preis einer Nullkupon–Anleihe mit Fälligkeit in T gilt:

$$p(t,T) = \mathbb{E}^* \left[exp\left(- \int_t^T r(s) ds \right) \;\middle|\; \mathcal{F}_t \right]$$

Beweis:

Nach der Annahme oben gilt, dass $\left(\frac{p(t,T)}{\beta(t)}\right)_{0\leq t\leq T}$ ein P^*–Martingal ist.
Da weiter $p(T,T)=1$ gilt, folgt für $0\leq t\leq T$:

$$\frac{p(t,T)}{\beta(t)} = \mathbb{E}^*\left[\frac{p(T,T)}{\beta(T)} \;\Big|\; \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}^*\left[\frac{1}{\beta(T)} \;\Big|\; \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}^*\left[exp\left(-\int_0^T r(s)ds\right) \;\Big|\; \mathcal{F}_t\right]$$

Da das Geldmarktkonto $\beta(t)$ adaptiert ist an $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T^*}$ folgt:

$$p(t,T) = \mathbb{E}^*\left[exp\left(\int_0^t r(s)ds - \int_0^T r(s)ds\right) \;\Big|\; \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}^*\left[exp\left(-\int_t^T r(s)ds\right) \;\Big|\; \mathcal{F}_t\right]$$

und somit die Behauptung.

□

2.1.4 Was ist ein Ornstein–Uhlenbeck–Prozess?

Ähnlich zur Übung der Vorlesung Finanzmathematik II können wir den Ornstein–Uhlenbeck–Prozess (hier etwas allgemeiner) als Lösung der Differentialgleichung

$$dX_t = \alpha(\mu - X_t)dt + \sigma dW_t$$

mit der Anfangsbedingung $X(0)=x_0$ bestimmen. Die Lösung lautet:

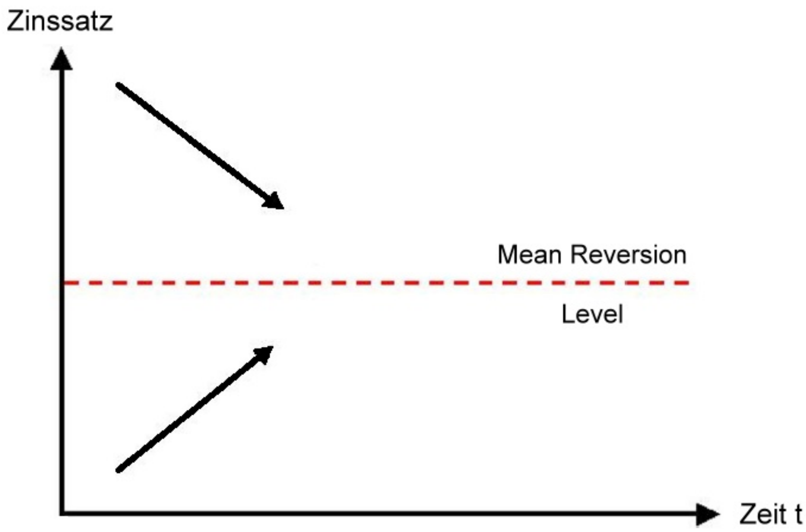
$$X_t = e^{-\alpha t}x_0 + \mu(1-e^{-\alpha t}) + \sigma e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha s}dW_s$$

X_t wird als Ornstein–Uhlenbeck–Prozess mit Anfangswert x_0, mean reversion level μ, mean reversion rate α und Diffusion σ (Zufalls–Einfluss durch die Brownsche Bewegung) bezeichnet. Hinweis: Wäre die Diffusion 0, so wäre die zufällige Störung der Anziehung an μ ausgeschaltet und der Prozess würde exponentiell gegen das mean reversion level konvergieren.

Nun haben wir alle Vorbereitungen getroffen, um im nächsten Abschnitt das Vasicek–Modell betrachten zu können.

2.2 Das Vasicek-Modell

Kommen wir nun also zu dem Short–Rate–Modell von Oldrich Vasicek, das im Jahr 1977 im Journal of Financial Economics veröffentlicht wurde. Es handelt sich um ein so genanntes Ein–Faktor–Modell. Das heißt, dass dem Modell in der Differentialgleichung, die die Short–Rate beschreibt ein eindimensionaler Wiener Prozess zu Grunde liegt. Das Besondere an dem Modell, dass Vasicek veröffentlichte war, dass er die Short–Rate in Form eines Ornstein–Uhlenbeck–Prozesses modellierte und die Short–Rate somit die Mean–Reversion–Eigenschaft hatte. Dies bedeutet, dass die Short–Rate von dem Mean–Reversion–Level immer wieder angezogen wird.



In diesem Kapitel wollen wir also nun zunächst die Darstellung der Short–Rate genauer untersuchen und auch eine explizite Darstellung, sowie die Verteilung der Short–Rate angeben. Außerdem wollen wir eine Bewertungsgleichung für Nullkupon–Anleihen angeben. Damit wollen wir dann schließlich eine Calloption auf eine Nullkupon–Anleihe bewerten.

2.2.1 Die Short–Rate

Der Short–Rate–Prozess im Vasicek–Modell ist Lösung der Differentialgleichung:

$$dr(t) = \kappa(\theta - r(t))dt + \sigma d\overline{W_t}$$

mit Anfangsbedingung $r(0) = r_0$ wobei $\left(\overline{W_t}\right)_{0 \leq t \leq T^*}$ ein Wiener Prozess bzgl. des äquivalenten Martingalmaßes P^* ist. Das Modell für die Short–Rate wird also sofort unter dem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß P^* spezifiziert (Martingale Modelling). Dieses erhält man aus dem Marktpreis des Risikos, der eine Verbindung zwischen W_t und $\overline{W_t}$ herstellt. Hierauf wollen wir an dieser Stelle aber nicht näher eingehen. Für die drei Parameter gilt κ, θ, $\sigma > 0$. Hierbei steht κ für die Mean Reversion Rate, θ für das Mean Reversion Level und σ für die Diffusion. Befindet sich der Short–Rate–Prozess zu einem Zeitpunkt t über dem langfristigen Mittel θ, so ist der Driftterm negativ (Anziehung von oben gegen das Mean Reversion Level). Befindet er sich darunter, so ist der Driftterm entsprechend positiv. Das κ beeinflusst die Geschwindigkeit der Rückkehr zum Mean Reversion Level. Schließlich gibt das σ den Zufalls-Einfluss durch den Wiener Prozess an.

(2.5) Satz: (Darstellung der Short–Rate)
Für die Short–Rate in t gilt:

$$r(t) = e^{-\kappa t} r(0) + (1 - e^{-\kappa t})\theta + \sigma \int_0^t e^{-\kappa(t-s)} d\overline{W_s}$$

Beweis:
Der Beweis der Aussage ist klar, denn r(t) ist die Lösung der oben genannten stochastischen Differentialgleichung und diese hat als Lösung den Ornstein–Uhlenbeck–Prozess. (vergl. Abschnitt 2.1.4) □

Nun können wir uns fragen, welche Verteilung die Short–Rate hat. Denn wenn wir die Verteilung kennen, dann können wir mit der Bewertungsformel Derivate bewerten.

(2.6) Satz: (Verteilung der Short–Rate)
Die Short–Rate $r(t)$ ist normalverteilt bezüglich des risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaßes P^*, genauer gilt:

$$r(t) \sim \mathcal{N}\left(e^{-\kappa t} r(0) + (1 - e^{-\kappa t})\theta \;, \quad \sigma^2 \left(\frac{1 - e^{2\kappa t}}{2\kappa}\right)\right)$$

Beweis:

Der Satz (2.6) liefert uns die Darstellung der Short–Rate als $r(t) = e^{-\kappa t}r(0) + (1 - e^{-\kappa t})\theta + \sigma \int_0^t e^{-\kappa(t-s)} d\overline{W_s}$, wobei $\left(\overline{W_t}\right)_{0\leq t\leq T^*}$ ein Wiener Prozess bzgl. des risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaßes P^* ist.

Mit dieser Darstellung wissen wir aber sogleich, dass $r(t)$ normalverteilt ist, da der letzte Summand $\int_0^t \sigma e^{-\kappa(t-s)} d\overline{W_s}$ ein Itô-Integral über eine deterministische Funktion ist mit $\int_0^t \left(\sigma e^{-\kappa(t-s)}\right)^2 ds < \infty$ für alle $t \geq 0$, vgl. Übg. Blatt 8 Finanzmathematik II.

Wir müssen nun noch den Erwartungswert und die Varianz von $r(t)$ bestimmen, um die Behauptung zu zeigen:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^*\Big[r(t)\Big] &= \mathbb{E}^*\left[e^{-\kappa t}r(0) + (1-e^{-\kappa t})\theta + \sigma \int_0^t e^{-\kappa(t-s)} d\overline{W_s}\right] \\
&= \mathbb{E}^*\left[e^{-\kappa t}r(0)\right] + \mathbb{E}^*\left[(1-e^{-\kappa t})\theta\right] + \sigma\, \underbrace{\mathbb{E}^*\left[\int_0^t e^{-\kappa(t-s)} d\overline{W_s}\right]}_{\substack{=0 \\ \text{da Martingal}}} \\
&= e^{-\kappa t}r(0) + (1-e^{-\kappa t})\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{Var}^*\Big[r(t)\Big] &= \mathbf{Var}^*\left[e^{-\kappa t}r(0) + (1-e^{-\kappa t})\theta + \sigma \int_0^t e^{-\kappa(t-s)} d\overline{W_s}\right] \\
&= \underbrace{\mathbf{Var}^*\left[e^{-\kappa t}r(0)\right]}_{=0} + \underbrace{\mathbf{Var}^*\left[(1-e^{-\kappa t})\theta\right]}_{=0} + \sigma^2 \mathbf{Var}^*\left[\int_0^t e^{-\kappa(t-s)} d\overline{W_s}\right] \\
&= \sigma^2\left(\mathbb{E}^*\left[\left(\int_0^t e^{-\kappa(t-s)} d\overline{W_s}\right)^2\right] - \underbrace{\mathbb{E}^*\left[\int_0^t e^{-\kappa(t-s)} d\overline{W_s}\right]^2}_{\substack{=0 \\ \text{da Martingal}}}\right) \\
&= \sigma^2\ \mathbb{E}^*\left[\left(\int_0^t e^{-\kappa(t-s)} d\overline{W_s}\right)^2\right] \\
&\overset{(*)}{=} \sigma^2 \int_0^t \left(e^{-\kappa(t-s)}\right)^2 ds \\
&= \sigma^2 \left[\frac{e^{2\kappa s - 2\kappa t}}{2\kappa}\right]_0^t \\
&= \sigma^2 \left(\frac{1-e^{2\kappa t}}{2\kappa}\right)
\end{aligned}$$

$(*)$ gilt aufgrund der Itô-Isometrie, denn $\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t f(s) dW_s\right)^2\right] = \int_0^t f(s)^2 ds$ $\square$

Die oben ausgeführte Normalverteilungs–Eigenschaft der Short–Rate bedeutet, dass $r(t)$ mit positiver Wahrscheinlichkeit auch negative Werte annehmen kann. Dies ist ein Kritikpunkt am Modell von Vasicek, worauf wir später erneut eingehen werden.

Mit Hilfe der Fourier–Transformierten und dem Stetigkeitssatz von Lévy kann man einsehen, dass die Verteilung der Short–Rate für $t \to \infty$ gegen eine $\mathcal{N}\left(\theta, \frac{\sigma^2}{2\kappa}\right)$–Verteilung konvergiert. An dieser Stelle sieht man auch noch mal deutlich, dass θ für das langfristige Mittel der Short–Rate steht. Der Erwartungswert und die Varianz der Short–Rate sind beschränkt, da anschaulich gesehen auch in beliebig großem t die Short–Rate in Folge der Mean–Reversion–Eigenschaft zu θ zurückgezogen wird und die Varianz so nicht beliebig groß werden kann.

Nun wollen wir die Bewertungsgleichung für Nullkupon–Anleihen mit Fälligkeit in T angeben:

2.2.2 Die Bewertungsgleichung für Nullkupon–Anleihen

(2.7) Satz: (Bewertungsgleichung für NKAs)
Sei $r(t)$ die Short–Rate, die dem Prozess definiert durch die stochastische Differentialgleichung $dr(t) = \kappa(\theta - r(t))dt + \sigma d\overline{W_t}$ folgt. Weiter sei $0 \leq t \leq T \leq T^*$. Der Preis einer Nullkupon–Anleihe mit Fälligkeit in T ist dann im Zeitpunkt t gegeben durch:

$$p(t,T) = exp\Bigg(- \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} r(t) \\ - \left((T-t) - \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa}\right)\left(\theta - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}\right) - \left(\frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa}\right)^2 \frac{\sigma^2}{4\kappa}\Bigg)$$

Beweis:
Wir haben bereits die risikoneutrale Bewertungsgleichung und die Darstellung der Short–Rate kennen gelernt:

$$p(t,T) = \mathbb{E}^*\left[exp\left(-\int_t^T r(s)ds\right) \;\Big|\; \mathcal{F}_t\right]$$

$$r(s) = e^{-\kappa(s-t)}r(t) + (1 - e^{-\kappa(s-t)})\theta + \sigma \int_t^s e^{-\kappa(s-u)} d\overline{W_u}$$

Die Short–Rate ist hier ausgehend vom Zeitpunkt t geschrieben als Zins in s (vorher ausgehend vom Zeitpunkt 0)

Wir wollen zunächst eine Darstellung für das Integral $\int_t^T r(s)ds$ bestimmen:

$$\begin{aligned}
\int_t^T r(s)ds &= \int_t^T \Big(e^{-\kappa(s-t)}r(t) + (1 - e^{-\kappa(s-t)})\theta + \sigma \int_t^s e^{-\kappa(s-u)} d\overline{W_u}\Big) ds \\
&= \int_t^T e^{-\kappa(s-t)}r(t)ds + \int_t^T (1 - e^{-\kappa(s-t)})\theta ds + \sigma \int_t^T \int_t^s e^{-\kappa(s-u)} d\overline{W_u} ds \\
&\overset{(*)}{=} \int_t^T e^{-\kappa(s-t)}r(t)ds + \theta \int_t^T (1 - e^{-\kappa(s-t)})ds + \sigma \int_t^T \int_u^T e^{-\kappa(s-u)} ds d\overline{W_u} \\
&= r(t) \left[-\frac{e^{-\kappa(s-t)}}{\kappa}\right]_t^T + \theta \left[s + \frac{e^{-\kappa(s-t)}}{\kappa}\right]_t^T + \sigma \int_t^T \left[-\frac{e^{-\kappa(s-u)}}{\kappa}\right]_u^T d\overline{W_u} \\
&= r(t)\frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} + \theta \left((T-t) - \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa}\right) + \sigma \int_t^T \frac{1 - e^{-\kappa(T-u)}}{\kappa} d\overline{W_u}
\end{aligned}$$

$(*)$ gilt mit Fubini für stochastische Integrale. Für das Lebesque–Integral ist bekannt: $\int_a^b \int_a^y f(x,y)dxdy = \int_a^b \int_x^b f(x,y)dydx$. Dies kann verallgemeinert werden für stochastische Integrale, so dass $(*)$ gilt.

Ähnlich wie bei der Argumentation zur Normalverteilung der Short–Rate, können wir auch hier einsehen, dass $\int_t^T r(s)ds$ normalverteilt ist, da der letzte Summand wiederum ein Itô–Integral über eine deterministische Funktion ist mit
$\int_t^T \sigma \frac{1-e^{-\kappa(T-u)}}{\kappa} d\overline{W_u} = \int_0^T \sigma \frac{1-e^{-\kappa(T-u)}}{\kappa} d\overline{W_u} - \int_0^t \sigma \frac{1-e^{-\kappa(T-u)}}{\kappa} d\overline{W_u}$
und $\int_0^t \left(\sigma \frac{1-e^{-\kappa(T-u)}}{\kappa}\right)^2 ds < \infty$ für alle $t \geq 0$,
sowie $\int_0^T \left(\sigma \frac{1-e^{-\kappa(T-u)}}{\kappa}\right)^2 ds < \infty$ für alle $T \geq 0$, vgl. Übg. Blatt 8 Finanzmathematik II.

Da wir nun wissen, dass $\int_t^T r(s)ds$ normalverteilt ist, können wir folgenden Zusammenhang für eine normalverteilte ZV X verwenden:

$$\mathbb{E}\big[exp(X)\big] = exp\left(\mathbb{E}\big[X\big] + \frac{1}{2}\mathbf{Var}\big[X\big]\right)$$

Wir bestimmen also im Folgenden $\mathbb{E}^*\left[\int_t^T r(s)ds \mid \mathcal{F}_t\right]$ und $\mathbf{Var}^*\left[\int_t^T r(s)ds \mid \mathcal{F}_t\right]$:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}^*\Big[\int_t^T r(s)ds \;\Big|\; \mathcal{F}_t\Big] \\
&= \mathbb{E}^*\left[r(t)\frac{1-e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} + \theta\left((T-t) - \frac{1-e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa}\right) + \sigma\int_t^T \frac{1-e^{-\kappa(T-u)}}{\kappa} d\overline{W_u} \;\Big|\; \mathcal{F}_t\right] \\
&= r(t)\frac{1-e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} + \theta\left((T-t) - \frac{1-e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa}\right) + \sigma \underbrace{\mathbb{E}^*\left[\int_t^T \frac{1-e^{-\kappa(T-u)}}{\kappa} d\overline{W_u} \;\Big|\; \mathcal{F}_t\right]}_{\substack{=0 \\ \text{da Martingal}}} \\
&= r(t)\frac{1-e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} + \theta\left((T-t) - \frac{1-e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{Var}^*\Big[\int_t^T r(s)ds \;\Big|\; \mathcal{F}_t\Big] \\
&= \mathbf{Var}^*\Bigg[r(t)\frac{1-e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} + \theta\left((T-t) - \frac{1-e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa}\right) \\
&\quad + \sigma\int_t^T \frac{1-e^{-\kappa(T-u)}}{\kappa} d\overline{W_u} \;\Big|\; \mathcal{F}_t\Bigg] \\
&= \underbrace{\mathbf{Var}^*\left[r(t)\frac{1-e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} \;\Big|\; \mathcal{F}_t\right]}_{=0} + \underbrace{\mathbf{Var}^*\left[\theta\left((T-t) - \frac{1-e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa}\right) \;\Big|\; \mathcal{F}_t\right]}_{=0} \\
&\quad + \sigma^2 \mathbf{Var}^*\left[\int_t^T \frac{1-e^{-\kappa(T-u)}}{\kappa} d\overline{W_u} \;\Big|\; \mathcal{F}_t\right] \\
&= \frac{\sigma^2}{\kappa^2}\left(\mathbb{E}^*\left[\left(\int_t^T 1-e^{-\kappa(T-u)} d\overline{W_u}\right)^2 \;\Big|\; \mathcal{F}_t\right] - \underbrace{\mathbb{E}^*\left[\int_t^T 1-e^{-\kappa(T-u)} d\overline{W_u} \;\Big|\; \mathcal{F}_t\right]^2}_{\substack{=0 \\ \text{da Martingal}}}\right) \\
&\overset{(*)}{=} \frac{\sigma^2}{\kappa^2}\int_t^T (1-e^{-\kappa(T-u)})^2 du \\
&= \frac{\sigma^2}{\kappa^2}\int_t^T (1-2e^{-\kappa(T-u)} + e^{-2\kappa(T-u)}) du \\
&= \frac{\sigma^2}{\kappa^2}\left[s - \frac{2e^{-\kappa(T-u)}}{\kappa} + \frac{e^{-2\kappa(T-u)}}{2\kappa}\right]_t^T \\
&= \frac{\sigma^2}{\kappa^2}\left((T-t) - \frac{2-2e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} + \frac{1-e^{-2\kappa(T-t)}}{2\kappa}\right)
\end{aligned}
$$

$(*)$ gilt aufgrund der Itô-Isometrie und der Unabhängigkeit des Integrals von $\mathcal{F}_t$.

Wir setzen nun unsere Ergebnisse ein und erhalten:

$$
\begin{aligned}
& p(t,T) \\
&= \mathbb{E}^*\left[exp\left(-\int_t^T r(s)ds\right) \,\Big|\, \mathcal{F}_t\right] \\
&= exp\left(-\mathbb{E}^*\Big[\int_t^T r(s)ds \,\Big|\, \mathcal{F}_t\Big] + \frac{1}{2}\mathbf{Var}^*\Big[\int_t^T r(s)ds \,\Big|\, \mathcal{F}_t\Big]\right) \\
&= exp\Bigg(-\Big(r(t)\frac{1-e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} + \theta\Big((T-t) - \frac{1-e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa}\Big)\Big) \\
&\quad + \frac{1}{2}\Big(\frac{\sigma^2}{\kappa^2}\Big((T-t) - \frac{2-2e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} + \frac{1-e^{-2\kappa(T-t)}}{2\kappa}\Big)\Big)\Bigg) \\
&= exp\Bigg(-\frac{1-e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa}r(t) \\
&\quad - \Big((T-t) - \frac{1-e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa}\Big)\Big(\theta - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}\Big) + \frac{\sigma^2}{4\kappa}\Big(\frac{-2+2e^{-\kappa(T-t)}+1-e^{-2\kappa(T-t)}}{\kappa^2}\Big)\Bigg) \\
&= exp\Bigg(-\frac{1-e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa}r(t) \\
&\quad - \Big((T-t) - \frac{1-e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa}\Big)\Big(\theta - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}\Big) - \Big(\frac{1-e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa}\Big)^2\frac{\sigma^2}{4\kappa}\Bigg)
\end{aligned}
$$

Somit folgt schließlich die Behauptung.

□

2.2.3 Bewertung eines Calls auf eine NKA

Schließlich wollen wir nun noch eine Formel angeben, mit der wir eine Call–Option auf eine Nullkupon–Anleihe bewerten können. Über die Dynamik der Preisentwicklung einer NKA mit Fälligkeit in T werden wir sehen, dass wir die Bewertung auf ein Black–Scholes Modell mit deterministischen, zeitabhängigen Konstanten zurückführen können. Dies ermöglicht uns eine einfache Bewertung.

(2.8) Satz: (Dynamik der Preisentwicklung einer NKA mit Fälligkeit in T)
Sei $0 \le t \le T \le T^*$ mit $T > 0$. Für die Dynamik einer NKA mit Fälligkeit in T gilt:

$$dp(t,T) = p(t,T)\Big(r(t)dt + \sigma(t,T)d\overline{W_t}\Big)$$

Hierbei ist $\overline{W_t}$ ein Wiener Prozess bzgl. P^*, $r(t)$ ist im Vasicek–Modell bekannt, $\sigma(t,T)$ wird im Folgenden mit Hilfe der Itô–Formel bestimmt.

Beweis:
Unseren Betrachtungen liegt eine Wiener Filtration zu Grunde. Außerdem wissen wir, dass $\left(\frac{p(t,T)}{\beta(t)}\right)_{0\le t\le T}$ ein P^*–Martingal ist. Im Folgenden sei $p^*(t,T) := \frac{p(t,T)}{\beta(t)}$. Mit dem Martingaldarstellungssatz wissen wir nun weiter, dass ein $\varphi(t)$ existiert mit:

$$p^*(t,T) = p^*(0,T) + \int_0^t \varphi(s)d\overline{W_s}$$

Schreiben wir dies in Differentialschreibweise erhalten wir durch Erweiterung:

$$dp^*(t,T) = \varphi(t)d\overline{W_t} = p^*(t,T)\underbrace{\frac{\varphi(t)}{p^*(t,T)}}_{:=\sigma(t,T)}d\overline{W_t} = p^*(t,T)\sigma(t,T)d\overline{W_t}$$

Nun benutzen wir die partielle Integration, sowie die Darstellungen $d\beta(t) = r(t)\beta(t)dt$ und $dp^*(t,T) = p^*(t,T)\sigma(t,T)d\overline{W_t}$:

$$\begin{aligned}
dp(t,T) &= d\beta(t)p^*(t,T) \\
&= \beta(t)dp^*(t,T) + p^*(t,T)d\beta(t) + \underbrace{d\left[\beta,p^*\right]_t}_{=0\text{ ,da }\beta\text{ Pfade v. beschr. Var.}} \\
&= \beta(t)p^*(t,T)\sigma(t,T)d\overline{W_t} + p^*(t,T)r(t)\beta(t)dt \\
&= p(t,T)\sigma(t,T)d\overline{W_t} + p(t,T)r(t)dt \\
&= p(t,T)\Big(r(t)dt + \sigma(t,T)d\overline{W_t}\Big)
\end{aligned}$$

□

Um jetzt $\sigma(t,T)$ genauer bestimmen zu können, fassen wir $p(t,T)$ als Funktion von $r(t)$ und der Zeitdifferenz $T-t$ auf. Wir schreiben im Folgenden $p(t,T) = f_T(r(t),t)$ mit $f_T \in \mathcal{C}^{2,1}\Big(\mathbb{R}\times[0,T],(0,\infty)\Big)$. Nun wenden wir die Itô–Formel auf f_T an. In Differntial-schreibweise erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
&df_T(r(t),t)\\
&= \frac{\partial f_T(r(t),t)}{\partial t}dt + \frac{\partial f_T(r(t),t)}{\partial r}dr(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_T(r(t),t)}{\partial r^2}d[r]_t\\
&= \frac{\partial f_T(r(t),t)}{\partial t}dt + \frac{\partial f_T(r(t),t)}{\partial r}\Big(\kappa(\theta - r(t))\,dt + \sigma d\overline{W_t}\Big) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_T(r(t),t)}{\partial r^2}\sigma^2 dt\\
&= \left(\frac{\partial f_T(r(t),t)}{\partial t} + \frac{\partial f_T(r(t),t)}{\partial r}\Big(\kappa\theta - \kappa r(t)\Big) + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 f_T(r(t),t)}{\partial r^2}\right)dt + \sigma\frac{\partial f_T(r(t),t)}{\partial r}d\overline{W_t}\\
&= f_T(r(t),t)\Big(r(t)dt + \sigma(t,T)d\overline{W_t}\Big)
\end{aligned}
$$

mit

$$
r(t) = \frac{1}{f_T(r(t),t)}\;\frac{1}{1+\kappa\frac{\partial f_T(r(t),t)}{\partial r}}\left(\frac{\partial f_T(r(t),t)}{\partial t} + \frac{\partial f_T(r(t),t)}{\partial r}\kappa\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 f_T(r(t),t)}{\partial r^2}\right)
$$

$$
\sigma(t,T) = \frac{1}{f_T(r(t),t)}\left(\sigma\frac{\partial f_T(r(t),t)}{\partial r}\right)
$$

Die vorliegende Dynamik der Preisentwicklung einer NKA mit Fälligkeit in T

$$
dp(t,T) = p(t,T)\Big(r(t)dt + \sigma(t,T)d\overline{W_t}\Big)
$$

ist also völlig analog zum Black–Scholes Modell mit deterministischen zeitabhängigen Konstanten zu sehen:

$$
dS_t = S_t\Big(\mu_t dt + \sigma_t dW_t\Big)
$$

Da wir wissen, wie wir in einem Black–Scholes Modell bewerten können, ist es nun auch hier im Vasicek–Modell einfach eine Bewertung zum Beispiel eines Calls auf eine Nullkupon–Anleihe durchzuführen und eine entsprechende Formel anzugeben.

(2.9) Satz: (Call auf eine NKA)

Sei $0 \leq t \leq T_1 < T_2 \leq T^*$. Die folgende Formel gibt im Zeitpunkt t den Preis eines Calls (Ausübungszeitpunkt T_1) auf eine NKA (Fälligkeit T_2) zum Strike–Preis K an:

$$C(t, T_1, T_2, K) = p(t, T_2)\Phi(d_1) - Kp(t, T_1)\Phi(d_2)$$

wobei:

$$\begin{aligned}
d_1 &= \frac{1}{\hat{\sigma}} \log\left(\frac{p(t,T_2)}{Kp(t,T_1)}\right) + \frac{\hat{\sigma}}{2} \\
d_2 &= d_1 - \hat{\sigma} \\
\hat{\sigma} &= \frac{\sigma}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa(T_2 - T_1)}\right)\sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa(T_1 - t)}}{2\kappa}} \\
\Phi &\mathrel{\widehat{=}} \text{ Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung}
\end{aligned}$$

Interpretation der Formel:

An dieser Stelle erkennt man ebenfalls die Analogie zur bekannten Black–Scholes–Formel. Hier die Erinnerung an die Formel im Black–Scholes–Modell:

$$P_t(C) = A(t)\ \Phi(h_1(A(t), T - t)) -\ Ke^{-r(T-t)}\ \Phi(h_2(A(t), T - t)$$

Im Black–Scholes Modell kan man in der Aktie und im Bankkonto handeln. Die Investition in die NKA mit Fälligkeit T_1 steht nun für die Rolle des risikolosen Bankkontos. Die Aktie wiederum wird durch die NKA mit Fälligkeit T_2 ersetzt.

2.2.4 Kritik am Vasicek–Modell

Oldrich Vasicek hat es mit seinem Modell ermöglicht, dass die Varianz wegen der Mean Reversion Eigenschaft nicht mehr beliebig groß wird, sondern beschränkt bleibt. Dies ist ein Vorteil, da in der Praxis der Zins in der Zukunft auch nicht beliebig stark von einem gegebenen Wert abweichen wird. Außerdem kann man mit Hilfe seines Modells geschlossene Formeln für Preise von Nullkupon–Anleihen angeben.

Ein Nachteil des Vasicek–Modells wurde bereits erwähnt. Die Normalverteilungseigenschaft der Short–Rate führt dazu, dass diese mit positiver Wahrscheinlichkeit auch negative Werte annehmen kann. Dies ist ungünstig, da man in der Praxis implizit einen positiven Zins voraussetzt.

Ein weiterer wesentlicher Nachteil von dem Modell besteht in der Tatsache, dass man es nicht an gegebene Marktdaten kalibrieren kann, da nur drei Parameter (κ, θ, $\sigma > 0$) zur Verfügung stehen, um unendlich viele Bedingungen zu erfüllen.

Insgesamt sieht man also, dass das Vasicek–Modell nicht praxistauglich ist. Im Ausblick werden wir sehen, dass man die Schwächen des Vasicek–Modells beseitigen kann.

3 Zusammenfassung und Ausblick

Wir haben nun das einfachste Short–Rate–Modell zur Beschreibung von Rentenmärkten kennen gelernt. Wir wissen nun, wie man im Vasicek–Modell die Short–Rate in einer geschlossenen Formel angeben kann, wie sie verteilt ist und wie man in dem Modell Formeln für die Bewertung von Nullkupon–Anleihen angibt. Am Ende sind wir auch auf die Schwächen des Modells näher eingegangen.

Es besteht die Möglichkeit, diese Schwächen auszuschalten, indem man zum Beispiel in einem nächsten Schritt zu dem so genannten Extended Vasicek Modell übergeht. Darin betrachtet man die Parameter in Abhängigkeit von der Zeit, so dass eine Kalibrierung an gegebene Marktdaten ermöglicht wird. Man kann dieses Modell zwar ebenfalls mathematisch gut handhaben, allerdings ist auch hier die Short–Rate noch normalverteilt, so dass der Zins noch immer mit positiver Wahrscheinlichkeit negativ werden kann.

Im CIR–Modell (Cox, Ingersol und Ross) folgt die Short–Rate einem Square–Root–Prozess, also einem Wurzelprozess. In diesem Modell ist es nun aber im Allgemeinen nicht mehr möglich eine geschlossene Form für die Short–Rate anzugeben. Es ist wesentlich schwieriger mit dem CIR–Modell umzugehen. Jedoch ist bekannt, dass $r(t)$ einer nicht–zentralen χ^2–Verteilung folgt und somit der Zins nicht mehr negativ werden kann.