

Bewertung von Barriere Optionen im CRR-Modell

Seminararbeit von Susanna Wankmueller

12. April 2010

Barriere Optionen sind eine Sonderform von Optionen und gehören zu den exotischen Optionen. Sie dienen dazu, einen "billigeren" Call oder Put anzubieten.

Man unterscheidet hier zwischen zwei Mechanismen beim Treffen einer Barriere: knock-in und knock-out.

Eine knock-in Option wird erst dann aktiviert, wenn der Aktienpreis eine gewisse Barriere erreicht oder über- bzw. unterschreitet.

Ansonsten bleibt sie wertlos. Eine knock-out Option hingegen wird beim ersten Erreichen der Barriere wertlos. Zusätzlich unterscheidet man, ob die Barriere von oben oder von unten erreicht wird.

Man unterscheidet also insgesamt zwischen 4 Typen von Barriere Optionen:

- down-and-out
- up-and-out
- down-and-in
- up-and-in

Bei der Bewertung solcher Optionen muss berücksichtigt werden, dass es sich um sogenannte pfadabhängige Derivate handelt, also deren Auszahlung eben nicht nur vom Schlusskurs abhängt, sondern den gesamten Kursverlauf berücksichtigt.

Im folgenden wird eine Preisformel für den down-and-out Call im Cox-Ross-Rubinstein Modell (CRR-Modell) hergeleitet.

Dazu wird als erstes an das *N-Perioden CRR-Modell* erinnert:

- Laufzeit N Perioden
- Bankkonto mit Zinsrate r

$$B(t) = (1 + r)^t$$

- Aktie mit Anfangskurs S_0 und $S_t = S_0 \prod_{i=1}^t Y_i$ mit $Y_i \in \{u, d\}$ und

$$P(Y_i = u) = p = 1 - P(Y_i = d)$$

Für den Parameter $q = \frac{1+r-d}{u-d}$ und

$$Q(Y_i = u) = q = 1 - Q(Y_i = d)$$

liegt Risikoneutralität vor.

Es gilt

$$Q(S_t = S_0 u^i d^{t-i}) = \binom{t}{i} q^i (1-q)^{t-i}$$

Betrachten den Fall $d = u^{-1}$.

Down-and-out Call

Anfangskurs S_0 , Laufzeit T , Strike Preis K

Barriere B mit $B < S_0$ und $B < K$

Der down-and-out Call verhält sich wie ein Call, solange der Aktienkurs oberhalb der Barriere bleibt. Ansonsten verfällt der Call.

Die Claimauszahlung eines down-and-out Calls mit Barriere B ist definiert durch:

$$C = (S_T - K)^+ 1_{\{\min_{0 \leq t \leq T} S_t > B\}}$$

Wir wollen nun den Preis für diesen Call herleiten, d.h.

$$EQ\left[\frac{1}{(1+r)^T} (S_T - K)^+ 1_{\{\min_{0 \leq t \leq T} S_t > B\}}\right]$$

bestimmen.

Dazu bestimmen wir zunächst die gemeinsame Verteilung eines Random Walks $Z_n = \sum_{i=1}^n X_i$ mit $X_i \in \{u, -u\}$ und $P(X_i = u) = q = 1 - P(X_i = -u)$ und des Minimums $M_n := \min_{0 \leq t \leq n} Z_t$.

1.Fall: $q = \frac{1}{2}$ (symmetr. Random Walk)

Satz 1

Sei $b=lu$ und $m=ku$ mit $k, l \in \mathbb{Z}$, $k < l$. Für $Z_n = \sum_{i=1}^n X_i$ mit $X_i \in \{u, -u\}$ u.i.v. und $P(X_i = u) = \frac{1}{2} = P(X_i = -u)$ gilt

$$Q(Z_T = b, M_T \leq m) = Q(Z_T = 2m - b) = \frac{T!}{\left(\frac{T-l}{2} + k\right)! \left(\frac{T+l}{2} - k\right)!} \left(\frac{1}{2}\right)^T$$

Beweis:

(1)z.z.: $Q(Z_T = b, M_T \leq m) = Q(Z_T = 2m - b)$

Spiegelungsprinzip:

Definiere $\tau_m = \min\{t : S_t = m\}$

Betrachten einen Pfad der Menge $\{M_T \leq m, Z_T = b\}$.

Für diesen Pfad gilt natürlich $\tau_m < T$

Wir stoppen den Pfad zum Zeitpunkt τ_m und spiegeln ihn anschliessend.

Der gespiegelte Pfad ist also zum Zeitpunkt T in $m - (b - m) = 2m - b$

d.h. alle Pfade mit $Z_T = 2m - b$ korrespondieren mit Pfaden, für die gilt

$\tau_m < T$ und $Z_T = b$.

Also gilt:

$Q(Z_T = b, M_T \leq m) = Q(Z_T = 2m - b)$

(2)z.z.: $Q(Z_T = 2m - b) = \frac{T!}{(\frac{T-l}{2}+k)! (\frac{T+l}{2}-k)!} (\frac{1}{2})^T$

$$\begin{aligned} Q(Z_T = 2m - b) &= \underbrace{\binom{T}{\frac{T+2k-l}{2}}}_{\text{Anzahl der Pfade mit } \frac{T+2k-l}{2} \text{ up-moves*}} \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^T}_{\text{W'keit für jeden einzelnen Pfad}} \\ &= \frac{T!}{\left(\frac{T+2k-l}{2}\right)! \left(T - \frac{T+2k-l}{2}\right)!} \left(\frac{1}{2}\right)^T \\ &= \frac{T!}{\left(\frac{T-l}{2}+k\right)! \left(\frac{T+l}{2}-k\right)!} \left(\frac{1}{2}\right)^T \end{aligned}$$

[* Anzahl der up-moves berechnen:

n_u =Anzahl up's

n_d =Anzahl down's

Dann gilt: $T = n_u + n_d$

$\Rightarrow n_d = T - n_u$

Und es gilt

$2m - b = n_u u - (T - n_u)u \Leftrightarrow 2ku - lu = n_u u - (T - n_u)u \Leftrightarrow 2k - l = 2n_u - T$

$\Rightarrow n_u = \frac{2k-l+T}{2}$]

2.Fall: $q \neq \frac{1}{2}$ (asymmetr. Random Walk)

Satz 2

Sei $b=lu$ und $m=ku$ mit $k, l \in \mathbb{Z}$, $k < l$. Für $Z_n = \sum_{i=1}^n X_i$ mit $X_i \in \{u, -u\}$ u.i.v. und $P(X_i = u) = q = 1 - P(X_i = -u)$ gilt

$$Q(Z_T = b, M_T \leq m) = Q(Z_T = 2m - b) \left(\frac{q}{1-q}\right)^{l-k}$$

Beweis:

Betrachten wieder einen Pfad der Menge $\{Z_T = b, M_T \leq m\}$.

Wie im symmetrischen Fall spiegeln wir den Pfad ab dem Zeitpunkt

$\tau_m = \min\{t : S_t = m\}$.

Da $q \neq 1 - q$ gilt, haben originaler und gespiegelter Pfad andere W'keiten.

Zwischen den Zeiten τ_m und T hat der originale Pfad so viele Aufwärtssprünge wie der gespiegelte Pfad abwärts geht.

D.h. es müssen genau so viele downs in ups getauscht werden, wie Knotenpunkte zwischen m und b liegen. (Knotenpunkte zwischen m und b geben an, wie viel mehr der Pfad nach oben gegangen ist als nach unten)

Mit $b=lu$ und $m=ku$ folgt, dass der gespiegelte Pfad gerade $l-k$ ups mehr als der Originalpfad hat.

Insgesamt also:

Anzahl der gespiegelten Pfade bleibt gleich, aber bei der W'keit muss an $l-k$ Stellen $1-q$ durch q ersetzt werden und damit ergibt sich

$$Q(Z_T = b, M_T \leq m) = Q(Z_T = 2m - b) \left(\frac{q}{1-q}\right)^{l-k}.$$

Nun möchten wir den down-and-out Call bewerten.

Mit der Barriere $B < K$ erhält man als Preis für den Down-and-out Call

$$\begin{aligned}
& E_Q\left[\frac{1}{(1+r)^T}(S_T - K)^+ 1_{\{\min_{0 \leq t \leq T} S_t > B\}}\right] \\
&= \frac{1}{(1+r)^T} \sum_{i=1}^T E_Q\left[1_{\{S_T = S_0 u^i u^{-(T-i)}\}} (S_0 u^i u^{-(T-i)} - K)^+ 1_{\{\min_{0 \leq t \leq T} S_t > B\}}\right] \\
&= \frac{1}{(1+r)^T} \sum_{i: S_0 u^{2i-T} > K} Q(S_T = S_0 u^{2i-T}, \min_{0 \leq t \leq T} S_t > B) (S_0 u^{2i-T} - K)
\end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit werden wir jetzt mit Hilfe des Spiegelungsprinzips berechnen:

Sei $B = S_0 u^k$ und $B < S_T$ also $k < 2i - T$

$$\begin{aligned}
& Q(S_T = S_0 u^{2i-T}, \min_{0 \leq t \leq T} S_t > B) \\
&= 1 - Q(S_T = S_0 u^{2i-T}, \min_{0 \leq t \leq T} S_t \leq B) \\
&= 1 - Q\left(\frac{S_T}{S_0} = u^{2i-T}, \min_{0 \leq t \leq T} \frac{S_t}{S_0} \leq u^k\right) \\
&= 1 - Q\left(\ln \frac{S_T}{S_0} = (2i - T) \ln u, \min_{0 \leq t \leq T} \ln \frac{S_t}{S_0} \leq k \ln u\right)
\end{aligned}$$

Es ist $\ln \frac{S_T}{S_0} = \ln(Y_1 \cdot Y_2 \cdot \dots \cdot Y_T) = \sum_{i=1}^T \ln(Y_i)$ und $\ln(Y_i) \in \{a, -a\}$ ist gleichbedeutend mit $Y_i \in \{e^a, e^{-a}\} := \{u, u^{-1}\}$

$$= 1 - Q\left(\sum_{i=1}^T \ln(Y_i) = (2i - T) \ln u, \min_{0 \leq t \leq T} \sum_{i=1}^t \ln(Y_i) \leq k \ln u\right)$$

nach Satz 2

$$= 1 - Q\left(\sum_{i=1}^T \ln(Y_i) = 2k \ln u - (2i - T) \ln u, \left(\frac{q}{1-q}\right)^{2i-T-k}\right)$$

$$= 1 - Q\left(\sum_{i=1}^T \ln(Y_i) = 2k - 2i + T \ln u, \left(\frac{q}{1-q}\right)^{2i-T-k}\right)$$

$$= 1 - Q(S_T = S_0 u^{2k-2i+T}) \left(\frac{q}{1-q}\right)^{2i-T-k}$$

also Pfad mit $k+T-i$ Aufwärtssprüngen und $T - (k + T - i) = i - k$ Abwärtssprüngen

$$= 1 - \binom{T}{k+T-i} q^{T+k-i} (1-q)^{i-k} \left(\frac{q}{1-q}\right)^{2i-T-k}$$

Für den symmetrischen Fall ergibt sich die W'keit

$$Q(S_T = S_0 u^{2i-T}, \min_{0 \leq t \leq T} S_t > B)$$

nach Satz 1

$$\begin{aligned}
&= 1 - Q(S_T = S_0 u^{2k-2i+T}) \\
&= 1 - \binom{T}{k+T-i} \left(\frac{1}{2}\right)^T
\end{aligned}$$

und damit der Preis

$$E_Q\left[\frac{1}{(1+r)^T}(S_T - K)^+ 1_{\{\min_{0 \leq t \leq T} S_t > B\}}\right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(1+r)^T} \sum_{i: S_0 u^{2i-T} > K} Q(S_T = S_0 u^{2i-T}, \min_{0 \leq t \leq T} S_t > B) (S_0 u^{2i-T} - K) \\
&= \frac{1}{(1+r)^T} \sum_{i: S_0 u^{2i-T} > K} (1 - \binom{T}{k+T-i} (\frac{1}{2})^T) (S_0 u^{2i-T} - K)
\end{aligned}$$

