Seminar: Finanzmathematik

Bewertung von Barriere Optionen im Black-Scholes Modell sowie die Symmetrie von P. Carr

Deniz Atug

4. April 2010

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit gibt eine Einführung in die Thematik der Barriere Optionen Down and Out Calls und Down and In Calls. Dazu werden zum einen Preisparitäten hergestellt, zum anderen findet eine Bewertung des Down and In Calls statt. Zuletzt wird die Symmetrie von P. Carr erläutert und in Beziehung zum Down and In Call gesetzt.

Inhaltsverzeichnis

1 Barriere Optionen

1.1 Einführung

Barriere Optionen sind Optionen, bei denen die Auszahlung nicht wie üblich vom Endkurs, sondern vom gesamten Aktienpfad abhängen. Für diesen Typ von Optionen wird neben dem Strike K eine Barrierenschranke L festgelegt. In der vorliegenden Arbeit werden Call Optionen betrachtet, die jedoch verfallen, wenn die Barrierenschranke L erreicht bzw. nicht erreicht wird. Vorausgesetzt wird, dass der aktuelle Kurs $S_0 > L$ ist.

1.2 Down and Out Optionen

Der Käufer einer Down and Out Option verliert sein Ausübungsrecht, falls der Preis des Basisgutes $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$ unterhalb der Barrierenschranke L vor Laufzeitende T fällt. Andernfalls entsteht eine Auszahlung in Höhe von $\phi(S_T)$, d.h. im Falle eines Calls gilt $\phi(x) = (x - K)^+$. Sei T_L die Stopzeit, an dem der Aktienkurs zum ersten Mal die Barriere bricht, definiert durch

$$T_L := \inf\{t \mid S_t \leq L\} = \inf\{t \mid S_t = L),$$

dann lässt sich der Preis eines Down and Out Calls (DOC) mittels dem diskontierten Erwartungswert bestimmen:

$$DOC(S_0, K, L) := \mathbb{E}_Q(e^{-rT}(S_T - K)^+ \mathbb{1}_{\{T_L > T\}}),$$

wobei Q das risikolose Wahrscheinlichkeitsmaß darstellt.

1.3 Down and In Optionen

Der Käufer eines Down and In Calls (DIC) erhält die Auszahlung $(S_T - K)^+$, sofern der Aktienkurs die Schranke L vor Laufzeitende T mindestens einmal durchlaufen hat. Der Preis dieser Option ist:

$$DIC(S_0, K, L) := \mathbb{E}_Q(e^{-rT}(S_T - K)^+ \mathbb{1}_{\{T_L < T\}}).$$

1.4 Preisparität

Geht man die Positionen Long im DOC und Long im DIC mit identischem Strike K, Schranke L und Laufzeitende T ein, entsteht eine Auszahlung von $(S_T - K)^+$, welche einer Auszahlung eines Calls mit Strike K und Laufzeitende T entspricht. Aus dem Replikationsprinzip folgt

$$DIC(S, K, L) + DOC(S, K, L) = C(S, K),$$

wobei $C(S, K)$ dem Preis einer Call Option mit Strike K und Anfangskurs S entspricht. Aufgrund dieser Parität genügt die Beschränkung auf eine Bewertung des DIC.

2 Bewertung des Down and In Calls

Ziel ist, den Preis $DIC(S_0, K, L) := \mathbb{E}_Q(e^{-rT}(S_T - K)^+ \mathbb{1}_{\{T_L < T\}})$ zu bestimmen. Diese Bewertung findet im Black-Scholes Modell statt und wird in einige Schritte unterteilt. Zu Beginn wird ein entsprechender Maßwechsel durchgeführt, der im Folgenden beschrieben wird.

2.1 Maßwechsel

Sei $(B_t)_{0 \leq t \leq T}$ ein Q-Wiener Prozess, wobei Q das risikolose Wahrscheinlichkeitsmaß im Black-Scholes Modell ist. Für den Aktienpreisprozess $(S_t)_{t \geq 0}$ gilt:

$$S_t := S_0 e^{rt} \exp\left(\sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right) = S_0 \exp(\sigma W_t)$$

mit $W_t := B_t + mt$ für $t \leq T$ und $m := \frac{1}{\sigma}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)$. Die Stopzeit T_L kann umgeformt werden zu einer Funktion von W:

$$\begin{aligned} T_L = \inf\{t\ |S_t \leq L\} &= \inf\{t\ |S_0 \exp(\sigma W_t) \leq L\} \\ &= \inf\left\{t\ |W_t \leq \frac{1}{\sigma}\ln\frac{L}{S_0}\right\} = \inf\{t\ |W_t \leq l\} =: T_l\ , \end{aligned}$$

wobei $l := \frac{1}{\sigma}\ln\left(\frac{L}{S_0}\right)$. Um den Preis des DIC zu bestimmen, wird mittels Girsanov Transformation $(W_t)_{0\leq t\leq T}$ in einen Wiener Prozess transfomiert. Dazu wird ein Wahrscheinlichkeitsmaß R definiert:

$$\frac{dR}{dQ} = \exp\left(-mB_T - \frac{1}{2}m^2T\right)$$

und

$$\frac{dQ}{dR} = \exp\left(mB_T + \frac{1}{2}m^2T\right) = \exp\left(mW_T - \frac{1}{2}m^2T\right).$$

Somit ist nach Girsanov $W_t = B_t + mt$ ein R-Wiener Prozess.

2.2 Berechnung des DIC

Der Preis des DIC lässt sich durch den Maßwechsel umformen zu:

$$\begin{aligned} DIC(S_0, K, L) &= e^{-rT}\mathbb{E}_Q\left((S_T - K)^+ \mathbb{1}_{\{T_L < T\}}\right) \\ &= e^{-rT}\mathbb{E}_R\left(\exp(mW_T - \frac{m^2T}{2})\left(S_0 e^{\sigma W_T} - K\right)^+ \mathbb{1}_{\{T_l < T\}}\right). \end{aligned}$$

Umformungen der Auszahlung ergeben:

$$\begin{aligned} (S_0 e^{\sigma W_T} - K)^+ &= (S_0 e^{\sigma W_T} - K)\mathbb{1}_{\{S_0 e^{\sigma W_T} \geq K\}} \\ &= S_0 e^{\sigma W_T}\mathbb{1}_{\{W_T \geq \frac{1}{\sigma}\ln\frac{K}{S_0}\}} - K\mathbb{1}_{\{W_T \geq \frac{1}{\sigma}\ln\frac{K}{S_0}\}} \\ &= S_0 e^{\sigma W_T}\mathbb{1}_{\{W_T \geq k\}} - K\mathbb{1}_{\{W_T \geq k\}}, \end{aligned}$$

wobei $k := \frac{1}{\sigma} \ln \frac{K}{S_0}$. Setzt man die (oben) umgeformte Auszahlung in die Formel für den DIC ein, erhält man:

$$\begin{aligned}
e^{rT} DIC(S_0, K, L) &= \mathbb{E}_R \left(\exp(mW_T - \frac{m^2 T}{2})(S_0 e^{\sigma W_T} \mathbb{1}_{\{W_T \geq k\}} - K \mathbb{1}_{\{W_T \geq k\}}) \mathbb{1}_{\{T_l < T\}} \right) \\
&= e^{\frac{-m^2 T}{2}} \mathbb{E}_R \left(e^{m W_T} (S_0 e^{\sigma W_T} \mathbb{1}_{\{W_T \geq k\}} - K \mathbb{1}_{\{W_T \geq k\}}) \mathbb{1}_{\{T_l < T\}} \right) \\
&= e^{-\frac{m^2 T}{2}} [S_0 \mathbb{E}_R (e^{(\sigma + m) W_T} \mathbb{1}_{\{W_T \geq k\}} \mathbb{1}_{\{T_l < T\}}) - K \mathbb{E}_R (e^{m W_T} \mathbb{1}_{\{W_T \geq k\}} \mathbb{1}_{\{T_l < T\}})] \\
&= e^{-\frac{m^2 T}{2}} [S_0 \Psi(\sigma + m) - K \Psi(m)]
\end{aligned}$$

mit $\Psi(y) := \mathbb{E}_R(e^{y W_T} \mathbb{1}_{\{W_T \geq k\}} \mathbb{1}_{\{T_l < T\}})$. Sei $m_T := \inf_{s \leq T} W_s$, dann gilt folgende Gleichung:

$$\{T_l < T\} = \{m_T \leq l\}.$$

Um $\Psi(y) := \mathbb{E}_R(e^{y W_T} \mathbb{1}_{\{W_T \geq k\}} \mathbb{1}_{\{T_l < T\}}) = \mathbb{E}_R(e^{y W_T} \mathbb{1}_{\{W_T \geq k\}} \mathbb{1}_{\{m_T \leq l\}})$ zu berechnen, wird zwischen zwei Fällen unterschieden. Der erste Fall ist, dass der Strike K kleiner gleich der Schranke L ist ($\Leftrightarrow k \leq l$) und der zweite Fall ist, dass der Strike K größer gleich L ist ($\Leftrightarrow k \geq l$).

<u>1. Fall $k \leq l$:</u>

$$\begin{aligned}
\Psi(y) &= \mathbb{E}_R(e^{y W_T} \mathbb{1}_{\{W_T \geq k\}} \mathbb{1}_{\{m_T \leq l\}}) \\
&= \mathbb{E}_R(e^{y W_T} \mathbb{1}_{\{k \leq W_T \leq l\}} \mathbb{1}_{\{m_T \leq l\}}) + \mathbb{E}_R(e^{y W_T} \mathbb{1}_{\{W_T \geq l\}} \mathbb{1}_{\{m_T \leq l\}}) \\
&= \mathbb{E}_R(e^{y W_T} \mathbb{1}_{\{k \leq W_T \leq l\}}) + \mathbb{E}_R(e^{y W_T} \mathbb{1}_{\{W_T \geq l\}} \mathbb{1}_{\{m_T \leq l\}}).
\end{aligned}$$

Die Berechnung des linken Summanden ist klar, da $W_T \sim N(0, \sqrt{T})$. Für die des rechten Summanden wird das Spiegelungsprinzip benutzt. Zur Erinnerung:

$$R(W_T \geq x, m_T \leq y) = R(W_T \leq 2y - x), \qquad \text{für } y \leq 0,\ x \geq y.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\Psi(y) &= \mathbb{E}_R(e^{yW_T}\mathbb{1}_{\{k\le W_T\le l\}}) + \mathbb{E}_R(e^{yW_T}\mathbb{1}_{\{W_T\ge l\}}\mathbb{1}_{\{m_T\le l\}}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\left[\int_k^l e^{yx}e^{-\frac{1}{2T}x^2}\mathrm{d}x + \int_l^\infty e^{yx}e^{-\frac{1}{2T}(2l-x)^2}\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\int_k^l e^{\frac{Ty^2}{2}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-yT}{\sqrt{T}}\right)^2}\mathrm{d}x + \frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\int_l^\infty e^{\frac{Ty^2}{2}+2yl}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-2l-yT}{\sqrt{T}}\right)^2}\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Das letzte Gleichheitszeichen ist mittels quadratischer Ergänzung entstanden. Substituiert man nun im linken Summanden $x_1 := \frac{1}{\sqrt{T}}(x-yT)$ $\quad(\Rightarrow \mathrm{d}x = \sqrt{T}\mathrm{d}x_1)$ und im rechten $x_2 := \frac{1}{\sqrt{T}}(x-2l-yT)$ $\quad(\Rightarrow \mathrm{d}x = \sqrt{T}\mathrm{d}x_2)$, folgt:

$$\begin{aligned}
\Psi(y) &= e^{\frac{Ty^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{1}{\sqrt{T}}(k-yT)}^{\frac{1}{\sqrt{T}}(l-yT)} e^{-\frac{1}{2}x_1^2}\mathrm{d}x_1 + e^{\frac{Ty^2}{2}+2yl}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{1}{\sqrt{T}}(-l-yT)}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x_2^2}\mathrm{d}x_2 \\
&= e^{\frac{Ty^2}{2}}\left[\mathcal{N}(y_1) - \mathcal{N}(y_2)\right] + e^{\frac{Ty^2}{2}+2yl}\mathcal{N}(y_3)
\end{aligned}$$

mit

$$y_1 := \frac{1}{\sqrt{T}}(l-yT), \quad y_2 := \frac{1}{\sqrt{T}}(k-yT), \quad y_3 := \frac{1}{\sqrt{T}}(l+yT).$$

Setzt man alle vorher berechneten und definierten Werte, $\Psi(y)$, $m = \frac{1}{\sigma}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)$, $l = \frac{1}{\sigma}\ln\frac{L}{S_0}$ und $k = \frac{1}{\sigma}\ln\frac{K}{S_0}$, in die Preisformel des DIC ein, erhält man zusammenfassend für $K \le L$:

$$\begin{aligned}
DIC(S_0, K, L) &= e^{-rT}e^{-\frac{m^2T}{2}}\left[S_0\Psi(\sigma+m) - K\Psi(m)\right] \\
&= S_0\left[\mathcal{N}(z_1) - \mathcal{N}(z_2) + \left(\frac{L}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}+1}\mathcal{N}(z_3)\right] \\
&\quad - e^{-rT}K\left[\mathcal{N}(z_4) - \mathcal{N}(z_5) + \left(\frac{L}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}\mathcal{N}(z_6)\right]
\end{aligned}$$

mit

$$
\begin{aligned}
z_1 &:= -\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[(r+\frac{1}{2}\sigma^2)T + \ln\frac{S_0}{L}\right] & z_4 &:= z_1 + \sigma\sqrt{T}\\
z_2 &:= -\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[(r+\frac{1}{2}\sigma^2)T + \ln\frac{S_0}{K}\right] & z_5 &:= z_2 + \sigma\sqrt{T}\\
z_3 &:= \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[(r+\frac{1}{2}\sigma^2)T - \ln\frac{S_0}{L}\right] & z_6 &:= z_3 - \sigma\sqrt{T}.
\end{aligned}
$$

<u>2. Fall $k \geq l$:</u>

$$
\begin{aligned}
\Psi(y) &= \mathbb{E}_R(e^{yW_T}\mathbb{1}_{\{W_T\geq k\}}\mathbb{1}_{\{m_T\leq l\}})\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\int_k^\infty e^{yx}e^{-\frac{1}{2T}(2l-x)^2}\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\int_k^\infty e^{\frac{Ty^2}{2}+2yl}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-2l-yT}{\sqrt{T}}\right)^2}\mathrm{d}x\\
&= e^{\frac{Ty^2}{2}+2yl}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{1}{\sqrt{T}}(k-2l-yT)}^\infty e^{-\frac{1}{2}x_3^2}\mathrm{d}x_3\\
&= e^{\frac{Ty^2}{2}+2yl}\mathcal{N}(y_4)
\end{aligned}
$$

mit $y_4 := \frac{1}{\sqrt{T}}(2l + yT - k)$ und der Substitution $x_3 := \frac{1}{\sqrt{T}}(x - 2l - yT)$. Setzt man analog alle Werte ein, erhält man für den Fall $K \geq L$:

$$
\begin{aligned}
DIC(S_0, K, L) &= e^{-rT}e^{-\frac{m^2T}{2}}\left[S_0\Psi(\sigma+m) - K\Psi(m)\right]\\
&= S_0\left(\frac{L}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}+1}\mathcal{N}(z_7) - e^{-rT}K\left(\frac{L}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}\mathcal{N}(z_8)
\end{aligned}
$$

mit

$$
z_7 := \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\ln\frac{L^2}{S_0K} + (r+\frac{1}{2}\sigma^2)T\right] \qquad z_8 := z_7 - \sigma\sqrt{T}.
$$

Die Preisformel für den DIC ($K \geq L$) lässt sich umschreiben zu

$$
DIC(S_0, L, K) = \left(\frac{L}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}+1}\left[S_0\mathcal{N}(z_7) - e^{-rT}\frac{KS_0^2}{L^2}\mathcal{N}(z_8)\right]
$$

oder falls $C(S_0, K)$ den Preis eines Calls mit Strike K und Anfangskurs S_0 bezeichnet, zu:

$$DIC(S_0, L, K) = \left(\frac{L}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}+1} C\left(S_0, \frac{KS_0^2}{L^2}\right).$$

3 Die Symmetrie von P. Carr

Ziel ist, die Preisformel für den DIC mit Hilfe der Symmetrie Formel zu bestimmen. Zunächst wird die Symmetrie Formel von Carr durch ein Beispiel erläutert, anschließend wird die Beziehung zum DIC hergestellt.

3.1 Beispiel

Gegeben sei ein Wechselkurs mit folgender Dynamik:

$$dX_t = X_t[(r_d - r_f)dt + \sigma dW_t],$$

wobei r_d den inländischen Zinssatz und r_f den ausländischen Zinssatz darstellt. Im Beispiel wird der Wechselkurs X_t zwischen dem Euro und dem US-Dollar betrachtet. $X_t = 0.7$EUR bedeutet beispielsweise, dass man für 0.7EUR einen Dollar erhält. Dies ist äquivalent dazu, dass der Wechselkurs zwischen dem US-Dollar und dem Euro $\frac{1}{X_t}$ beträgt, ansonsten gäbe es Arbitragemöglichkeiten. D.h. für $\frac{1}{X_t} = \frac{1}{0.7} \approx 1.42$USD erhält man einen Euro. Im Folgenden wird ein Call auf die ausländische Währung USD mit Laufzeit T und Strike K betrachtet. Der Payoff dieses Calls beträgt in EUR:

$$(X_T - K)^+ = \begin{cases} (X_T - K) \text{ EUR} & \text{falls } X_T \geq K \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

In USD beträgt dieser:

$$(X_T - K)^+ = \begin{cases} \frac{(X_T - K)}{X_T} = K(\frac{1}{K} - \frac{1}{X_T}) \text{ USD} & \text{falls } X_T \geq K \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der Preis dieser Call Option beträgt zum Zeitpunkt t:

$$\text{Call}^d(t, X_t, K, T, r_d, r_f) \text{ EUR} = \text{Call}^d(t, X_t, K, T, r_d, r_f) X_t^{-1} \text{ USD}.$$

Nimmt nun ein ausländischer Investor die Position K Long Puts auf die Euro-Währung mit Wechselkurs $\frac{1}{X_t}$, Laufzeit T und Strike $\frac{1}{K}$ ein, hat dieser einen Preis von

$$K\text{Put}^f(t, \frac{1}{X_t}, \frac{1}{K}, T, r_f, r_d) \text{ USD}$$

und damit einen USD Payoff von

$$K\left(\frac{1}{K} - \frac{1}{X_T}\right)^+ = \begin{cases} K(\frac{1}{K} - \frac{1}{X_T}) \text{ USD} & \text{falls } \frac{1}{K} \geq \frac{1}{X_T} \Longleftrightarrow X_T \geq K \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aus dem Replikationsprinzip folgt, dass die Preise identisch sind, da der Payoff des Calls dem der K Puts entspricht, d.h.

$$\begin{aligned} & \text{Call}^d(t, X_t, K, T, r_d, r_f) X_t^{-1} = K\text{Put}^f(t, \frac{1}{X_t}, \frac{1}{K}, T, r_f, r_d) \\ \Longleftrightarrow \quad & \text{Call}^d(t, X_t, K, T, r_d, r_f) = K X_t \text{Put}^f(t, X_t^{-1}, K^{-1}, T, r_f, r_d). \end{aligned}$$

Betrachtet man nun den Fall $r_d = r_f$ und die Eigenschaft

$$a\text{Put}(t, X_t, K, T) = \text{Put}(t, aX_t, aK, T)$$

des Puts, erhält man folgenden Satz.

3.2 Satz

Falls das Basisgut die Dynamik $dS_t = S_t \sigma dW_t$ unter dem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß besitzt, gilt folgende Symmetrie Formel:

$$\text{Call}(t, S_t, K, T) = K S_t \text{Put}(t, S_t^{-1}, K^{-1}, T) = \text{Put}(t, K, S_t, T),$$

wobei die Notation $\text{Put}(t, x, y, T)$ für den Putpreis zum Zeitpunkt t, aktuellem Kurs x, Strike y und Laufzeitende T steht.

3.3 Beziehung zum DIC

Sei für den DIC $K > L$ und ein Aktienpreisprozess $(S_t)_{t\geq 0}$, welches ein Martingal unter dem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß ist, gegeben, dann ist

$$\begin{aligned} DIC(x,K,L) &= \mathbb{E}\big[(S_T - K)^+ \mathbb{1}_{\{T_L<T\}}\big] \\ &= \mathbb{E}\big[\mathbb{E}((S_T - K)^+ \mathbb{1}_{\{T_L<T\}} | \mathcal{F}_{T_L})\big] \\ &= \mathbb{E}\big[\mathbb{1}_{\{T_L<T\}} \mathbb{E}((S_T - K)^+ | \mathcal{F}_{T_L})\big]. \end{aligned}$$

Der Term $\mathbb{E}[(S_T - K)^+|\mathcal{F}_{T_L}]$ entspricht dem Preis eines Calls mit Strike K, Anfangskurs L und Laufzeit $T - T_L$. Wendet man darauf die Symmetrie Formel an, ist dieser Term äquivalent zu $\mathrm{Put}(T_L, K, L, T)$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\big[\mathbb{1}_{\{T_L<T\}} \mathbb{E}((S_T - K)^+ | \mathcal{F}_{T_L})\big] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{T_L<T\}} \mathrm{Put}(T_L, K, L, T)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{T_L<T\}} \frac{K}{L} \mathrm{Put}(T_L, L, \frac{L^2}{K}, T)\right]. \end{aligned}$$

Die Auszahlung dieses Puts mit Strike $\frac{L^2}{K}$ beträgt $\left(\frac{L^2}{K} - S_T\right)^+$ und ist nur dann positiv, wenn das Basisgut unter $\frac{L^2}{K}$ liegt, somit auch unter L liegt, sofern $K > L$. Falls also die Auszahlung nicht Null ist, muss die Barriere L erreicht worden sein und es gilt für den Preis des DIC:

$$\begin{aligned} \frac{K}{L}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{T_L<T\}} \mathrm{Put}(T_L, L, \frac{L^2}{K}, T)\right] &= \frac{K}{L}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{T_L<T\}} \mathbb{E}\left[(\frac{L^2}{K} - S_T)^+ | \mathcal{F}_{T_L}\right]\right] \\ &= \frac{K}{L}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{T_L<T\}} \mathbb{E}\left[(\frac{L^2}{K} - S_T)\mathbb{1}_{\{\frac{L^2}{K}>S_T\}} | \mathcal{F}_{T_L}\right]\right] \\ &= \frac{K}{L}\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[(\frac{L^2}{K} - S_T)\mathbb{1}_{\{\frac{L^2}{K}>S_T\}} \mathbb{1}_{\{T_L<T\}} | \mathcal{F}_{T_L}\right]\right] \\ &= \frac{K}{L}\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[(\frac{L^2}{K} - S_T)\mathbb{1}_{\{\frac{L^2}{K}>S_T\}} | \mathcal{F}_{T_L}\right]\right] \\ &= \frac{K}{L}\mathbb{E}\left[(\frac{L^2}{K} - S_T)\mathbb{1}_{\{\frac{L^2}{K}>S_T\}}\right] \\ &= \frac{K}{L}\mathbb{E}\left[(\frac{L^2}{K} - S_T)^+\right] \\ &= \frac{K}{L}\mathrm{Put}\left(x, \frac{L^2}{K}\right). \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Symmetrie Formel ist dann

$$DIC(x, K, L) = \frac{K}{L}\mathrm{Put}\left(x, \frac{L^2}{K}\right) = \mathrm{Call}\left(L, \frac{Kx}{L}\right).$$