Der Zusammenhang zwischen Arbitragefreiheit und Portfoliooptimierung

Seminararbeit von Johannes Kuhn

31.05.2010

Inhaltsverzeichnis

0 Einleitung

Im ersten Teil geht es darum das Optimierungsproblem für ein Portfolio zu formulieren welches den erwarteten Nutzen des Payoffs maximiert. Dann werden wir sehen das man Portfolios genau dann optimieren kann, wenn das Modell arbitragefrei ist was zu einem alternativen Beweis des No-Arbitrage Theorems führt. Mit Hilfe des optimalen Portfolios kann dann ein äquivalentes Martingalmaß konstruiert werden. Im zweiten Teil geht es um den Zusammenhang vom exponentiellen Nutzen und der relativen Entropie. Insbesondere werden wir sehen das das äquivalente Martingalmaß die relative Entropie minimiert.

1 Arbitragefreiheit und Portfoliooptimierung

Wiederholung 1.1 (Einperioden Modell)**.** *Gegeben sei ein Modell mit $d+1$ Finanzgütern. Der feste Anfangspreis der Finanzgüter ist gegeben durch*

$$\overline{S(0)} = (S_0(0), S(0)) = (S_0(0), S_1(0), ..., S_d(0)) \in \mathbb{R}_+^{d+1}$$

sowie der zufällige Endpreis

$$\overline{S(1)} = (S_0(1), S(1)) = (S_0(1), S_1(1), ..., S_d(1))$$

mit nicht-negativen Zufallsvariablen S_i auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *Das 0-te Finanzgut ist eine risikofreie Anlage mit*

$$S_0(0) = 1 \text{ und } S_0(1) = 1 + r$$

für eine Konstante $r > -1$. Zum Zeitpunkt 0 stellt der Investor ein Portfolio

$$\overline{x} = (x_0, x) = (x_0, x_1, x_2, ..., x_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$$

auf, wobei x_i dem Anteil im i-ten Finanzgut entspricht. Der Anfangspreis eines solchen Portfolios $\overline{x}$ ist gegeben durch

$$\overline{S(0)} \cdot \overline{x} = \sum_{i=0}^{d} S_i(0)x_i$$

und der zufällige Endwert zum Zeitpunkt 1

$$\overline{x} \cdot \overline{S(1)} = \sum_{i=0}^{d} x_i S_i(1)$$

Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass das Modell nicht-redundant ist, d.h. es gilt:

$$\overline{x} \cdot \overline{S(1)} = 0 \Rightarrow \overline{x} = 0 \tag{1.1}$$

Definition 1.2 (Nutzenfunktion)**.** *Eine Funktion $u : D \mapsto \mathbb{R}$ heißt Nutzenfunktion, falls gilt:*

- *u ist strikt konkav*
- *u ist streng monoton steigend*

- *u ist stetig auf D*

$u(x)$ fällt mindestens linear für $x \downarrow \inf D$, d.h u kann nicht von unten beschränkt sein ausser es gilt $\inf D > -\infty$.

Angenommen ein Investor möchte einen gegebenen Betrag ω in den Finanzmarkt investieren und seine Präferenzen können als eine Nutzenfunktion $\tilde{u}$ beschrieben werden. Die Wahl des Portfolios $\overline{x}$ wird in Abhängigkeit von dem mittleren erwarteten Nutzen

$$E[\tilde{u}(\overline{x} \cdot \overline{S(1)}] \tag{1.2}$$

getroffen, so dass das Portfolio $\overline{x}$ die Bedingung

$$\overline{S(0)} \cdot \overline{x} \leq \omega \tag{1.3}$$

erfüllt. Es soll (1.2) unter der Bedingung (1.3) maximiert werden.

Bemerkung 1.3.

- *Wir nehmen an dass $\overline{x} \cdot \overline{S(1)}$ P-f.s. im Definitionsbereich von $\tilde{u}$ liegt.*
- *Es reicht Portfolios mit $\overline{S(0)} \cdot \overline{x} = \omega$ zu betrachten, da sonst $(x_0 + \omega - \overline{S(0)} \cdot \overline{x}, x)$ ein echt besseres Portfolio ist.*
- *Für alle $x \in \mathbb{R}^d$ existiert eine eindeutig bestimmte numeraire Komponente $x_0 \in \mathbb{R}$, so dass $\overline{x} = (x_0, x)$ die Bedingung $\overline{S(0)} \cdot \overline{x} = \omega$ erfüllt.*

Wir wollen nun das ursprüngliche bedingte Maximierungsproblem in ein äquivalentes unbedingtes Maximierungsproblem überführen indem wir den abdiskontierten Profit

$$\frac{\overline{x} \cdot \overline{S(1)}}{1+r} - \overline{S(0)} \cdot \overline{x} = x \cdot Y \Leftrightarrow \overline{x} \cdot \overline{S(1)} = (1+r)(x \cdot Y + \omega)$$

für ein Portfolio $\overline{x}$ betrachten. Definiere nun u als Transformation von $\tilde{u}$ wie folgt:

$$u(y) := \tilde{u}[(1+r)(y+\omega)].$$

$u : D \mapsto \mathbb{R}$ ist wieder eine Nutzenfunktion und wir erhalten das unbedingte Optimierungsproblem $E[u(x \cdot Y)]$ unter allen $x \in \mathbb{R}^d$ zu maximieren, so dass $x \cdot Y \in D$.

Bemerkung 1.4. *Wir nehmen folgende Fälle an:*

- *$D = \mathbb{R}$ In diesem Fall sind alle Portfolios $x \in \mathbb{R}^d$ zulässig aber wir nehmen an, dass u von oben beschränkt ist.*
- *$D = [a, \infty)$ für ein $a < 0$. In diesem Fall lassen wir nur Portfolios $x \in \mathbb{R}^d$ mit $x \cdot Y \geq a$ P-f.s. und nehmen an, dass $E[u(x \cdot Y)] < \infty$ f.a. $x \in \mathbb{R}^d$ mit $x \cdot Y \geq a$ P-f.s gilt.*

Als Notation setzen wir

$$\mathcal{S}(D) := \left\{x \in \mathbb{R}^d \mid x \cdot Y \in D \text{ P-f.s.}\right\}$$

die Menge aller zulässigen Portfolios für D. Als nächstes wollen wir zeigen das die Existenz eines optimalen x^*, welches den erwarteten Nutzen $E[u(x \cdot Y)]$ unter allen $x \in \mathcal{S}(D)$ maximiert, äquivalent ist zur Arbitragefreiheit. Für den Beweis benötigen wir die folgenden zwei Lemmata.

Lemma 1.5. *Sei* $D = [a, \infty),\ 0 \leq b < |a|,\ \alpha \in (0,1]$ *und* X *eine nicht-negative Zufallsvariable.* $u : D \mapsto \mathbb{R}$ *stetig, strikt konkav und streng monoton steigend. Dann gilt:*

$$E[u(\alpha X - b)] < \infty \Longrightarrow E[u(X)] < \infty$$

Beweis: Durch Erweitern und Ausnutzen der Konkavität von u gilt:

$$\frac{u(X) - u(0)}{X} = \frac{\alpha u(X) + (1-\alpha)u(0) - u(0)}{\alpha X} \leq \frac{u(\alpha X) - u(0)}{\alpha X}$$

Da der Differenzenquotient von u in beiden Variablen monoton fallend ist gilt:

$$\leq \frac{u(\alpha X - b) - u(-b)}{\alpha X - b - (-b)}.$$

Umformen liefert dann:

$$u(X) \leq \frac{1}{\alpha} u(\alpha X - b) - u(-b) + u(0)$$

$u(X)$ wird also durch ein Vielfaches von $u(\alpha X - b)$ plus eine Konstante majorisiert und somit folgt die Behauptung. □

Lemma 1.6. *Sei* $h : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *eine konvexe und unterhalbstetige Funktion mit* $h(0) < \infty$*. Dann nimmt* h *ihr Minimum an falls gilt:*

$$\lim_{\alpha \uparrow \infty} h(\alpha x) = +\infty \text{ f.a. } x \in \mathbb{R}^d \text{ mit } x \neq 0 \tag{1.4}$$

Beweis: Sei $\lim_{\alpha \uparrow \infty} h(\alpha x) = +\infty$ f.a. $x \in \mathbb{R}^d$ mit $x \neq 0$. Wir wollen zeigen dass die Menge $\{h \leq c\}$ kompakt ist für $c > \inf h$. Dann folgt dasd die Menge der Minima von h

$$\left\{x \in \mathbb{R}^d \mid h(x) = \inf\ h\right\} = \bigcap_{c > \inf\ h} \left\{x \in \mathbb{R}^d \mid h(x) \leq c\right\}$$

als Schnitt einer fallenden nicht leeren Folge von kompakten Mengen nicht leer ist.
Annahme: $\{h \leq c\}$ mit $c > \inf\ h$ ist nicht kompakt.
Dann existiert eine nicht beschränkte Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\{h \leq c\}$, so dass $|x_n| \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} \infty$ gilt. Wir nehmen an das $\frac{x_n}{|x_n|} \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} x \neq 0$ gilt, falls nötig gehen wir über zu einer Teilfolge. Für $\alpha > 0$ gilt dann:

$$\begin{aligned} h(\alpha x) &\leq \liminf_{n \uparrow \infty} h(\alpha \frac{x_n}{|x_n|}) = \liminf_{n \uparrow \infty} h(\frac{\alpha}{|x_n|} x_n + (1 - \frac{\alpha}{|x_n|})0) \\ &\leq \liminf_{n \uparrow \infty} \frac{\alpha}{|x_n|} c + (1 - \frac{\alpha}{|x_n|}) h(0) = \liminf_{n \uparrow \infty} (\frac{\alpha}{|x_n|} c + h(0) - \frac{\alpha}{|x_n|} h(0)) \\ &= h(0)\ < \infty. \end{aligned}$$

$\lightning$ zur Voraussetung. □

Satz 1.7 (No-Arbitrage Theorem)**.** *Sei* $u : D \mapsto \mathbb{R}$ *eine Nutzenfunktion welche die Bemerkung 1.4 erfüllt. Dann sind äquivalent:*

1. *Es existiert ein x^* welches den erwarteten Nutzen $E[u(x \cdot Y)]$ unter allen $x \in \mathcal{S}(D)$ maximiert.*

2. *Das Modell ist arbitragefrei.*

Insbesondere folgt aus (1.1) die Eindeutigkeit von x^*.

Beweis: Aus (1.1) folgt dass die Funktion $x \mapsto E[u(x \cdot Y)]$ strikt konkav ist und somit ist das Maximum eindeutig bestimmt.
$1) \Rightarrow 2)$:
Annahme: Das Modell ist nicht arbitragefrei.
Dann existiert ein Arbitrage $z \in \mathbb{R}^d$ mit $z \neq 0$ und $z \cdot Y \geq 0$ P-f.s. Maximiere $x^* \in \mathcal{S}(D)$ den erwarteten Nutzen $E[u(x \cdot Y)]$. Addieren wir nun z zu x^*, so erhalten wir:

$$E[u(x^* \cdot Y)] < E[u((x^* + z) \cdot Y)]$$

$\lightning$ zur Optimalität von x^*.
$2) \Rightarrow 1)$:
1. Fall: $D = [a, \infty)$ für $a \in (-\infty, 0)$
Wir wollen zeigen das $\mathcal{S}(D)$ kompakt ist.
Annahme: $\mathcal{S}(D)$ ist nicht kompakt.
Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{S}(D)$, so dass wieder $|x_n| \overset{n \to \infty}{\to} \infty$. Setze $z_n := \frac{x_n}{|x_n|}$ und wir nehmen an, dass $z_n \overset{n \to \infty}{\to} z \neq 0 \in \mathbb{R}^d$ konvergiert. Dann gilt:

$$z \cdot Y = \lim_{n \uparrow \infty} \frac{x_n \cdot Y}{|x_n|} \geq \lim_{n \uparrow \infty} \frac{a}{|x_n|} = 0 \text{ P-f.s.}$$

Somit erhalten wir dass $\overline{z} := (-S(0) \cdot z, z)$ eine Arbitragemöglichkeit ist, denn es gilt:

$$\overline{z} \cdot \overline{S(0)} = -S(0) \cdot z + S(0) \cdot z = 0$$

sowie

$$\overline{z} \cdot \overline{S(1)} = (-S(0) \cdot z)(1 + r) + z \cdot S(1) = (1 + r)(z \cdot Y) \geq 0 \text{ P-f.s.}$$

$\lightning$ zur Arbitragefreiheit und somit ist $\mathcal{S}(D)$ kompakt.
Als nächstes wollen wir zeigen dass die Funktion

$$x \mapsto E[u(x \cdot Y)]\ , x \in \mathcal{S}(D) \tag{1.5}$$

stetig ist. Definiere dazu $z \in \mathbb{R}^d$ wie folgt:

$$z_i := 0 \vee \max_{x \in \mathcal{S}(D)} x_i < \infty$$

Offensichtlich gilt $z \cdot S(1) \geq x \cdot S(1)$ für alle $x \in \mathcal{S}(D)$ und

$$x \cdot Y = \frac{x \cdot S(1)}{1 + r} - S(0) \cdot x \leq \frac{z \cdot S(1)}{1 + r} - (0 \wedge \min_{x' \in \mathcal{S}(D)} S(0) \cdot x')$$

Da u streng monoton steigend ist, gilt $u(x \cdot Y) \leq u(\frac{z \cdot S(1)}{1+r} - (0 \wedge \min_{x' \in \mathcal{S}(D)} S(0) \cdot x'))$. z ist nach Definition nicht negativ und deswegen ist $z \cdot Y$ von unten beschränkt durch $-S(0) \cdot z$. Weiterhin existiert ein $\alpha \in (0, 1]$, so dass $\alpha S(0) \cdot z < |a|$. Also ist $\alpha z \in \mathcal{S}(D)$ und somit folgt mit Bemerkung 1.4:

$$E[u(\alpha z \cdot Y)] = E[u(\alpha \frac{z \cdot S(1)}{1 + r} - \alpha S(0) \cdot z)] < \infty$$

Anwendung von Lemma 1.5 mit $b = \alpha S(0) \cdot z$ liefert dann:

$$E[u(\frac{z \cdot S(1)}{1+r})] = E[u(\frac{z \cdot S(1)}{1+r} - (0 \wedge \min_{x' \in \mathcal{S}(D)} S(0) \cdot x') + (0 \wedge \min_{x' \in \mathcal{S}(D)} S(0) \cdot x'))] < \infty$$

Weitere Anwendung von Lemma 1.5 mit $b = -(0 \wedge \min_{x' \in \mathcal{S}(D)} S(0) \cdot x')$ liefert nun:

$$E[u(\frac{z \cdot S(1)}{1+r} - (0 \wedge \min_{x' \in \mathcal{S}(D)} S(0) \cdot x'))] < \infty$$

Also haben wir eine integrierbare Majorante von $u(x \cdot Y)$ gefunden und der Satz von der majorisierten Konvergenz zusammen mit der Stetigkeit von u liefert für alle Folgen $x_n \to x$, dass gilt:

$$\lim_{n \to \infty} E[u(x_n \cdot Y)] = E[u(x \cdot Y)]$$

Somit ist (1.5) stetig und nimmt ihr Maximum auf D an.
2. Fall: $D = \mathbb{R}$
Betrachte die konvexe Funktion $h(x) := -E[u(x \cdot Y)]$. Wir wollen zeigen das h unterhalbstetig ist. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{S}(D) = \mathbb{R}^d$ mit $\lim_{n \to \infty} x_n = x \in \mathbb{R}^d$. Wegen Bemerkung 1.4 sind die Zufallsvariablen $-u(x_n \cdot Y)$ alle von unten beschränkt und wir können das Lemma von Fatou anwenden (addiere Konstante um positive Funktionenfolge zu erhalten). Dann gilt:

$$\liminf_{n \to \infty} h(x_n) = \liminf_{n \to \infty} -E[u(x_n \cdot Y)] \geq E[-u(x \cdot Y)] = h(x)$$

Somit ist h unterhalbstetig. Als nächstes wollen wir zeigen das die Arbitragefreiheit äquivalent ist zur Bedingung (1.4) aus dem Lemma 1.6. Wir wissen das das Modell genau dann arbitragefrei ist, wenn für jedes $x \neq 0 \in \mathbb{R}^d$ gilt: $P[\{x \cdot Y < 0\}] > 0$. Da u als Nutzenfunktion strikt monoton steigend, konkav und in diesem Fall nach unten nicht beschränkt ist, gilt nach Definition 1.2:

$$\{x \cdot Y < 0\} = \left\{ \lim_{\alpha \uparrow \infty} u(\alpha x \cdot Y) = -\infty \right\}, x \in \mathbb{R}^d$$

Weiterhin gilt $P[\{\lim_{\alpha \uparrow \infty} u(\alpha x \cdot Y) = -\infty\}] > 0$ genau dann, wenn

$$\lim_{\alpha \uparrow \infty} E[u(\alpha x \cdot Y)] = -\infty$$

da u nach Bemerkung 1.4 von oben beschränkt ist. Nun können wir Lemma 1.6 anwenden und erhalten die Behauptung. $\square$

Satz 1.8. *Sei u eine stetig differenzierbare Nutzenfunktion auf D, so dass* $E[u(x \cdot Y)] < \infty$ *für alle* $x \in \mathcal{S}(D)$. *Maximiere* x^* $E[u(x \cdot Y)]$ *unter allen* $x \in \mathcal{S}(D)$ *und gelte eine der folgenden Bedingungen:*

- *u ist definiert auf* $D = \mathbb{R}$ *und von oben beschränkt*
- *u ist definiert auf* $D = [a, \infty)$ *und* x^* *ist ein innerer Punkt von* $\mathcal{S}(D)$.

Dann gilt:

$$u'(x^* \cdot Y)|Y| \in \mathcal{L}^1(P) \tag{1.6}$$

und

$$E[u'(x^* \cdot Y)Y] = 0 \tag{1.7}$$

Beweis: Sei $x \in \mathcal{S}(D)$ und $\varepsilon \in (0,1]$. Definiere $x_\varepsilon := \varepsilon x + (1-\varepsilon)x^*$ und

$$\Delta_\varepsilon := \frac{u(x_\varepsilon \cdot Y) - u(x^* \cdot Y)}{\varepsilon}.$$

Da u konkav ist gilt: $\varepsilon \leq \delta \Rightarrow \Delta_\varepsilon \geq \Delta_\delta$ und die Taylorentwicklung im Punkt $x^* \cdot Y$ liefert

$$u(x_\varepsilon \cdot Y) = u(\varepsilon x \cdot Y + (1-\varepsilon)x^* \cdot Y) = u(x^* \cdot Y) + u'(x^* \cdot Y)(\varepsilon x \cdot Y + (1-\varepsilon)x^* \cdot Y - x^* \cdot Y) + o(\varepsilon^2)$$

$$= u(x^* \cdot Y) + u'(x^* \cdot Y)\varepsilon(x - x^*) \cdot Y + o(\varepsilon^2)$$

Damit gilt: $\Delta_\varepsilon \nearrow u'(x^* \cdot Y)(x - x^*) \cdot Y$ für $\varepsilon \downarrow 0$ Nach Voraussetzung ist $u(x \cdot Y) \in \mathcal{L}^1(P)\ \forall x \in \mathcal{S}(D)$ und somit ebenfalls $\Delta_1 = u(x \cdot Y) - u(x^* \cdot Y) \in \mathcal{L}^1(P)$. Nach dem Satz der monotonen Konvergenz, sowie der Maximalität von x^* gilt dann:

$$0 \geq E[\Delta_\varepsilon] \nearrow E[u'(x^* \cdot Y)(x - x^*) \cdot Y] \text{ für } \varepsilon \downarrow 0 \tag{1.8}$$

Nach beiden Voraussetzungen ist x^* ein innerer Punkt von $\mathcal{S}(D)$ und indem wir $z := x - x^*$ setzen erhalten wir aus (1.8):

$$E[u'(x^* \cdot Y)z \cdot Y] \leq 0$$

für alle z in einem kleinem Ball um den Ursprung von $\mathbb{R}$. Ersetzt man z durch $-z$ so sieht man, dass der Erwartungswert verschwindet. □

Korollar 1.9. *Sei das Modell arbitragefrei und die Nutzenfuntkion $u : D \mapsto \mathbb{R}$ sowie der Maximierer x^* erfüllen die Voraussetzungen aus Satz 1.8. Dann definiert*

$$\frac{dP^*}{dP} = \frac{u'(x^* \cdot Y)}{E[u'(x^* \cdot Y)]} \tag{1.9}$$

ein äquivalentes Martingalmaß.

Beweis: P^* ist ein äquivalentes Martingalmaß genau dann, wenn $E^*[Y] = 0$. Nach Satz 1.8 ist $u'(x^* \cdot Y)Y$ integrierbar bezüglich P und der Erwartungswert verschwindet. Also reicht es zu zeigen, dass P^* wohldefiniert ist, d.h. $u'(x^* \cdot Y) \in \mathcal{L}^1(P)$. Setze dazu $c := \sup\{u'(y) | y \in D \text{ und } |y| \leq |x^*|\}$. Dann gilt:

$$c \leq \begin{cases} u'(a) & , D = [a, \infty) \\ u'(-|x^*|) & , D = \mathbb{R} \end{cases}$$

Da u nach Voraussetzung auf ganz D stetig differenzierbar ist, ist dies endlich. Somit folgt:

$$0 \leq u'(x^* \cdot Y) \leq c + u'(x^* \cdot Y)|Y|\mathbf{1}_{\{|Y| \geq 1\}}$$

Die rechte Seite hat endlichen Erwartungswert und es folgt die Behauptung. □

Beispiel 1.10. *Betrachte die exponentielle Nutzenfunktion $u(x) = 1 - e^{-\alpha x}$ mit konstanter absoluter Risikoaversion $\alpha > 0$. Die Voraussetzung dass $E[u(x \cdot Y)]$ endlich ist, ist äquivalent zu $E[e^{x \cdot Y}] < \infty$ f.a. $x \in \mathbb{R}^d$. Sei x^* optimal für den erwarteten Nutzen $E[u(x \cdot Y)]$, dann hat das äquivalente Martingalmaß P^* die P-Dichte:*

$$\frac{dP^*}{dP} = \frac{e^{-\alpha x^* \cdot Y}}{E[e^{-\alpha x^* \cdot Y}]}.$$

P^* ist unabhängig von α , da x^* den erwarteten Nutzen genau dann optimiert, wenn $\lambda^* := -\alpha x^*$ die Momentenfunktion:

$$Z(\lambda) := E[e^{\lambda \cdot Y}] \ , \ \lambda \in \mathbb{R}^d$$

von Y minimiert.

Im nächsten Abschnitt wird P^* dadurch charakterisiert, das es die relative Entropie bezüglich P unter allen äquivalenten Martingalmaßen in $\mathcal{P}$ minimiert.

2 Exponentieller Nutzen und relative Entropie

Wir betrachten nun CARA (constant absolute risk aversion) Nutzenfunktionen

$$u(x) = 1 - e^{-\alpha x} \quad , \ \alpha > 0$$

um das Problem der Portfoliooptimierung genauer zu betrachten. Die Hauptannahme für dieses Problem ist

$$E[u(x \cdot Y)] > -\infty \ f.a. \ x \in \mathbb{R}^d \tag{2.10}$$

Im vorherigen Beispiel 1.10 haben wir gesehen, dass wir die Maximierung von $E[u(x \cdot Y)]$ auf die Minimierung von $Z(\lambda)$ reduzieren können, welches unabhängig von α ist. Weiterhin gilt (2.10) ist äquivalent zu

$$Z(\lambda) < \infty \text{ f.a. } \lambda \in \mathbb{R}^d \tag{2.11}$$

Im folgenden nehmen wir an, dass dies immer gilt.

Lemma 2.1. *$Z(\lambda) < \infty$ f.a. $\lambda \in \mathbb{R}^d \ \Leftrightarrow \ E[e^{\alpha |Y|}] < \infty$ f.a. $\alpha > 0$.*

Beweis: $\Leftarrow$ ist klar!
$\Rightarrow$
Wähle $c > 0$, so dass gilt $|Y| \leq c \cdot \sum_{i=1}^d |Y_i|$. Dann erhalten wir:

$$E[e^{\alpha |Y|}] \leq E[e^{\alpha c \sum_{i=1}^d |Y_i|}]$$

Die Hölder-Ungleichung liefert:

$$\leq \prod_{i=1}^d E[e^{\alpha c d |Y_i|}]^{\frac{1}{d}}$$

Wähle nun $\lambda \in \mathbb{R}^d$ mit $\lambda_i = \alpha c d$ und $\lambda_j = 0$ für $i \neq j$ und wir erhalten für ein beliebiges i:

$$E[e^{\alpha c d |Y_i|}] \leq E[e^{\lambda \cdot Y}] + E[e^{-\lambda \cdot Y}] < \infty$$

Somit ist jeder Faktor endlich nach Voraussetzung und es folgt die Behauptung.
□

Definition 2.2 (exponentielle Familie)**.** *Die exponentielle Familie von P bezüglich Y ist die Menge der Maße*

$$\{P_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}^d\}$$

definiert durch:

$$\frac{dP_\lambda}{dP} = \frac{e^{\lambda \cdot Y}}{Z(\lambda)}$$

Im nächstens Abschnitt schauen wir uns die Baryzentren der Elemente der exponentiellen Familie von P bezüglich Y an.
Setze dazu $m(\lambda) := E_\lambda[Y] = \frac{1}{Z(\lambda)}E[Ye^{\lambda\cdot Y}]$, $\lambda \in \mathbb{R}^d$.

Lemma 2.3. *Z ist eine glatte Funktion auf $\mathbb{R}^d$ und der Gradient von $\log Z$ im Punkt λ ist gleich dem Erwartungswert von Y bezüglich P_λ, d.h. es gilt:*

$$(\nabla \log Z)(\lambda) = m(\lambda) = \frac{1}{Z(\lambda)}E[Ye^{\lambda\cdot Y}].$$

Ebenfalls ist die Hessematrix von $\log Z$ im Punkte λ gleich der Kovarianzmatrix $(cov_{P_\lambda}(Y_i, Y_j))_{i,j}$ von Y bezüglich P_λ, d.h. es gilt:

$$\frac{\partial^2}{\partial\lambda_i\partial\lambda_j}\log Z(\lambda) = cov_{P_\lambda}(Y_i, Y_j) = E_\lambda[Y_iY_j] - E_\lambda[Y_i]E_\lambda[Y_j]$$

Insbesondere ist $\log Z$ konvex.

Beweis: Es gilt:

$$|\frac{\partial e^{\lambda\cdot Y}}{\partial\lambda_i}| = |x_i|e^{\lambda\cdot Y} \leq e^{(1+|\lambda|)\cdot|Y|}. \tag{2.12}$$

Mit Hilfe von Lemma 2.1 erhalten wir eine integriebare Majorante (2.12) und der Satz von der majorisierten Konvergenz erlaubt es uns Integration und Differentiation zu vertauschen. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
(\nabla \log Z)(\lambda) &= \frac{1}{Z(\lambda)}\nabla E[(e^{\lambda\cdot Y})(\lambda)] \\
&= \frac{1}{Z(\lambda)}(\frac{\partial E[e^{\lambda\cdot Y}]}{\partial\lambda_1}, ..., \frac{\partial E[e^{\lambda\cdot Y}]}{\partial\lambda_d}) \\
&= \frac{1}{Z(\lambda)}(E[Y_1e^{\lambda\cdot Y}], ..., E[Y_de^{\lambda\cdot Y}]) = \frac{1}{Z(\lambda)}E[Ye^{\lambda\cdot Y}] = m(\lambda)
\end{aligned}$$

Sowie:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial\lambda_i\partial\lambda_j}\log Z(\lambda) &= \frac{\partial}{\partial\lambda_j}\frac{1}{Z(\lambda)}E[Y_ie^{\lambda\cdot Y}] \\
&= \frac{Z(\lambda)E[Y_iY_je^{\lambda\cdot Y}] - E[Y_je^{\lambda\cdot Y}]E[Y_ie^{\lambda\cdot Y}]}{Z(\lambda^2)} \\
&= E_\lambda[Y_iY_j] - E_\lambda[Y_i]E_\lambda[Y_j]
\end{aligned}$$

□

Definition 2.4. *Sei $\mu := P^Y$ die Verteilung von Y unter P.*

- $\Gamma(\mu) := conv(supp(\mu)) = \{\sum_{k=1}^n a_k y_k \mid a_k \geq 0,\ \sum_{k=1}^n a_k = 1,\ y \in supp(\mu),\ n \in \mathbb{N}\}$
- $ri\ \Gamma(\mu) := \{x \in \Gamma(\mu) \mid \forall y \in \Gamma(\mu)\ \exists \varepsilon > 0\ mit\ x - \varepsilon(y-x) \in \Gamma(\mu)\}$

Korollar 2.5. *Die Funktion nimmt*

$$\lambda \mapsto \lambda \cdot m_0 - \log Z(\lambda)$$

ihr Maximum an genau dann, wenn m_0 in dem relativen Inneren der konvexen Hülle vom Support von μ ist, also

$$m_0 \in ri\ \Gamma(\mu)$$

In diesem Fall gilt für jeden Maximierer λ^*:

$$m_0 = m(\lambda^*) = E_{\lambda^*}[Y]$$

Gilt (1.1) dann ist λ^* eindeutig. Insbesondere ist die Menge $\{m(\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}^d\}$ $= ri\ \Gamma(\mu)$

Beweis: Setze $\widetilde{Y} := Y - m_0$, dann erhalten wir

$$\lambda \cdot m_0 - \log Z(\lambda) = \lambda \cdot m_0 - \log E[e^{\lambda \cdot (\widetilde{Y} + m_0)}]$$

$$= \lambda \cdot m_0 - (\log E[e^{\lambda \cdot \widetilde{Y}}] + \lambda \cdot m_0) = -\log E[e^{\lambda \cdot \widetilde{Y}}]$$

Somit haben wir das Problem auf den Fall mit $m_0 = 0$ reduziert. Anwendung von Satz 1.7 liefert die Äquivalenz der Arbitragefreiheit zu der Existenz eines Maximierers λ^* von $-\log Z$. Mit Korollar 1.9 folgt: $m(\lambda^*) = 0$ und $0 \in ri\ \Gamma(\mu)$, da $0 \in M_b(\mu) := \left\{\int y\ \nu dy \mid \nu \approx \mu,\ \frac{d\nu}{d\mu} \text{ ist beschränkt}, \int |y| \nu dy < \infty\right\} = ri\ \Gamma(\mu)$. □

Definition 2.6 (relative Entropie)**.** *Die relative Entropie eines Wahrscheinlichkeitsmaßes Q bezüglich P ist definiert als*

$$H(Q|P) := \begin{cases} E[\frac{dQ}{dP} \log \frac{dQ}{dP}] & falls\ Q \ll P \\ +\infty & sonst \end{cases}$$

Satz 2.7. *Sei $m_0 := m(\lambda_0)$ für ein $\lambda_0 \in \mathbb{R}^d$. Dann gilt für jedes Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf $(\Omega, \mathcal{F})$ mit $E_Q[Y] = m_0$:*

$$H(Q|P) \geq H(P_{\lambda_0}|P) = \lambda_0 \cdot m_0 - \log Z(\lambda_0)$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn $Q = P_{\lambda_0}$. Insbesondere maximiert λ_0 die Funktion

$$\lambda \cdot m_0 - \log Z(\lambda) \text{ über alle } \lambda \in \mathbb{R}^d$$

Beweis: Sei Q ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{F})$ mit $E_Q[Y] = m_0$. Wir zeigen zuerst

$$H(Q|P) = H(Q|P_\lambda) + \lambda \cdot m_0 - \log Z(\lambda) \tag{2.13}$$

1.Fall: $Q \not\ll P$
Klar , da nach Definiton 2.6 beide Seiten unendlich sind.

2. Fall: $Q \ll P$
Es gilt:

$$\frac{dQ}{dP} = \frac{dQ}{dP_\lambda}\frac{dP_\lambda}{dP} = \frac{dQ}{dP_\lambda}\frac{e^{\lambda\cdot Y}}{Z(\lambda)}$$

Und somit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
H(Q|P) &= E[\frac{dQ}{dP}\log\frac{dQ}{dP}] = E[\frac{dQ}{dP}\log\frac{dQ}{dP_\lambda}\frac{e^{\lambda\cdot Y}}{Z(\lambda)}] \\
&= E[\frac{dQ}{dP}\log\frac{dQ}{dP_\lambda}] + E[\frac{dQ}{dP}\log\frac{e^{\lambda\cdot Y}}{Z(\lambda)}] \\
&= H(Q|P_\lambda) + \lambda\cdot E[\frac{dQ}{dP}Y] - \log Z(\lambda) \\
&= H(Q|P_\lambda) + \lambda\cdot m_0 - \log Z(\lambda)
\end{aligned}$$

Also ist (2.13) gezeigt. Wendet man nun die Jensen'sche Ungleichung auf die strikt konvexe Funktion $h(x) = x\log x$ an erhalten wir

$$H(Q|P_\lambda) = E[h(\frac{dQ}{dP_\lambda})] \geq h(1) = 0 \tag{2.14}$$

und Gleicheit genau dann, wenn $Q = P_\lambda$. Somit folgt

$$H(Q|P) \geq \lambda\cdot m_0 - \log Z(\lambda) \tag{2.15}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}^d$ und Maße Q mit $E_Q[Y] = m_0$ und Gleichheit gilt genau dann, wenn $Q = P_\lambda$. λ muss so sein , dass $m(\lambda) = m_0$ gilt. Insbesondere gilt für solche λ:

$$\begin{aligned}
H(P_\lambda|P) &= E[\frac{dP_\lambda}{dP}\log\frac{dP_\lambda}{dP}] = E[\frac{e^{\lambda\cdot Y}}{Z(\lambda)}\log\frac{e^{\lambda\cdot Y}}{Z(\lambda)}] \\
&= \lambda\cdot E[Y\frac{e^{\lambda\cdot Y}}{Z(\lambda)}] - \log Z(\lambda) \\
&= \lambda\cdot m(\lambda) - \log Z(\lambda) = \lambda\cdot m_0 - \log Z(\lambda)
\end{aligned}$$

Also maximiert λ_0 die rechte Seite von (2.15) nach Korollar 2.5 und P_{λ_0} minimiert die relative Entropie auf der Menge

$$M_0 := \{Q \mid E_Q[Y] = m_0\}$$

Jedoch ist $H(Q|P)$ ein strikt konvexes Funktional von Q und somit gibt es höchstens ein Minimierer in der konvexen Menge M_0. Also induziert jedes λ mit $m(\lambda) = m_0$ das gleiche Maß P_{λ_0}. □

Setzt man $m_0 = 0$ erhalten wir mit dem folgendem Korollar ein spezielles äquivalentes Martingalmaß, welches die relative Entropie minimiert. Es wird auch Esscher Transformation von P genannt.

Korollar 2.8. *Sei das Modell arbitragefrei. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes äuivalentes Martingalmaß $P^* \in \mathcal{P}$, welches die relative Entropie $H(\hat{P}|P)$ über alle $\hat{P} \in \mathcal{P}$ minimiert. Die Dichte von P^* hat die Form*

$$\frac{dP^*}{dP} = \frac{e^{\lambda^*\cdot Y}}{E[e^{\lambda^*\cdot Y}]}$$

wobei λ^* der Minimierer der Momentenfunktion $E[e^{\lambda^* \cdot Y}]$ von Y ist.

Beweis: Folgt aus Korollar 2.5 und Satz 2.7 $\square$

Lemma 2.9. *Für jedes Wahrscheinlichkeitsmaß Q gilt:*

$$\begin{aligned} H(Q|P) &= \sup_{Z \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)} (E_Q[Z] - \log E[e^Z]) \\ &= \sup \left\{ E_Q[Z] - \log E[e^Z] \mid e^Z \in \mathcal{L}^1(P) \right\} \end{aligned}$$

das zweite Supremum wird bei $Z := \log \frac{dQ}{dP}$ angenommen, falls $Q \ll P$.

Beweis: "$\geq$"
Angenommen $H(Q|P) < \infty$. Für Z mit $e^Z \in \mathcal{L}^1(P)$ sei P^Z definiert durch

$$\frac{dP^Z}{dP} = \frac{e^Z}{E[e^Z]}$$

P^Z ist äquivalent zu P und es gilt:

$$\log \frac{dQ}{dP} = \log \frac{dQ}{dP^Z} + \log \frac{dP^Z}{dP}$$

Somit erhalten wir:

$$\begin{aligned} H(Q|P) = E[\frac{dQ}{dP} \log \frac{dQ}{dP}] &= E[\frac{dQ}{dP} \log \frac{dQ}{dP^Z}] + E[\frac{dQ}{dP} \log \frac{dP^Z}{dP}] \\ &= H(Q|P^Z) + E_Q[Z] - \log E[e^Z] \end{aligned}$$

Da $H(Q|P^Z) \geq 0$ nach (2.14) folgt die Behauptung.
"$\leq$"
1.Fall: $Q \not\ll P$
Sei $Z_n := n\mathbf{1}_A$ mit A so, dass $Q(A) > 0$ und $P(A) = 0$. Dann gilt für $n \to \infty$:

$$E_Q[Z_n] - \underbrace{\log E[e^{Z_n}]}_{=0,\ da P(A)=0} = nQ(A) \to \infty = H(Q|P)$$

2. Fall: $Q \ll P$ mit Dichte $\varphi = \frac{dQ}{dP}$
Setze $Z := \log \varphi$. Wir wollen zuerst $e^Z \in \mathcal{L}^1(P)$ zeigen. Sei dafür $Z_n = (-n) \vee (\log \varphi) \wedge n$. Dann gilt:

$$E[e^{Z_n}] = \underbrace{E[e^{Z_n} \mathbf{1}_{\{\varphi \geq 1\}}]}_{monotone\ Konvergenz} + \underbrace{E[e^{Z_n} \mathbf{1}_{\{\varphi < 1\}}]}_{majorisierende\ Konvergenz} \to E[e^{\log \varphi}] = 1$$

Wegen $x \log x \geq -\frac{1}{e}$ gilt $\varphi Z_n \geq -\frac{1}{e}$ für alle n. Das Lemma von Fatou liefert nun

$$\liminf_{n \uparrow \infty} E_Q[Z_n] = \liminf_{n \uparrow \infty} E[\varphi Z_n] \geq E[\varphi \log \varphi] = H(Q|P)$$

Dann gilt: $\liminf_{n \uparrow \infty} (E_Q[Z_n] - \log E[e^{Z_n}]) \geq E[\varphi \log \varphi] - \log 1 \geq H(Q|P)$ und es folgt die Behauptung. $\square$

Lemma 2.10. *Für alle $\alpha \geq 0$ ist die Menge*

$$\Phi_\alpha := \{\varphi \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P) \mid \varphi \geq 0,\ E[\varphi] = 1,\ E[\varphi \log \varphi] \leq \alpha\}$$

schwach Folgenkompakt in $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Beweis: Sei $L^p := L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Die Menge aller P-Dichten

$$\mathcal{D} := \{\varphi \in L^1 \mid \varphi \geq 0,\ E[\varphi] = 1\}$$

ist konvex und abgeschlossen in L^1. Also ist die Menge schwach abgeschlossen in L^1. Ebenfalls gilt nach Lemma 2.9 für $\varphi \in \mathcal{D}$

$$E[\varphi \log \varphi] = \sup_{Z \in L^\infty} (E[Z\varphi] - \log E[e^Z])$$

Insbesondere ist $\varphi \mapsto E[\varphi \log \varphi]$ ein schwach unterhalbstetiges Funktional auf $\mathcal{D}$ und somit ist Φ_α schwach abgeschlossen. $\square$

Satz 2.11. *Für $m \in \mathbb{R}^d$ gilt:*

$$\inf_{E_Q[Y]=m} H(Q|P) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^d} [\lambda \cdot m - \log Z(\lambda)]$$

Beweis: Mit Hilfe von Korollar 2.5 und Satz 2.7 gilt für $m \in ri\ \Gamma(\mu)$:

$$\min_{E_Q[Y]=m} H(Q|P) = \max_{\lambda \in \mathbb{R}^d} [\lambda \cdot m - \log Z(\lambda)]$$

Wegen der Ungleichung (2.15) bleibt zu zeigen für $m \notin ri\ \Gamma(\mu)$:

$$\inf_{E_Q[Y]=m} H(Q|P) \leq \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^d} [\lambda \cdot m - \log Z(\lambda)]$$

Die rechte Seite wird auch Fenchel-Legendre Transformation im Punkt m der konvexen Funktion $\log Z$ genannt und wir schreiben dafür: $(\log Z)^*(m)$
Betrachte nun $m \notin \overline{\Gamma}(\mu)$. Der Trennungssatz liefert ein $\xi \in \mathbb{R}^d$ mit

$$\xi \cdot m > \sup \{\xi \cdot x \mid x \in \overline{\Gamma}(\mu)\} \geq \sup \{\xi \cdot x \mid x \in supp(\mu)\}$$

Setze $\lambda_n := n\xi$ und es folgt:

$$\lambda_n \cdot m - \log Z(\lambda_n) \geq n\underbrace{(\xi \cdot m - \sup_{y \in supp(\mu)} \xi \cdot y)}_{>0} \to \infty$$

Somit ist die rechte Seite unendlich und die Aussage ist für $m \notin \overline{\Gamma}(\mu)$ gezeigt. Sei nun $m \in \overline{\Gamma}(\mu) \backslash ri\ \Gamma(\mu)$ mit $(\log Z)^*(m) < \infty$. Es gilt $ri\ \Gamma(\mu) = ri\ \overline{\Gamma}(\mu)$. Nehme $m_1 \in ri\ \Gamma(\mu)$ und sei $m_n := \frac{1}{n} m_1 + (1 - \frac{1}{n})m$. Dann ist $m_n \in ri\ \Gamma(\mu)$ und da $(\log Z)^*$ konvex ist gilt:

$$\limsup_{n \uparrow \infty} (\log Z)^*(m_n) \leq \limsup_{n \uparrow \infty} [\frac{1}{n} (\log Z)^*(m_1) + \frac{n-1}{n} (\log Z)^*(m)] = (\log Z)^*(m) \tag{2.16}$$

Für jedes m_n gibt es ein $\lambda_n \in \mathbb{R}^d$ mit

$$m_n = E_{\lambda_n}[Y] \text{ und } H(P_{\lambda_n}|P) = (\log Z)^*(m_n) \tag{2.17}$$

Nun gilt wegen (2.16) und (2.17):

$$\limsup_{n\uparrow\infty} H(P_{\lambda_n}|P) = \limsup_{n\uparrow\infty} (\log Z)^*(m_n) \leq (\log Z)^*(m) < \infty.$$

Insbesondere ist $H(P_{\lambda_n}|P)$ für alle n beschränkt und Lemma 2.10 liefert die schwache L^1 Konvergenz der Dichten $\frac{dP_{\lambda_n}}{dP}$ gegen eine Dichte φ. Sei $dP_\infty = \varphi dP$. Wegen der Unterhalbstetigkeit von $\frac{dQ}{dP} \mapsto H(Q|P)$, die aus Lemma 2.9 folgt, gilt $H(P_\infty|P) \leq (\log Z)^*(m)$. Nun bleibt zu zeigen $E_\infty[Y] = m$. Sei $\gamma := \sup_n (\log Z)^*(m_n)$, was wegen (2.16) endlich und positiv ist. Nehme $Z := \alpha \mathbf{1}_{\{|Y|\geq c\}}|Y|$ und die rechte Seite von Lemma 2.9 liefert

$$\gamma \geq \alpha E_{\lambda_n}[|Y|\mathbf{1}_{\{|Y|\geq c\}}] - \log E[\exp(\alpha|Y|\mathbf{1}_{\{|Y|\geq c\}})] \text{ für alle } n \leq \infty.$$

Hierbei ist wegen Bedingung (2.11) und Lemma 2.1 der rechte Erwartungswert endlich und wir können uns ein α so groß wählen, dass gilt $\frac{\gamma}{\alpha} < \frac{\varepsilon}{2}$ für ein $\varepsilon > 0$ und c, so dass $\log E[exp(\alpha|Y|\mathbf{1}_{\{|Y|\geq c\}})] < \frac{\alpha\varepsilon}{2}$. Damit erhalten wir

$$\sup_{n\leq\infty} E_{\lambda_n}[|Y|\mathbf{1}_{\{|Y|\geq c\}}] \leq \varepsilon$$

Ebenso gilt jedoch

$$E_{\lambda_n}[|Y|\mathbf{1}_{\{|Y|<c\}}] \to E_\infty[|Y|\mathbf{1}_{\{|Y|<c\}}]$$

wegen der schwachen Konvergenz von $\frac{dP_{\lambda_n}}{dP} \to \frac{dP_\infty}{dP}$ und somit gilt für $\varepsilon \downarrow 0$

$$m = \lim_{n\uparrow\infty} E_{\lambda_n}[Y] = E_\infty[Y]$$

wie gewünscht. □