# Der Fixpunktsatz von Brower und die Existenz von Gleichgewichtspreisen

Seminararbeit von Florian Heisel

22. Juni 2010

Einleitung:
Die Theorie der Gleichgewichtspreise beschäftigt sich mit Fragen, wie zum Beispiel Aktienpreise festgelegt werden. Insbesondere zieht sie dabei die Vorlieben der Investoren in Betracht und nutzt diese als Basis fr die Erklärung vom Zustande kommen der Aktienpreise. Die Theorie der Gleichgewichtspreise nimmt die allgemeine Gleichgewichtstheorie als Ausgangspunkt: In dieser werden die Preise wirtschaftlicher Güter unter Benutzung des Gleichgewichts von Angebot und Nachfrage erklärt.
Wir werden uns mit der Existenz solcher Gleichgewichtspreise beschäftigen.

Notation: Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ soll gelten:

- $x \geq y \Leftrightarrow x_i \geq y_i \ \forall i = 1, .., n$
- $x > y \Leftrightarrow x \geq y \ und \ x \neq y$
- $x \gg y \ \Leftrightarrow \ x_i > y_i \ \forall i = 1, .., n$
- $x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \ (Skalarprodukt)$
- $\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0\}$
- $\mathbb{R}_{++}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x \gg 0\}$

Konzept einer reinen Tauschwirtschaft (Arrow-Debreu-Modell)
gegeben: l Güter, m Agenten

- Menge der Konsumgüter der Agenten = $\{c \in \mathbb{R}_+^l\}$
- Besitz der Agenten = $\{e_i \in \mathbb{R}_{++}^l$ ,i=(1,..,m)$\}$

- Vorlieben der Agenten (Nutzenfunktionen): $u_i : \mathbb{R}^l_+ \to \mathbb{R}$ ,i=(1,..,m)

und es gelte:

$$\textbf{U1: } u_i \textit{ seien stetig, strikt konkav, wachsend } \forall\ i = (1,..,m).$$

Unter „perfektem Wettbewerb“ gilt weiter: Agenten können Preise nicht beeinflussen. Sei also Preis $p = (p_1, .., p_l) \in \mathbb{R}^l_{++}$ gegeben. Dann ist das Budget von Agent i gegeben durch:

$$B_i(p) = \{c \in R^l_+ : p \cdot c \leq p \cdot e_i\}$$

Bemerkung
$p \gg 0 \;\Rightarrow\; B_i(p)$ ist konvex und kompakt.

Beweis
1.konvex: z.z.: $\forall\ c_1, c_2 \in B_i(p) :\ \lambda c_1 + (1-\lambda)c_2 \in B_i(p)\ \forall\ \lambda\ \in [0,1]$
also z.z.: $\forall\ c_1, c_2 \in B_i(p) :\ p(\lambda c_1 + (1-\lambda)c_2) \leq pe_i\ \forall\ \lambda\ \in [0,1]$

$$Es gilt:\ p(\lambda c_1 + (1-\lambda)c_2) = \lambda pc_1 + (1-\lambda)pc_2 \leq \lambda pe_i + (1-\lambda)pe_i = pe_i$$

$\Rightarrow \lambda c_1 + (1-\lambda)c_2 \in B_i(p)$
$\Rightarrow B_i(p)$ ist konvex

2.kompakt: g.z.z.: $B_i(p) \subset \mathbb{R}^l_+$ ist abgeschlossenes Intervall

$$c \in \mathbb{R}^l \;\Rightarrow\; c \geq 0$$

$$pc \leq pe_i \overset{p \gg 0}{\Rightarrow} c \leq e_i$$

$\Rightarrow c \in [0, e_i]$ abgeschlossenes Intervall $\Rightarrow B_i(p)$ ist kompakt.

Also nimmt die Nutzenfunktion $u_i$ auf $B_i(p)$ ihr Maximum an.
Definiere $d_i(p) \in \mathbb{R}^l_+$ als eindeutigen Vektor, der den Nutzen maximiert (Nachfrage des Agenten i bei Preis p). Da die Nutzenfunktion stetig und strikt konkav ist, steigt der Nutzen mit wachsender Nachfrage. Jedoch ist die Bedingung $pd_i(p) \leq pe_i$ zu erfüllen. Daher gilt:

$$pd_i(p) = pe_i \quad \forall i \tag{1}$$

**Definition 1**
Eine Kollektion $(p, d_i(p), i = (1,..,m))$ heißt Gleichgewicht, falls:

- $p \gg 0$

- $\sum_{i=1}^{m} d_i(p) = \sum_{i=1}^{m} e_i := e$

$z(p) := \sum_{i=1}^{m}(d_i(p) - e_i)$ heißt „aggregate excess demand function“ (Gesamt-Mehrbedarfs-Funktion).

Bemerkung:
$p$ ist ein Gleichgewichtspreis $\Leftrightarrow p \gg 0$ und $z(p) = 0$

Der Beweis zur Existenz eines Gleichgewichtspreises beschränkt sich also auf die Suche nach den Nullstellen von $z(p)$. Dafür werden Fixpunktargumente verwendet (FPS von Brower, FPS von Kakutani). Wir wollen 2 Beweise geben. Der erste Beweis, der sogenannte Nachfrage Ansatz, wird im Raum der Güter ($\mathbb{R}^l_+$) ausgeführt. Der zweite Beweis (Negishi Methode) benutzt das Prinzip des Pareto Optimums und bezieht sich auf den Raum der Agenten ($\mathbb{R}^m_+$).

Einschub:
Seien $X, Y$ Mengen. Eine *Korrespondenz* $F : X \to Y$ ist eine Abbildung von $X$ nach $\mathcal{P}(Y)$, d.h. $F(x)$ kann mehr als einen Wert enthalten. Der *Graph* von F ist definiert als:

$$Graph\ F = \{(x, y) \in X \times Y, y \in F(x)\}$$

**Satz 1 (Fixpunktsatz von Brower)**
Jede stetige Abbildung vom Simplex $\triangle^{l-1}$ in sich selbst besitzt einen Fixpunkt.

**Satz 2 (Fixpunktsatz von Kakutani)**
Sei S nicht leere, kompakte, konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^l$ und $\varphi : S \to S$ nicht leer-wertige Funktion, dessen Graph abgeschlossen ist. Dann hat $\varphi$ einen Fixpunkt, d.h. $\exists\ x \in S$ mit $x \in \varphi(x)$.

**Der Nachfrage Ansatz**

Der Beweis der Existenz eines Gleichgewichtspreises spielt sich bei diesem Ansatz im Raum der Güter ab. Wir benutzen hierfür die „aggregate excess demand function“:

$$z : \mathbb{R}^l_{++} \to \mathbb{R}^l$$

$$p \mapsto z(p) = \sum_{i=1}^{m}(d_i(p) - e_i)$$

**Proposition 1**

1. $z$ ist homogen vom Grad 0, d.h. $z(\alpha p) = z(p)\ \forall p \gg 0$ und $\alpha > 0$
2. $z$ ist stetig auf $\mathbb{R}^l_{++}$
3. $z$ genügt Walras Gesetz: $p \cdot z(p) = 0\ \forall\ p \gg 0$
4. Für $p_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} p$ und $p^j = 0 \Rightarrow ||z(p_n)|| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$
5. $z$ ist nach unten beschränkt: $z(p) \geq -e\ \forall p$

Beweis:
1. Nach Voraussetzung (1):

$$pd_i(p) = pe_i \overset{p\gg 0}{\Rightarrow} d_i(p) = e_i\ \forall i$$

und

$$\alpha p d_i(\alpha p) = \alpha p e_i \overset{p\gg 0, \alpha>0}{\Rightarrow} d_i(\alpha p) = e_i\ \forall i$$

$$\Rightarrow z(\alpha p) = \sum_{i=1}^{m}(d_i(\alpha p) - e_i) = \sum_{i=1}^{m}(d_i(p) - e_i) = z(p)$$

2. $z(p)$ ist als Verknüpfung stetiger Funktionen wieder stetig.
3. $pz(p) \overset{!}{=} 0\ \forall\ p \gg 0$
$pz(p) = p\sum_{i=1}^{m}(d_i(p) - e_i) = \sum_{i=1}^{m}(pd_i(p) - pe_i) \overset{(1)}{=} 0$
4. $p_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} p,\ p^j = 0 \Rightarrow ||z(p_n)|| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$
5. $z(p) = \sum_{i=1}^{m}(d_i(p) - e_i) \overset{d_i(p)\in\mathbb{R}^l_+}{\geq} -\sum_{i=1}^{m} e_i = -e$

Da $z(p)$ homogen für alle $\alpha > 0$, können wir annehmen, dass $p$ im l-Simplex liegt:

$$p \in \triangle^{l-1} = \{p \in \mathbb{R}^l_+; \sum_{k=1}^{l} p^k = 1\}$$

**Lemma 1 (Gale-Nikaido-Debreu (GND) Lemma )**
Sei $S \subset \triangle^{l-1}$ konvex und abgeschlossen und $f : S \to \mathbb{R}^l$ stetig mit $pf(p) = 0\ \forall\ p$
Dann: $\exists p^* \in S$ mit $pf(p^*) \leq 0\ \forall p \in S$

Beweis:
Sei $\mu : f(S) \to S$ die Korrespondenz definiert durch

$$\mu(z) := \{p \in S | pz = max\{qz | q \in S\}\}$$

Dann ist $\mu$ konvex und kompakt.
Des weiteren ist *Graph* $\mu$ abgeschlossen.
Definiere nun die Korrespondenz $\nu$ durch

$$\nu : S \times f(S) \to S \times f(S)$$

$$(p, z) \mapsto (\mu(z), f(p))$$

*Graph* $\nu$ ist nun nicht leer, konvex und abgeschlossen.

$\overset{Kakutani}{\Longrightarrow}$ $\nu$ hat einen Fixpunkt, d.h.:

$$\exists (p^*, z^*) \in S \times f(S) : (p^*, z^*) \in \nu(p^*, z^*) = (\mu(z^*), f(p))$$

$\Longrightarrow p^* \in \mu(z^*)$, $z^* \in f(p*)$ $\overset{f\ keine\ Korrespondenz}{\Longrightarrow}$ $z^* = f(p^*)$
Es gilt somit:

$$pf(p^*) = pz^* \overset{p^* \in \mu(z^*)}{\leq} p^* z^* = p^* f(p^*)\ \forall p \in S$$

<u>**Satz 3**</u>
Mit **U1** ($u_i : \mathbb{R}^l_+ \to \mathbb{R}$ stetig, strikt konkav, wachsend) gilt: $\exists$ Gleichgewicht, d.h. $\exists$ Kollektion $(p, d_i(p), i = 1, ..m)$: $p \gg 0$, $z(p) = \sum\limits_{i=1}^{m} (d_i(p) - e_i) = 0$

<u>Beweis:</u>
Wir wenden das GND Lemma auf $\triangle^{l-1} = \{p \in \mathbb{R}^l_+; \sum\limits_{k=1}^{l} p^k = 1\}$ und $z(p)$ an.
Dann gilt für alle $p$ im Inneren von $\triangle^{l-1}$:
$\exists p^* \in \triangle^{l-1}$ mit $pf(p^*) \leq 0\ \underline{\forall}\ p \in \triangle^{l-1}$
$\Rightarrow z(p^*) \leq 0$
Aber nach Walras Gesetz: $p^* z(p^*) = 0$
$\Rightarrow z(p*) = 0$ da p* aus dem Inneren von $\triangle^{l-1}$, also wenn $p \gg 0$ gilt.
Dies gilt allerdings erstmal nur für das Innere von $\triangle^{l-1}$, da $z(p)$ auf dem Rand von $\triangle^{l-1}$ nicht stetig ist. Denn $z(p) = 0$ für $p \in \partial\triangle^{l-1}$ widerspricht 4. in Proposition 1.

Daher werden wir nun mit Limiten arbeiten, und wachsende Teilstücke von $\triangle^{l-1}$ betrachten. Für $n \in \mathbb{N}$ sei:

$$\triangle^{l-1}_n = \{p \in \triangle^{l-1} | p^j \geq \frac{1}{n}, j \in \{1, .., l\}\}$$

und es gilt: $z|_{\triangle^{l-1}_n}$ ist stetig nach Proposition 1.

$$\overset{GND}{\Rightarrow} \exists p^*_n \in \triangle^{l-1}_n\ mit\ pz(p^*_n) \leq 0, \forall p \in \triangle^{l-1}_n \tag{2}$$

.
$(p_n^*)_n$ ist eine Folge in $\triangle^{l-1}$ (und $\triangle_n^{l-1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \triangle^{l-1}$). Also liegt der Grenzwert $p^*$ wegen der Abgeschlossenheit von $\triangle^{l-1}$ eben in $\triangle^{l-1}$.
Es bleibt zu zeigen, dass $p^* \gg 0$ gilt, damit die Unstetigkeit von $z(p)$ auf dem Rand von $\triangle^{l-1}$ irrelevant ist für unsere Aussage.
Nach Proposition 1: Falls $p_n \overset{n\to\infty}{\to} p$, $p^j = 0$ dann $||z(p)|| \overset{n\to\infty}{\to} \infty$. Um also zu beweisen, dass $p^* \gg 0$, genügt es zu zeigen, dass $||z(p^*)|| < \infty$ wenn $p_n \overset{n\to\infty}{\to} p^*$.
Mit 5. in Proposition 1: $z$ ist nach unten beschränkt durch $-e$. Also

$$z(p_n^*) \geq -e \ \ \forall p_n^*$$

.
Schreibe $z(p_n^*)$ als $z(p_n^*) = \begin{pmatrix} z^1(p_n^*) \\ \cdot \\ \cdot \\ z^l(p_n^*) \end{pmatrix}$. Weiter sei $p^j = \frac{1}{l}$ $\forall j$ in (2) udn $n$ groß genug, also $p = \begin{pmatrix} \frac{1}{l} \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{1}{l} \end{pmatrix} \in \triangle_n^{l-1}$.
Dann gilt mit (2):

$$pz(p_n^*) \leq 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{l} z^k(p_n^*) \leq 0$$

$$\Rightarrow z^1(p_n^*) \leq -\sum_{k=2}^{l} z^k(p_n^*) \leq \sum_{k=2}^{l} e^k$$

$\Rightarrow z^1(p_n^*)$ nach oben beschränkt. Analog kann man für k=(2,..,l) verfahren.
$\Rightarrow z(p_n^*)$ ist nach oben beschränkt.
$\Longrightarrow$ Also ist $z(p_n^*)$ beschränkt und $||z(p_n^*)|| < \infty \ \forall n \in \mathbb{N}$ für $p_n^* \longrightarrow p^*$ und damit $p^{j*} \neq 0$.
$\Longrightarrow p^* \gg 0$.

Da $z$ stetig auf $\mathbb{R}_{++}^l$ (nach Proposition 1) folgt:

$$\underset{n\to\infty}{lim}\, z(p_n^*) = z(p^*)$$

Da $\triangle_n^{l-1}$ von unten gegen $\triangle^{l-1}$ wächst, gilt:

$$pz(p^*) \leq 0 \ \forall p \in \triangle_n^{l-1} \ \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} pz(p^*) \leq 0 \ \forall p \in \triangle^{l-1}$$

$\Rightarrow z(p^*) \leq 0$.
Aus $p^*z(p^*) = 0$ mit $p \gg 0$ folgt nun $z(p^*) = 0$.
$\Longrightarrow \exists$ Gleichgewicht.

**Die Negishi Methode**

Bei der Negishi Methode betrachtet für den Beweis der Existenz eines Gleichgewichts den Raum der Agenten und verwendet das Prinzip des Pareto Optimums. Das Pareto Optimum ist anschaulich ein Optimum aller Nutzenfunktionen der Agenten, wobei jeder Agent seinen Nutzen nur noch dann vergrößern kann, wenn der Nutzen anderer Agenten sich vermindert.

Wir stellen hier weitere Anforderungen an die Nutzenfunktionen $u_i$, die sich auf deren Differenzierbarkeit beziehen.

**U2** $u_i \in C^2(\mathbb{R}^l_{++})$

**U3** Es gilt die Inada-Bedingung für alle i, d.h.: $\frac{\partial u_i}{\partial x^j}(x) \longrightarrow \infty$ für $x^j \longrightarrow 0$, $x^i$ fest für $i \neq j$.

**Pareto Optima**

**Definition 2** Eine Güterverteilung $(c_i)_{i=1,..,m} \in (R^l_+)^m$ ist ein Pareto Optimum, falls:

$$\nexists (c_i')_{i=1,..,m} \in (R^l_+)^m : \ \sum_{i=1}^{m} c_i' \leq e = \sum_{i=1}^{m} e_i$$

so dass

$$u_i(c_i') \geq u_i(c_i) \ \forall i, \ u_j(c_j') > u_j(c_j)$$

für mindestens ein $j \in \{1, .., m\}$.

**Definition 3**

Ein Paar $(\bar{p}, (\bar{c}_i)_{i=1,..,m} \in (R^l_+)^m)$ heißt Gleichgewicht mit Transferzahlungen, falls für alle i gilt:

$\bar{c}_i$ maximiert $u_i(c_i)$ unter der Nebenbedingung $\bar{p}c_i \leq \bar{p}\bar{c}_i$ und $\sum\limits_{i=1}^{m} \bar{c}_i = e = \sum\limits_{i=1}^{m} e_i$

Also hätten wir ein Gleichgewicht, falls $\bar{c}_i$ der Besitz von Agent i wäre. Um das zu erreichen, müssten wir $\bar{p}(e_i - \bar{c}_i)$ an ihn tranferieren.

Des Weiteren beruht die Negishi Methode auf dem ersten und zweiten Wohlstandestheorem:

1. Jedes Gleichggewicht ist ein Pareto Optimum.
2. Jedes Pareto Optimum ist ein Gleichgewicht mit Transferzahlungen.

Dies wollen wir nun beweisen und beschäftigen uns daher zuerst mit 2 Eigenschaften des Pareto Optimums.

**Definition 4**
Sei $\alpha \in \triangle^{m-1}$ ein Nutzengewichtungsvektor. Dann ist die Gesamtnutzenfunktion mit Gewichtung $\alpha_i$ für Agent $i$ gegeben durch:

$$u(\alpha) := \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i(c_i)$$

Dazu können wir das Problem $P_\alpha$ betrachten. Dieses ist definiert durch:

$P_\alpha$:= maximiere $u(\alpha)$ mit der Nebenbedingung $c_i \geq 0 \; \forall i$ und $\sum\limits_{i=1}^{m} c_i \leq e$.

**Proposition 2**
$(\bar{c_i})_{i=1,..,m}$ ist ein Pareto Optimum $\Leftrightarrow \exists$ Nutzengewichtungsvektor $\alpha \in \triangle^{m-1}$, so dass $(\bar{c_i})_{i=1,..,m}$ eine optimale Lösung für das Problem $P_\alpha$ ist.

Beweis:
"$\Leftarrow$": Es ist leicht zu zeigen, dass $(\bar{c_i})_{i=1,..,m}$ zu $P_\alpha$ Pareto optimal ist. Denn nach Definition gilt $\sum\limits_{i=1}^{m} \bar{c_i} \leq e$ und $(\bar{c_i})_{i=1,..,m} \in (\mathbb{R}^l)^m$ maximiert $u(\alpha)$.

"$\Rightarrow$": Definiere folgende Mengen:

$$A := \{(c_i)_{i=1,..,m} \mid c_i \geq 0 \; \forall i, \; \sum_{i=1}^{m} c_i \leq e\}$$

$$U := \{(u_i(c_i))_{i=1,..,m} \mid (c_i)_{i=1,..,m} \in A\}$$

$$V := \{z \in \mathbb{R}^m \mid z^i \geq u_i(\bar{c_i}) \; \forall i, \; z^j > u_j(\bar{c_j}) \; für \; mind. \; ein \; j\}.$$

Dann ist $U \cap V = \emptyset$, $U$ konvex und kompakt, $V$ nicht leer und konvex.
Beweis:
1. $U \cap V = \emptyset$ klar nach Definition vom Pareto Optimum.

2. $U$ konvex und kompakt:
-konvex: Sei $u_i(c_i))_{i=1,..,m}, \overline{(u_i(c_i))}_{i=1,..,m} \in \; U$, $\lambda \in [0,1]$.
$\lambda(u_i(c_))_{i=1,..,m} + (1-\lambda)\overline{(u_i(c_i))}_{i=1,..,m}$
$= \underbrace{\overline{(u_i(c_i))}_{i=1,..,m}}_{\in U} + \underbrace{\lambda((u_i(c_i))_{i=1,..,m} - (u_i(c_i))_{i=1,..,m})}_{\in U} \quad \in U$

-kompakt: Dies gilt, da kompakte Mengen $(A)$ unter stetigen Abbildungen $(u_i)$ wieder kompakt sind $(U)$.

3. $V$ nicht leer und konvex:
-nicht leer: Wähle $z \in U^c$, also $(c_i)_{i=1,..,m} \notin A$. Dies ist möglich.

-konvex: Seien $z_1,\ z_2 \in V,\ \lambda \in [0,1]$. $\lambda z_1 + (1-\lambda) z_2 = z_2 + \lambda(z_1 - z_2)$
1.Fall: $z_1^i \geq z_2^i$: $z_2^i + \lambda \underbrace{(z_1^i - z_2^i)}_{} \geq 0 \ \geq u_i(\bar{c_i})$
2.Fall: $z_2^i \geq z_1^i$: $z_2^i + \lambda \underbrace{(z_1^i - z_2^i)}_{} \leq 0 \ \geq u_i(\bar{c_i})$
analog für $z^j > u_j(\bar{c_j})$

Aus Minkowskis Theorem folgt nun: $\exists$ Familie von Koeffizienten $(\alpha_1, .., \alpha_m),\ \alpha_i \neq 0\ \forall i$, so dass:

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \omega_i \leq \sum_{i=1}^{m} z^i, \quad \omega \in U,\ z \in V$$

Für $\omega = [u_i(\bar{c_i})]_{i=1,..,m}$ und $z = [u_1(\bar{c_1}) + t, u_2(\bar{c_2}), .., u_m(\bar{c_m})]$ wobei $t > 0$.
Dann gilt: $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i [u_i(\bar{c_i})] \leq \alpha_1 u_1(\bar{c_1}) + \alpha_1 t + \sum\limits_{i=2}^{m} u_i(\bar{c_i})$

$$\Rightarrow \alpha_1 t \geq 0 \quad \stackrel{t \geq 0}{\Rightarrow} \alpha_1 \geq 0$$

Analog kann man dies für $i = (2, .., m)$ durchführen und erhält: $\alpha \geq 0$.
Wir können weiter annehmen, dass $\alpha \in \triangle^{m-1}$, denn da $\alpha \neq 0$ und obige Ungleichung homogen in $\alpha$ ist, können wir passend mit $\lambda > 0$ multiplizieren.

Da $[u_i(\bar{c_i})]_{i=1,..,m} \in \bar{V}$ (nach Definition von V), gilt weiter:

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i(c_i) \leq \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i(\bar{c_i})$$

$\forall\ (c_i)_{i=1,..,m}$ für die gilt: $c_i \geq 0,\ \sum\limits_{i=1}^{m} c_i \leq e$.

$\Rightarrow \exists\ \alpha \in \triangle^{m-1} : (\bar{c_i})_{i=1,..,m}$ ist Lösung zu Problem $P_\alpha$.

Diese Proposition nutzen wir um eine weitere Characterisierung eines Pareto Optimums zu zeigen.
Sei $\alpha \in \triangle^{m-1}$ fest und zu $P_\alpha$ gehörig.
Falls $\alpha_i = 0 \Rightarrow \bar{c_i}(\alpha) = 0$.
Falls $\alpha_i > 0 \Rightarrow \bar{c_i}(\alpha) \gg 0$ wegen der Inada Bedingung.
Daher existiert ein Lagrange Multiplikator $\lambda = (\lambda_1, .., \lambda_l) \gg 0$, so dass für alle i, für die $\alpha_i > 0$ ist, gilt:

$$\alpha_i\ grad\ u_i(\bar{c_i}) = \lambda.$$

Aus diesem Zusammenhang folgt, dass der zu einem Pareto Optimum assoziierte Nutzengewichtungsvektor eindeutig ist: Angenommen $\bar{c}_{p+1} = .. = \bar{c}_m = 0$.
Dann ist $\alpha_{p+1} = .. = \alpha_m = 0$.
Sei $[grad\ u_i(\bar{c_i})]^1$ der erste Eintrag in $grad\ u_i(\bar{c_i})$. Dann haben wir:

$$\alpha_1 [grad\ u_1(\bar{c_1})]^1 = \alpha_2 [grad\ u_2(\bar{c_2})]^1 = .. = \alpha_p [grad\ u_p(\bar{c_p})]^1$$

.
Da $\sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i = 1$, folgt hieraus, dass die $\alpha_i$ eindeutig bestimmt sind.

**Definition 5**

$$u(\alpha, e) := max\{\alpha_1 u_1(c_1) + .. + \alpha_m u_m(c_m)$$

mit der Nebenbedingung $c_i \geq 0 \ \forall i$ und $\sum\limits_{i=1}^{m} c_i \geq e$ heißt Gesamtnutzenfunktion.

Nun wollen wir das 2. Wohlstandstheorem beweisen:

**Proposition 3**
Eine Güterverteilung $(\bar{c}_i)_{i=1,..,m}$ ist ein Pareto Optimum $\Leftrightarrow$ $\alpha$ ist der zugehörige Nutzengewichtungsvektor und $(p(\alpha), (\bar{c}_i)_{i=1,..,m})$ mit $p(\alpha) = \ grad \ u(\alpha, e)$ ist ein Gleichgewicht mit Transferzahlungen.

<u>Beweis:</u>
" $\Leftarrow$ ": Wir nehmen an, die Aussage gelte nicht. Dann existiert ein $(c_i')_{i=1,..,m} \in (\mathbb{R}_+^l)^m$ mit $\sum\limits_{i=1}^{m} c_i' \leq e$, so dass $u_i(c_i') \geq u_i(\bar{c}_i) \ \forall i$ und $u_j(c_j') > u_j(\bar{c}_j)$ für mindestens ein $j$.
$\Rightarrow p(\alpha)c_i' \geq p(\alpha)\bar{c}_i \ \forall i$ und $p(\alpha)c_j' > p(\alpha)\bar{c}_j$ für mindestens ein $j$.
$\Rightarrow p(\alpha) \sum\limits_{i=1}^{m} c_i' > p(\alpha)e_i$. WIDERSPRUCH! zu $\sum\limits_{i=1}^{m} c_i' \leq e$.

" $\Leftarrow$ ": Sei also $(\bar{c}_i)_{i=1,..,m}$ ein Pareto Optimum mit zugehörigem Nutzengewichtungsvektor $\alpha$ mit $\alpha_i > 0$ für $i \in \{1, .., p\}$ und $\alpha_{p+1} = .. = \alpha_m = 0$.
Betrachte nun folgendes Gleichungssystem von $(p+1)l$ Unbekannten $(\bar{c}_i, \lambda) \in (\mathbb{R}_+^l)^p \times \mathbb{R}_{++}^l$:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \ grad \ u_1(\bar{c}_1) = \lambda \\ . \\ . \\ \alpha_p \ grad \ u_p(\bar{c}_p) = \lambda \\ \sum\limits_{i=1}^{p} \bar{c}_i = e \end{pmatrix}$$

Wir können damit zeigen (vgl. Rose-Anne Dana, Monique Jeanblanc; Financial Markets in Continuous Time, S.199;Springer), dass die Funktion $u(\alpha, \bullet)$ differenzierbar ist in e und dass gilt:

$$\lambda = \text{grad } u(\alpha, e)$$

Wir setzen:

$$p(\alpha) = \ grad \ u(\alpha, e) = \alpha_i \ grad \ u_i(\bar{c}_i)$$

$\forall i$ mit $\alpha_i > 0$.

Daraus folgt, dass $\bar{c}_i$ eine Lösung zu dem Optimalisierungs Problem $P_i$ ist, wobei $P_i$ definiert ist als:
$P_i$: maximiere $u_i(c_i)$ unter der Bedingung $p(\alpha)c_i \leq p(\alpha)\bar{c}_i$.
Falls $\alpha_i = 0 \Rightarrow \bar{c}_i = 0$ ist die optimale Lösung zu $P_i$.
Daher ist $(p(\alpha), \bar{c}_i; i = 1, .., m)$ ein Gleichgewicht mit Transferzahlungen

Hilfssatz:
Sei $\Phi : \triangle^{m-1} \to H$, $H = \{c \in \mathbb{R}^m, \sum\_i = 1^m c_i = 0\}$ eine stetige Funktion und genügt der Nebenbedingung

$$falls\ \alpha_i = 0,\ \Phi_i(\alpha) < 0$$

Dann existiert ein $\alpha_0 \gg 0$ mit $\Phi(\alpha_0) = 0$.

Der Beweis verwendet den FPS von Brower und ist eine Verallgemeinerung dieses Satzes. Dabei wird anstatt nach einer Nullstelle von $\Phi(\alpha)$ nach einem Fixpunkt von $(\Phi + Id)(\alpha)$ gesucht.

**Satz 4**
Unter den Annahmen **U1, U2, U3** existiert ein Gleichgewicht.

Beweis:
Sei $\alpha \in \triangle^{m-1}$, $[\bar{c}_i(\alpha)]_{i=1,..,m}$ die optimale Lösung zu dem zugehörigen Problem $P_\alpha$ und $(p(\alpha)(\bar{c}_i(\alpha) - e_i))_{i=1,..,m}$ die zugehörige Transferleistung. Wir wollen nun beweisen, dass ein $\alpha^*$ existiert (eine sogenannte Gleichgewichts-Gewichtung), so dass die Transferzahlungen gleich 0 sind.
Sei $\Phi : \triangle^{m-1} \to \mathbb{R}^l$ die wie folgt definierte Transferfunktion:

$$\Phi_i(\alpha) := p(\alpha)(\bar{c}_i(\alpha) - e_i) \quad \forall i.$$

Nach Definition ist $\alpha^*$ also eine Gleichgewichts-Gewichtung $\Leftrightarrow \Phi(\alpha^*) = 0$.
Um zu zeigen, dass $\Phi$ eine Nullstelle besitzt, zeigen wir zunächst die Stetigkeit.
Aus dem Maximumstheorem (vgl. Annex in Rose-Anne Dana, Monique Jeanblanc; Financial Markets in Continuous Time, Annex, S.201;Springer) folgt, dass die Lösung $[\bar{c}_i]_{i=1,..,m}$ zu $P_\alpha$ eine stetige Funktion in $\alpha$ ist. Da $p(\alpha) = \alpha_i\ grad\ u_i[\bar{c}_i(\alpha)]\ \forall i$ mit $\alpha_i > 0$, ist die Abbildung $\alpha \to p(\alpha)$ stetig und damit auch $\Phi$.
Auerdem gilt für $\Phi$:

$$\sum_{i=1}^{m} \Phi_i(\alpha) = p(\alpha)(-e + \sum_{i=1}^{m} \bar{c}_i(\alpha)) = 0$$

Falls $\alpha_i = 0$, dann ist $\bar{c}_i(\alpha) = 0$ und damit $\Phi_i(\alpha) = -p(\alpha)e_i < 0$.
Mittels des Hilfssatzes folgt nun, dass ein $\alpha^*$ existiert, so dass $\Phi(\alpha^*) = 0$ und damit ist der Beweis erbracht.