Existenz von Gleichgewichtspreisen in zeitstetigen Finanzmarktmodellen

Kai Knipping, Matrikel: 340393

13.07.2010

Contents

Abstract

In diesem Vortrag wird es um die Verallgemeinerung des letzten Seminarvortrags auf zeitstetige Modelle gehen. Ziel ist es, unter der Annahme eines vollständigen Marktes das Äquivalenztheorem für Radner- und Arrow-Debreu-Gleichgewichte im stetigen Fall nachzuweisen. Im Fall von additiv-separablen Nutzenfunktionen werden wir die Existenz von Arrow-Debreu-Gleichgewichten mit Hilfe der Negishi-Methode zeigen und daraus die Existenz eines Radner-Gleichgewichts herleiten.

1 Das Modell

1.1 Annahmen

- endliches Zeitintervall [0,T]
- Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, F, P)
- d-dimensionale Brownsche Bewegung B_t auf (Ω, F, P)
- natürliche Filtration $F_t = \sigma(B_s : s \leq t)$, zu der wir die Nullmengen hinzufügen

Wir nehmen eine Tauschwirtschaft an, in der wir für jeden "Zustand der Welt" ein ausgezeichnetes Konsumgut als Numéraire nehmen.

1.2 Der Finanzmarkt

Wir haben $d+1$ Sicherheiten, deren Dividenden in Einheiten des Numéraires ausgedrückt werden:

Risikofreie Anlage, die der Differentialgleichung $dS^0(t) = S^0(t)r(t)dt$ mit $S^0(0) = 1$ genügt. $R(t) = exp[-\int_0^t r(s)ds]$ ist der Diskontierungsfaktor. r darf negativ sein.

Risikobehaftete Anlagen Die anderen d Finanzgüter werden durch den kumulativen Dividendenprozess $D = (D^1, \ldots, D^d)$ und den entsprechenden Preisprozess $S = (S^1, \ldots, S^d)$ charakterisiert. Beide Prozesse werden als **Itô-Prozesse**[1] angenommen, sind also insbesondere stetig.

Wir schreiben $\widetilde{S} = (S^0, S)$ für den *Aktienpreisprozess* und D^*, definiert durch $dD^*(t) = R(t)dD(t)$ mit $D^*(0) = 0$ für den *diskontierten, kumulierten Dividendenprozess.* Der Itô-Prozess $G^* = SR + D^*$ heißt *diskontierter Gewinnprozess.*

[1] Defintion siehe Annex, Seite 16

Wir machen nun folgende Annahme:

H1 Auf (Ω, F_T) existiert ein zu P äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß Q mit Dichte $\xi = \frac{dQ}{dP}$, so dass

$$dG_t^* = \sigma_G^*(t) d\widetilde{B}_t \tag{1}$$

wobei $\widetilde{B}_t$ eine Brownsche Bewegung bzgl. F_t-Q und der Prozess ξR gleichmäßig beschränkt ist. Weiter nehmen wir an, dass $\sigma_G^*(t)$ F_t-messbar und invertierbar ist.

Unter (**H1**) kann jedes stetige Q-F_T-Martingal als stochastisches Integral bzgl. G^* geschrieben werden. Wir nutzen im Folgenden die Notation:

$$\Theta(G^*) = \left\{ \widetilde{\theta} = (\theta^0, \theta),\ \widetilde{\theta} \text{ previsibel und } \left[\int_0^T \|\theta(t)\sigma_G^*(t)\|^2 \, dt \right] < \infty \ f.s. \right\},$$

$$H(G^*) = \left\{ \widetilde{\theta} \in \Theta(G^*) \mid \int_0^t \theta(s) dG^*(s) \text{ ist ein } Q\text{-}F_t\text{-Martingal} \right\}.$$

1.2.1 Bemerkung: Alternative Konstruktion

Man hätte mit Hilfe des Girsanov-Theorems unter Ausnutzung, dass der diskontierte Gewinnprozess ein Itô-Prozess ist, ein zu P äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß sowie eine Brownsche Bewegung $\widetilde{B}$ konstruieren können, sodass $dG_t = \sigma_G^*(t) d\widetilde{B}_t$ gilt. Das hätte allerdings nur umständliche Messbarkeitsprobleme und zusätzliche Annahmen zur Folge.

1.2.2 Bemerkung: Martingaleigenschaft

Ist $\widetilde{\theta} \in H(G^*)$, so ist $E_Q \left[\int_0^t \theta(s) dG^*(s) \right] = 0$, $\forall\ t \in\ [0, T]$.

1.2.3 Übernahme altbekannter Definitionen im zeitstetigen Fall

Sei Z eine F_T-messbare Zufallsvariable. Eine Handelsstrategie $\widetilde{\theta} \in H(G^*)$ *finanziert* Z, wenn:

1. $R(t)(\widetilde{\theta}_t \widetilde{S}_t) = \widetilde{\theta}_0 \widetilde{S}_0 + \int_0^t \theta(s) dG^*(s) \quad \forall\ t \in [0, T]$
2. $\widetilde{\theta}_T \widetilde{S}_T = Z$

Eine Arbitragemöglichkeit ist eine Strategie $\widetilde{\theta} \in H(G^*)$ mit nicht-positivem Startwert $\widetilde{\theta}_0 \widetilde{S}_0 \leq 0$ und nicht-negativem Endwert Z mit strikt positiver Erwartung.

1.2.4 Anmerkung: Arbitrage

In dem von uns studierten Modell existieren keine Arbitragemöglichkeiten.

1.3 Die Wirtschaft

Wir betrachten ein einzelnes Konsumgut und m Agenten, beschrieben durch die Liste: $(L^1_+, (U_i, e_i),\ i = 1, \ldots, m)$, wobei

$$L^1_+ = \{c : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}_+ \quad F_T\text{-adaptiert} \mid E_P\left[\int_0^T c(t)dt\right] < \infty\}$$

die Menge der für die Agenten zugänglichen Konsumprozesse darstellt,
$U_i : L^1_+ \to \mathbb{R}_+$ die Nutzenfunktion und $e_i \in L^1_+$ den "Besitzstrom" des Agenten i darstellen.

Obwohl wir wesentlich allgemeinere Nutzenfunktionen wählen könnten, um die Existenz von Gleichgewichtspreisen nachzuweisen, beschränken wir uns auf additiv separable Nutzenfunktionen, die der Gleichung

$$U_i(c) = E_P\left[\int_0^T u_i(t, c(t))dt\right]$$

genügen, sowie die folgenden Annahmen erfüllen:

- **U1** $u_i(t, \cdot)$ ist strikt konkav und strikt monoton wachsend $\forall\ t$.
- **U2** u_i gehört zu $C^{0,1}([0,T] \times [0, \infty[)$ und $\frac{\partial u_i}{\partial c} : [0,T] \times \bar{\mathbb{R}}_+ \to \bar{\mathbb{R}}_+$ ist stetig.
- **U3** u_i ist aus der Klasse $C^{1,4}$ und $\frac{\partial u_i}{\partial c}(t, 0) = \infty\ \forall\ t$.

1.4 Zulässige Paare

Wir nehmen an, dass Agent i ein Aktienportfolio $\widetilde{\theta}_i = (\theta^0_i, \theta_i)$ mit $\widetilde{\theta}_i \in H(G^*)$ hält.

1.4.1 Definition: Zulässiges Paar

Gegeben der diskontierte Gewinnprozess der Aktien, heißt ein Paar
$(\widetilde{\theta}_i, c_i) \in H(G^*) \times L^1_+$ *zulässig* für Agent i, wenn es

$$R(t)(\widetilde{\theta}_i(t)\widetilde{S}_t) = \int_0^t \theta_i(s)dG^*(s) - \int_0^t R(s)[c_i(s) - e_i(s)]ds \qquad (2)$$

$$Q\text{ -f.s. } \forall\ t \in [0,T]$$

und

$$\widetilde{\theta}_i(T)\widetilde{S}_T = \theta^0_i(T)S^0(T) + \theta_i(T)S_T \geq 0\ f.s. \qquad (3)$$

erfüllt. Gleichung (2) sagt aus, dass der diskontierte Wohlstand zum Zeitpunkt t der Summe der diskontierten Gewinne oder Verluste, die durch den Austausch von Aktien und Konsumgüter entstanden sind, entspricht. Gleichung (3) stellt sicher, dass Agent i zum Ende der Handelsperiode nicht verschuldet ist.

1.4.2 Anmerkung: Wohlstand und Eigenschaften von G^*

Der Wohlstand eines Agenten wird nicht zwingend als positiv angenommen. Der $(d+1)$-dimensionale Prozess $G^*(t)$ hat eine konstante erste Komponente und wird daher für die Einfachheit der Integration als d-dimensional angenommen.

1.4.3 Bemerkung: Zulässige Portfolios

Heuristisch gesehen könnte man zulässige Portfolios durch

$$\widetilde{\theta}_i(t)\widetilde{S}_t = \int_0^t \widetilde{\theta}_i(s)d\widetilde{G}(s) - \int_0^t (c_i(s) - e_i(s))ds,$$

und Gleichung (3) wobei $\widetilde{G} = (S^0, S + D)$ definieren. Sei $dZ_t = dR(t)(\widetilde{\theta}_i(t)\widetilde{S}_t)$. **Itôs Lemma**[2] liefert dann

$$dZ_t = R(t)\widetilde{\theta}_i(t)d\widetilde{G}_t - R(t)[c_i(t) - e_i(t)]dt + \widetilde{\theta}_i(t)\widetilde{S}_t dR_t.$$

Da $R_t dS_t^0 + S_t^0 dR_t = 0$, folgt:

$$dZ_t = \theta_i(t)dG_t^* - R(t)[c_i(t) - e_i(t)]dt.$$

1.4.4 Proposition: Zulässige Portfolios

Es gilt:

(a) Ist $(\widetilde{\theta}_i, c_i)$ zulässig, so genügt c_i der Ungleichung:

$$E_Q\left[\int_0^T R(s)[c_i(s) - e_i(s)]ds\right] \leq 0. \tag{4}$$

(b) Gilt hingegen, dass c_i (4) erfüllt, so existiert ein $\widetilde{\theta}_i \in H(G^*)$, sodass das Paar $(\widetilde{\theta}_i, c_i)$ zulässig ist.

Beweis: zu **(a)**: Ist offensichtlich, da $\int_0^t \theta_i(s)dG^*(s)$ ein Q-Martingal mit Wert 0 in $t = 0$ ist, wenn $\widetilde{\theta}_i \in H(G^*)$, also ist $E_Q[\int_0^T \theta_i(s)dG^*(s)] = 0$ und damit

$$E_Q\left[\int_0^T R(s)[e_i(s) - c_i(s)]ds\right] = E_Q[\theta_i^0(T)S^0(T) + \theta_i(T)S_T] \geq 0.$$

Um **(b)** zu beweisen, merken wir zunächst an

$$E_Q\left[\int_0^T R(s)[e_i(s) - c_i(s)]ds\right] = E_P\left[\int_0^T \xi(s)R(s)[e_i(s) - c_i(s)]ds\right] < \infty.$$

[2] siehe Annex, Seite 16

und führen das Q-Martingal

$$Y_t = E_Q\left[\int_0^T R(s)[e_i(s) - c_i(s)]ds\right] + E_Q\left[\int_0^T R(s)[c_i(s) - e_i(s)]ds \mid F_t\right] \quad (5)$$

ein. Da $E_Q(Y_T) = 0$, gilt schon $E_Q(Y_t) = 0 \ \forall\ t$. Mit dem **predictable represantation theorem**[3] existiert ein
$\theta_i = (\theta_i^1, \ldots, \theta_i^d)$ mit $\int_0^T \|\theta_i(t)\sigma_G^*(t)\|^2\, dt < \infty$ f.s., sodass

$$Y_t = \int_0^t \theta_i(s) dG^*(s). \quad (6)$$

Nun betrachten wir den Prozess $X_i(t)$ definiert durch

$$R(t)X_i(t) = \int_0^t \theta_i(s)dG^*(s) + \int_0^t R(s)[e_i(s) - c_i(s)]ds.$$

Sei $\theta_i^0(t)$ definiert durch die Gleichung $\theta_i^0 S^0(t) = X_i(t) - \theta_i(t)S_t$ mit $\widetilde{\theta}_i = (\theta_i^0, \theta_i)$. Dann ist nach Konstruktion $\widetilde{\theta}_i \in H(G^*)$ und mit (5) und (6) folgt

$$R(T)X_i(T) = E_Q\left[\int_0^T R(s)[e_i(s) - c_i(s)]ds\right] \geq 0.$$

$(\widetilde{\theta}_i, c_i)$ erfüllt nun (2) und (3) und ist somit zulässig. □

1.5 Definition und Existenz eines Radner-Gleichgewichts

1.5.1 Definition: Optimalität

Für gegebenes $\widetilde{S}$ und D heißt ein Paar $(\widetilde{\theta}, c) \in H(G^*) \times L^1_+$ *optimal* für Agent i, wenn es zulässig ist und den Nutzen für Agent i über die Menge aller zulässigen Strategien maximiert.

1.5.2 Definition: Radner-Gleichgewicht (RGG)

Für einen gegebenen Dividendenprozess D, heißt eine Kollektion
$((\widetilde{\theta}_i, c_i) \in H(G^*) \times L^1_+, (i = 1, \ldots, m); \widetilde{S})$ *Radner-Gleichgewicht* (RGG), wenn:

1. Das Paar $(\widetilde{\theta}_i, c_i)$ ist optimal $\forall i = 1, \ldots, m$
2. Der Markt ist geräumt, d.h.
   - **(a)** $\sum_{i=1}^m \widetilde{\theta}_i = 0 \qquad P \otimes dt$ -f.s.
   - **(b)** $\sum_{i=1}^m c_i = \sum_{i=1}^m e_i \quad P \otimes dt$ -f.s.

[3] siehe Annex, Seite 17

1.5.3 Anmerkung zur Definition: RGG

Gelten (1) und (2b), so gilt notwendigerweise auch (2a). Denn sei $\widetilde{\theta}(t) = \sum_{i=1}^m \widetilde{\theta}_i(t)$ und θ definiert durch $\widetilde{\theta} = (\theta^0, \theta)$. Durch Aufsummieren aller Gleichungen der Form (2) über alle Agenten erhalten wir $\forall t \in [0, T]$:

$$R(t)(\widetilde{\theta}(t)\widetilde{S}_t) = \int_0^t \theta(s)dG^*(s) + \int_0^t \left[\sum_{i=1}^m R(s)[e_i(s) - c_i(s)]\right] ds = \int_0^t \theta(s)dG^*(s).$$

Da die Präferenzen monoton sind, gilt zum Endzeitpunkt T $\widetilde{\theta}_T\widetilde{S}_T = 0$ und folglich

$$0 = \int_0^T \theta(s)dG^*(s).$$

Da der Prozess $0 = \int_0^T \theta(s)dG^*(s)$ ein Martingal ist, ist sein Zuwachsprozess identisch 0. Also ist $\theta(t)\sigma_G^*(t) = 0$ $Q \otimes dt$-f.s. und ebenso $P \otimes dt$-f.s. Weiter ist σ_G^* invertierbar und damit $\theta(t) = 0$ $P \otimes dt$-f.s. Damit ist $\widetilde{\theta}(t)\widetilde{S}_t = 0$ und somit $\theta^0(t) = 0$, $P \otimes dt$-f.s.

Im weiteren Text sei:

$$L_+^\infty = \{p : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}_+ \; F_t\text{-adaptiert } \; | \; \exists \; M \text{mit } p < M \;\; P \otimes dt\text{-f.s.}\}$$

1.5.4 Definition: Kontingentes Arrow-Debreu P-Gleichgewicht (ADGG)

Die Kollektion $[\bar{c}_i, (i = 1, \ldots, m); p] \in (L_+^1)^m \times L_+^\infty$ ist ein *kontingentes ADGG* wenn:

1. $\bar{c}_i$ maximiert den Nutzen von Agent i unter der Bedingung $E_P \left[\int_0^T p(s)(c_i(s) - e_i(s))ds\right] \leq 0$,
2. $\sum_{i=1}^m \bar{c}_i = \sum_{i=1}^m e_i =: e$ $P \otimes dt$-f.s.

Mit Hilfe von Proposition 1.4.4 und der eben gegebenen Anmerkung beweisen wir nun ein Resultat, das ein Analogon zu Theorem 3 vom letzten Vortrag darstellt:

1.5.5 Theorem: Äquivalenztheorem

Ist $\left((\widetilde{\theta}_i, c_i), i = 1, \ldots, m; \widetilde{S}\right)$ ein RGG, das **(H1)** erfüllt, so ist $(c_i \,, i = 1, \ldots, m; R\xi)$ ein kontingentes ADGG.

Ist hingegen $(c_i \;, i = 1, \ldots, m; \; p)$ ein kontingentes ADGG, sodass p ein Itô-Prozess der Form $dp_t = \mu_p(t)dt + \sigma_p(t)dB_t$ mit strikt positiven Werten, $p(0) = 1$ und $E_P(exp\ (\frac{1}{2}\int_0^T \frac{\|\sigma_p\|^2(t)}{p^2(t)}dt)) < \infty$ ist, so existiert ein strikt positives P-F_t-Martingal ξ und ein Diskontierungsprozess R, die jeweils eindeutig sind und $p = R\xi$ erfüllen. Sei Q ein zu P äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß auf (Ω, F_t) mit Dichte ξ_T. So existiert für jede Menge $\widetilde{S}$ von Preisen, für die **(H1)** unter Q erfüllt ist $(\widetilde{\theta}_i \in H(G^*), i = 1, \ldots, m)$, sodass $((\widetilde{\theta}_i, c_i), i = 1, \ldots, m; \widetilde{S})$ ein RGG ist.

Beweis: Der erste Teil folgt direkt aus Proposition 1.4.4.
Um den zweiten Teil zu zeigen, nehmen wir an, dass es ein strikt-positives $P - F_t$-Martingal ξ und einen Diskontierungsprozess R gibt, sodass $p = R\xi$. Da ξ ein positives P-Martingal ist, existiert ein eindeutiger, vorhersehbarer Prozess ${q_t}$[4] der $\int_0^T q_t^2 dt < \infty$ erfüllt P-f.s. und es gilt die Differentialgleichung $d\xi_t = q_t \xi_t dB_t$. Wir haben also

$$d(R\xi)_t = -r(t)R(t)\xi_t dt + R(t)d\xi_t = -r(t)R(t)\xi_t dt + R(t)q_t\xi_t dB_t = \mu_p(t)dt + \sigma_p(t)dB_t.$$

Wir erhalten also durch Koeffizientenvergleich für den Drift- bzw. Diffusionsterm $-r_t R_t \xi_t = \mu_p(t)$ und $R_t q_t \xi_t = \sigma_p(t)$, und damit insbesondere $r_t = -\frac{\mu_p(t)}{p(t)}$, $q_t = \frac{\sigma_p(t)}{p_t}$.
Wir nehmen an, dass p ein Itô-Prozess der Form $dp_t = \mu_p(t)dt + \sigma_p(t)dB_t$ mit strikt positiven Werten und $p(0) = 1$, sodass $E_P(exp\ (\frac{1}{2}\int_0^T \frac{\|\sigma_p\|^2(t)}{p^2(t)}dt)) < \infty$ ist. Definieren wir $r := -\frac{\mu_p}{p}$, $R(t) = exp\left[-\int_0^t r(s)ds\right]$ und $q = \frac{\sigma_p}{p}$. Damit ist $\frac{p}{R}$ ein positives Martingal, denn

$$d\left(\frac{p}{R}\right)_t = \frac{1}{R_t}(\mu_p(t)dt + p_t q_t dB_t) + r_t p_t \frac{dt}{R(t)} = q_t \left(\frac{p}{R}\right)_t dB_t.$$

Für jede Menge von Preisen $\widetilde{S}$ existiert, (sofern **(H1)**unter Q erfüllt ist), falls c_i die Gleichung (4) $\forall\ i$ erfüllen ($\widetilde{\theta}_i \in H(G^*), i = 1, \ldots, m$), sodass das Paar $(\widetilde{\theta}_i, c_i)$ optimal ist $\forall\ i$. Anschliessend reicht es nach der Anmerkung über das RGG, nachzuweisen, dass $\sum_{i=1}^m c_i = \sum_{i=1}^m e_i$, was aber direkt aus der Definition des ADGG folgt. □

2 Existenz eines kontingenten ADGG

Um die Existenz nachzuweisen, nutzen wir die bereits bekannte Negishi-Methode. Unter der Annahme der Separabilität der Nutzenfunktionen läuft dies so ähnlich ab, wie bereits im Vortrag 12 gesehen. Weiterhin sollen in diesem Abschnitt **(U1)** und **(U2)** $\forall\ i$ gelten.

2.1 Aggregierter Nutzen

Wir führen folgende Notation ein. Sei $\alpha \in \Delta^{m-1}$ und $c \in \mathbb{R}_{++}$.

$$u(t, c, \alpha) = \max\left\{\sum_{j=1}^m \alpha_j u_j(t, x_j) \mid \sum_{j=1}^m x_j \leq c,\ x_j \geq 0\ \forall\ j\right\} \tag{7}$$

[4] siehe Revuz-Yor, Continuous Martingales and Brownian Motion, 1999, Seite 304

und

$$(C_i(t,c,\alpha))_{i=1}^m = arg \quad \max \left\{ \sum_{j=1}^m \alpha_j u_j(t,x_j) \mid \sum_{j=1}^m x_j \leq c, \; x_j \geq 0 \; \forall \; j \right\} \tag{8}$$

Damit erhalten wir zunächst folgendes Resultat:

2.1.1 Proposition: Übertragung der Eigenschaften einfacher Nutzenfunktionen

1. Erfüllt u_i **(U1)** $\forall \; i$, so auch $u(t,\cdot,\alpha)$.
2. Erfüllt u_i **(U2)** $\forall \; i$, so auch $u(t,\cdot,\alpha)$.
3. Erfüllt u_i **(U3)** $\forall \; i$, so ist $u(\cdot,\cdot,\alpha) \in C^{1,3}$.

Beweis: Teil 1. ist klar.
Nehmen wir an, dass $\frac{\partial u_i}{\partial c}(t,0) = \infty$ für alle i und für alle t, folgt 2. aus Proposition 3, Vortrag 12. In diesem Fall haben wir $\frac{\partial u}{\partial c}(t,c,\alpha) = \alpha_i \frac{\partial u_i}{\partial c}[t, C_i(t,c,\alpha)]$ für alle i mit $\alpha_i > 0$. Um zu zeigen, dass 3. gilt bemerken wir wieder, dass wie in Proposition 3, Vortrag 12 ein $\lambda \in R_+$ existiert, sodass wenn $\alpha_1 > 0, \; \alpha_2 > 0, \ldots, \; \alpha_p > 0$ und $\alpha_{p+1} = 0 = \ldots = \alpha_m$, wir

$$\begin{cases} \alpha_1 \frac{\partial u_1}{\partial c}[t, C_1(t,c,\alpha)] & = \lambda \\ \vdots & = \vdots \\ \alpha_p \frac{\partial u_p}{\partial c}[t, C_p(t,c,\alpha)] & = \lambda \\ \\ \sum_{i=1}^m C_i(t,c,\alpha) & = c. \end{cases} \tag{9}$$

haben. Wie im Beweis von Proposition 3 folgt mit dem *Satz über implizite Funktionen* , dass $(C_i(\cdot,\cdot,\alpha))_{i=1}^m$ aus der Klasse $C^{1,3}$ ist. Und damit ist natürlich insbesondere $u(\cdot,\cdot,\alpha)$ aus $C^{1,3}$. □

2.1.2 Anmerkung: Eigenschaften der Ableitungen der Nutzenfunktionen

Wir schreiben $u_{i,cc}$ für die zweite Ableitung von u_i und $u_{cc}(t,\cdot,\alpha)$ für die zweite Ableitung von $u(t,\cdot,\alpha)$.

Wie wir bereits in Vortrag 12 gesehen haben ist $\frac{\partial u}{\partial c}(t,c,\alpha) = \lambda$ und damit $\forall \; i$

$$-u_{cc}(t,c,\alpha) = -\frac{\partial \lambda}{\partial c} = -\frac{1}{\sum_{i=1}^m \frac{1}{\alpha_i} \frac{1}{u_{i,cc}(t, C_i(t,c,\alpha))}} \leq -\alpha_i u_{i,cc}(t, C_i(t,c,\alpha))$$

bzw.

$$\frac{\partial C_i}{\partial c}(t,c,\alpha) = \frac{1}{\alpha_i u_{i,cc}[t, C_i(t,c,\alpha)]} \frac{\partial \lambda}{\partial c} = \frac{u_{cc}(t,c,\alpha)}{\alpha_i u_{i,cc}[t, C_i(t,c,\alpha)]}.$$

Insbesondere ist zu bemerken, dass $\frac{\partial C_i}{\partial c}(t,c,\alpha) > 0$.

2.2 Definition und Charakterisierung der Paretooptimalität

Wir erinnern uns an folgende Definitionen:

2.2.1 Definition: Zulässigkeit eines Konsumvektors

Der Konsumvektor $(c_i)_{i=1}^m \in (L_+^1)^m$ ist zulässig, wenn er

$$\sum_{i=1}^m c_i \leq e \qquad P \otimes dt\text{-f.s.}$$

erfüllt.
Nun sei A die Menge aller zulässigen Konsumvektoren.

2.2.2 Definition: Paretooptimalität von Konsumvektoren

Ein zulässiger Konsumvektor $(\bar{c}_i)_{i=1}^m$ ist *paretooptimal* , wenn es **keinen** Vektor $(c_i)_{i=1}^m \in A$ gibt mit:

$U_j(c_j) \geq U_j(c_j)\ \forall\ j$ und $U_{j_0}(c_{j_0}) > U_{j_0}(\bar{c}_{j_0})$ für mindestens ein j_0.
Eine andere Charakterisierung der Paretooptimalität ist die folgende:

2.2.3 Proposition: Charakterisierung der Paretooptimalität

Ein zulässiger Konsumvektor $(\bar{c}_i)_{i=1}^m$ heißt *paretooptimal* genau dann, wenn ein $\alpha \in \Delta^{m-1}$ existiert, so dass

$$\bar{c}_i(t,\omega) = C_i(t, e(t,\omega), \alpha)$$

P $\otimes$ dt-f.s. $\forall\ i = 1, \ldots, m$.
Beweis: Wie bereits im Vortrag 12 gesehen, reicht es zu zeigen, dass ein $\alpha \in \Delta^{m-1}$ existiert, sodass $(\bar{c}_i)_{1=1}^m$ eine optimale Lösung für das Problem P_α ist, i.e.

$$\text{Maximiere } \sum_{i=1}^m \alpha_i U_i(x_i) \text{ unter der Bedingung } x = (x_i)_{i=1}^m \in A.$$

Da die Nutzenfunktionen additiv separabel sind, gilt weiter:

$$\max_{x \in A} \sum_{i=1}^m \alpha_i U_i(x_i) = E_P \left[\int_0^T u(t, e(t), \alpha) dt \right],$$

und damit ist $\bar{c}_i(t,\omega) = C_i(t, e(t,\omega), \alpha) P \otimes dt$-f.s. $\square$

Wir setzen

$$p(t,\alpha) = \frac{\partial u}{\partial c}[t, e(t), \alpha] \tag{10}$$

und erhalten folgendes Resultat:

2.2.4 Proposition: Existenz einer unteren Grenze

Existiert eine Konstante $k > 0$ mit $k \leq e$ $P \otimes dt$-f.s., so gehört $p(t, \alpha)$ zu L^∞_+. Für alle $\alpha_0 \gg 0$ und für alle i existiert ein $k_i > 0$ mit $C_i[t, e(t), \alpha_0] \geq k_i$ $P \otimes dt$-f.s.

Beweis: Wir nehmen an, dass ein $k > 0$ existiert mit $k \leq e$ $P \otimes dt$-f.s.. Da $\frac{\partial u}{\partial c}(t, \cdot, \alpha)$ eine fallende Funktion ist, haben wir weiter:

$$p(t, \alpha) \leq \frac{\partial u}{\partial c}(t, k, \alpha) \leq \max_{s, \beta} \frac{\partial u}{\partial c}(s, k, \beta).$$

Unter **(U2)** existiert das Maximum des obigen Ausdrucks, da nach Proposition 2.1.1. Teil 2 die Funktion $\frac{\partial u}{\partial c}(\cdot, k, \cdot)$ stetig ist und die Menge $[0, T] \times \Delta^{m-1}$ kompakt ist.
Ist weiter $\frac{\partial u_i}{\partial c}(t, 0) = \infty$ für alle t und alle i und sind alle Funktionen u_i von der Klasse $C^{1,2}$, so folgt mit Proposition 2.1.1. und Anmerkung 2.1.2., dass $C_i(t, \cdot, \alpha)$ eine wachsenden Funktion ist. Wir haben also

$$C_i(t, e(t), \alpha_0) \geq C_i(t, k, \alpha_0) \geq k_i,$$

mit

$$k_i = \inf_s C_i(s, k, \alpha_0) > 0.$$

Man kann sogar zeigen, dass $C_i(t, \cdot, \alpha)$ immer noch monoton ist, wenn die u_i aus $C^{1,1}$ sind. Also ist die oben gegebene untere Grenze immer noch gültig. □

2.2.5 Optimale Lösung für das Problem P_i

Ist $(\bar{c}_{i\,i=1}^{\,m})$ paretooptimal, so existiert ein $\alpha \in \Delta^{m-1}$, so dass $\bar{c}_i(t) = C_i(t, e(t), \alpha)$ für alle i und $\bar{c}_i$ die optimale Lösung des Problems P_i

$$\begin{cases} \text{maximiere } U_i(x_i) \text{ unter der Bedingung:} \\ E_P\left[\int_0^T p(t,\alpha) x_i(t) dt\right] \leq E_P\left[\int_0^T p(t,\alpha) \bar{c}_i(t) dt\right] \end{cases} \qquad (P_i)$$

wobei p wie in (10) definiert ist.

Beweis: Wie im Beweis von Proposition 2.1.1., Teil 2 nehmen wir an, dass $\frac{\partial u_i}{\partial c}(t, 0) = \infty$ *für alle* t *und* i*. Nach Proposition 2.2.3. existiert ein* $\alpha \in \Delta^{m-1}$*, so dass* $\bar{c}_i(t) = C_i[t, e(t), \alpha]$*. Zusätzlich gilt:*

Ist $\alpha_i > 0$, so ist $C_i[t, e(t), \alpha] > 0$ und
Ist $\alpha_i = 0$, so ist $C_i[t, e(t), \alpha] = 0$.

Der Fall $\alpha_i = 0$ *ist trivial. Ist* $\alpha_i > 0$*, so gilt (da* $p(t, \alpha) = \alpha_i \frac{\partial u_i}{\partial c}[t, C_i(t, e(t), \alpha)]$*) für alle* $x_i \in L^1_+$*:*

$u_i[t, \bar{c}_i(t)] - u_i[t, x_i(t)] \geq \frac{\partial u_i}{\partial c}[t, \bar{c}_i(t)][\bar{c}_i(t) - x_i(t)] \geq \frac{p(t,\alpha)}{\alpha_i}[\bar{c}_i(t) - x_i(t)].$

Damit erhalten wir durch Integration bzgl. (t, ω)

$$U_i(\bar{c}_i) - U_i(x_i) \geq E_P \left[\int_0^T \frac{p(t,\alpha)}{\alpha_i} [\bar{c}_i(t) - x_i(t)] dt \right],$$

und somit die Behauptung. □

2.3 Existenz und Charakterisierung eines kontingenten ADGG

2.3.1 Theorem: Existenz eines kontingenten ADGG

Erfülle u_i für alle i **(H1)** und **(H2)** . Existiert ein $k > 0$, so dass $k \leq e$ $P \otimes dt$-f.s., so existiert ein kontingentes ADGG der Form
$\big(C_i[t, e(t), \alpha_0], i = 1, \ldots, m; \frac{\partial u}{\partial c}(t, e(t), \alpha_0)\big)$ mit $\alpha_0 \gg 0$.

Beweis: Wie bereits in Vortrag 12 führen wir die Transferfunktion
$\Phi \colon \Delta^{m-1} \to \mathbb{R}^m$ definiert durch

$$\Phi_i(\alpha) = E_P \left[\int_0^T p(t, \alpha)(C_i(t, e(t), \alpha) - e_i(t)) dt \right]$$

ein. Da $C_i[t, e(t), \cdot]$ und $p(t, \cdot)$ stetige Funktionen sind, für alle i $C_i[t, e(t), \alpha] \leq e(t)$ und $p(t, \alpha) \in L^\infty$ ist, folgt mit dem *Satz der dominierenden Konvergenz*, dass Φ_i für alle i stetig ist. Ist $\sum_{i=1}^m C_i[t, e(t), \alpha] = e(t)$ haben wir $\sum_{i=1}^m \Phi_i = 0$, und damit, falls $\alpha_i = 0$, $\Phi_i(\alpha) < 0$. Daher erfüllt die Transferfunktion $\Phi = (\Phi)_{i=1}^m$ die Bedingungen aus Satz 4, Vortrag 12. Aus diesem Satz können wir die Existenz einer Nullstelle $\alpha_0 \gg 0$ von Φ herleiten und damit schliesslich die Existenz eines Gleichgewichts der Form
$\big(\mathrm{C}_i[t, e(t), \alpha_0], i = 1, \ldots, m; p(t, \alpha_0)\big)$. □

2.3.2 Anmerkung: Nullstellenmenge der Transferfunktion

Sofern wir k und die Nutzenfunktionen in der Besitzkomponente festsetzen, ist die Nullstellenmenge der Transferfunktion endlich.

2.4 Existenz eines RGG

In diesem Kapitel machen wir weitere Annahmen:

H2 e ist ein Itô-Prozess der Form $de_t = \mu_e(t)dt + \sigma_e(t)dB_t$.

H3 Es existiert ein $k > 0$ mit $k \leq e$ f.s. und ein M, sodass $\int_0^T \|\sigma_e(s)\|^2 ds < M$ f.s.

U4 Es existieren $i, A_i > 0$, sodass

$$\frac{-u_{i,cc}(t,c)}{u_{i,c}(t,c)} \leq A_i, \quad t \in [0,T], \quad c \in [k_i, \infty[.$$

Sei $(c_i, i = 1, \ldots, m; p)$ ein ADGG. Von Theorem 1.5.5. wissen wir, dass es als RGG realisiert werden kann, wenn p ein strikt positiver Itô-Prozess der Form $dp_t = \mu_p dt + \sigma_p dB_t$ ist, der der Ungleichung $E_P\left[\exp(\frac{1}{2}\int_0^T \frac{\|\sigma_p(t)\|^2}{p(t)^2} dt)\right] < \infty$ genügt. Wir zeigen nun, dass diese Bedingungen wirklich erfüllt sind.

2.4.1 Proposition: Bedingungen für 1.5.5.

Unter den Annahmen (**H1-H3, U1-U4**) gilt:

1. p_t ist ein strikt positiver Itô-Prozess aus L_+^∞
2. $E_P\left[\exp(\frac{1}{2}\int_0^T \frac{\|\sigma_p(t)\|^2}{p(t)^2} dt)\right] < \infty$.

Beweis: Nach Theorem 2.3.1. existiert ein $\alpha_0 \in \Delta^{m-1}$, so dass $p_t = \frac{\partial u}{\partial c}(t, e(t), \alpha_0)$. Nach Proposition 2.1.1. ist $\frac{\partial u}{\partial c}(\cdot, \cdot, \alpha_0)$ aus $C^{1,2}$. Damit folgt durch Anwenden der *Itô-Formel* auf p_t, dass p_t ein Itô-Prozess der Form

$$dp_t = \mu_p(t)dt + u_{cc}[t, e(t), \alpha_0]\sigma_e(t)dB_t \tag{11}$$

ist. Wie wir in Anmerkung 2.1.2. gesehen haben, ist

$$-\frac{u_{cc}(t, e(t), \alpha_0)}{u_c(t, e(t), \alpha_0)} \leq \min_i -\frac{u_{i,cc}(t, C_i(t, e(t), \alpha_0))}{u_{i,c}(t, C_i(t, e(t), \alpha_0))} \leq A_i,$$

und damit $E_P\left[\exp(\frac{1}{2}\int_0^T \frac{\|\sigma_p(t)\|^2}{p(t)^2} dt)\right] < \infty$. □

Wie wir bereits im Beweis von Theorem 1.5.5. gesehen haben, ist

$$r_t = -\frac{\mu_p(t)}{p_t} \tag{12}$$

Durch Einsetzen von $\mu_p(t)$ in diesen Term und der Notation u_{ccc} für die dritte Ableitung von u, ergibt sich:

$$\frac{\mu_p(t)}{p_t} = -\frac{1}{p_t}\left[u_{ct}[t, e(t), \alpha_0] + \mu_e(t)u_{cc}[t, e(t), \alpha_0] + \frac{1}{2}\|\sigma_e(t)\|^2 u_{ccc}[t, e(t), \alpha_0]\right]. \tag{13}$$

Die Zinsrate muss also nicht zwingend positiv sein.

Das ganze Kapitel nun noch einmal in der Zusammenfassung als Theorem:

2.4.2 Theorem: Existenz eines RGG

Unter den Annahmen (**H1-H3, U1-U4**) existiert ein RGG.
Für jedes RGG $\{(\widetilde{\theta}_i, c_i), (i = 1, \ldots, m);\ \widetilde{S}\}$, existiert ein $\alpha_0 \gg 0$, so dass $c_i(t) = C_i[t, e(t), \alpha_0],\ i = 1, \ldots, m$. Weiter ist sogar $c_i,\ i = 1, \ldots, m$ paretooptimal und es gibt einen ausgezeichneten Agenten, der durch eine additiv separable Nutzenfunktion und Besitztümern, die dem aggregierten Besitz entsprechen, charakterisiert wird. Die Zinsrate entspricht dem Inversen der Erwartung der relativen Variation des momentanen marginalen Nutzens. Das zu P äquivalente Wahrscheinlichkeitsmaß Q hat die Dichte $\xi_t = \frac{1}{R_t} \frac{\partial u}{\partial c}(t, e(t), \alpha_0)$ auf F_t .

Abschließend gibt es noch die Formel für den Aktienkurs

$$S_t = \frac{1}{R(t)} E_Q \left[\int_t^T dD^d(s) \mid F_t \right] + \frac{1}{R(t)} E_Q \left[R(T)S(T) \mid F_t \right].$$

Wie in Anmerkung 2.3.2. bereits erwähnt, gibt es unter den entprechenden Vorraussetzungen nur eine endliche Anzahl an Gleichgewichtsnutzenvektoren und somit gibt es unter diesen Vorraussetzungen auch nur eine endliche Anzahl an Gleichgewichtswahrscheinlichkeitsmaßen Q. Es wird aber aufgezeigt, dass die Aktienpreise nicht ausschließlich von Angebot und Nachfrage abhängen, diesbzgl. sind sie vielmehr willkürlich. Entscheidend bei der Preisfestsetzung von Aktien sind risikoneutrale Wahrscheinlichkeitsmaße und die Zinsrate.

3 Annex

3.1 Definition: Itô-Prozess

Ein Prozess $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ heißt *reellwertiger Itô-Prozess*, wenn ein adaptierter Prozess $\mu(t)$ und ein vorhersehbarer Prozess $\sigma(t)$ existieren mit

- $\int_0^T |\mu(s)|ds < \infty$
- $\int_0^T \sigma^2(s)ds < \infty$ jeweils P-f.s.

und (X_t) weiter die Gleichung
$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dB(s),\ t \in [0,T]$ mit einer Brownschen Bewegung $(B(s))_{s\geq 0}$ erfüllt.

Äquivalent dazu ist die Differentialgleichung
$dX_t = \mu(t)dt + \sigma(t)dB(t)$ mit der Nebenbedingung $X_0 = 0$.

3.2 Itôs Lemma I (Einfache Itô-Formel in differentieller Notation)

Sei $f \in C_b^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R},\ \mathbb{R})$ und sei X ein Itô-Prozess der Form

$$dX_t = \mu(t)dt + \sigma(t)dB(t).$$

Sei $Y_t = f(t, X_t)$. Dann ist Y ein Itô-Prozess der

$$dY_t = \frac{\partial f}{\partial t}(t,X_t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t,X_t)\mu(t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t,X_t)\sigma(t)dB(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,X_t)\sigma^2(t)dt$$

erfüllt. Bzw. in etwas kürzerer Form:

$$dY_t = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\sigma^2(t)dt$$

3.3 Itôs Lemma II (Mehrdimensionale Itô-Formel in differentieller Notation)

Sei $X = (X^1, \ldots, X^d)^T$ ein d-dimensionaler Itô-Prozess, der

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dB_t$$

erfüllt, wobei μ_t ein F_t-adaptierter Prozess mit Werten im $\mathbb{R}^d$ ist, σ_t eine zufällige, vorhersehbare $(d\times k)$-Matrix ist und B eine k-dimensionale Brownsche Bewegung ist. Weiter gelte für (μ, σ)

- $\forall\ i$ ist μ_i ein adaptierter Prozess
- $\forall\ (i,j)$ ist $\sigma^{i,j}$ ein vorherbarer Prozess

- $\int_0^T |\mu^i(s)|ds < \infty$
- $\int_0^T |\sigma^{i,j}(s)|^2 ds < \infty$ jeweils P-f.s.

Dann sei $f \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R})$. Wir schreiben $f_x(t,x)$ für den Zeilenvektor $[\frac{\partial f}{\partial x_i}(t,x)]_{i=1,\ldots,d}$; $f_{xx}(t,x)$ für die Matrix $[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(t,x)]_{i,j}$ und schreiben $f_t(t,x) = \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$.

Sei $Y_t = f(t, X_t)$. Dann gilt

$$dY_t = \left\{ f_t(t,X_t) + f_x(t,X_t)\mu(t) + \frac{1}{2}\text{spur}[\sigma_t \sigma_t^T f_{xx}(t,X_t)] \right\} dt + f_x(t,X_t)\sigma_t dB_t.$$

3.4 predictable representation theorem

Sei $(M_t, t \geq 0)$ ein stetiges F_t-Martingal mit $M(0) = 0$. Dann existiert ein eindeutiger vorhersehbarer Prozess $(\phi_t, t \geq 0)$, sodass

$$M_t = \sum_{i=1}^d \int_0^t \phi_i(s) dB_s^i = \int_0^t \phi(s) dB_s.$$

und

$$\int_0^t \phi^2(s) ds < \infty \qquad P\text{-f.s., } t \in [0,T].$$

Ist sogar $E(M_T^2) < \infty$, so gilt $E \int_0^T \phi^2(s) ds < \infty$.