

## Übungen

Abgabetermin: Freitag 16.7. 10Uhr, Briefkästen 41, 42, 43 und 46

THEMEN: Gesetze der großen Zahlen und schwache Konvergenz

**Die korrigierten Abgaben können ab Mittwoch, dem 21.7. bei Andrea Winkler (Raum 212) abgeholt werden. Die erreichten Punkte werden Ihrem Punktekonto als Zusatzpunkte gutgeschrieben.**

### Aufgabe 48 (4\* Punkte)

Sei  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge unabhängiger, identisch  $R(0, 1)$ -verteilter Zufallsgrößen. Zeigen Sie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n X_i} = \frac{1}{e} \quad P\text{-f.s.}$$

### Aufgabe 49 (4\* Punkte)

Es sei  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge stochastisch unabhängiger, integrierbarer Zufallsgrößen, so dass  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - E(X_i)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$   $P$ -f.s. gilt. Zeigen Sie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - E(X_n)| > n\varepsilon) < \infty \quad \text{für alle } \varepsilon > 0.$$

### Aufgabe 50 (6\* Punkte)

Es sei  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge stochastisch unabhängiger Zufallsgrößen mit  $P^{X_1} = \delta_0$  und

$$P(X_n = n) = \frac{1}{2n \ln n} = P(X_n = -n), \quad P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n \ln n}$$

für  $n \geq 2$ . Zeigen Sie:

- $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - E(X_i)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  in Wahrscheinlichkeit
- $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - E(X_i))$  konvergiert nicht fast sicher gegen 0.

**Hinweis:** Benutzen Sie aus der Analysis:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} < \infty$ .

### Aufgabe 51 (6\* Punkte)

Seien  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Wahrscheinlichkeitsmaße auf  $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ . Überprüfen Sie, ob Verteilungskonvergenz (schwache Konvergenz) vorliegt, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Limes:

- $\mu_n = \text{Poi}(\alpha_n)$ ,  $\alpha_n \in (0, \infty)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $\alpha_n \rightarrow \alpha$
- $\mu_n = f_n \mathbb{A}$  mit  $f_n(x) = (1 - \cos(2\pi n x)) \mathbb{1}_{(0,1)}(x)$
- $\mu_n = R[-n, n]$
- $\mu_n = \mathcal{N}(\mu, \frac{1}{n})$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$
- $\mu_n = \mathcal{N}(0, n)$