

# Übungen zur Vorlesung Zeitstetige Modelle der Finanzmathematik

Sommersemester 2010

PD Dr. V. Paulsen

Blatt 12

05.07.2010

## Aufgabe 1:

4 Punkte

Seien  $E, F$  Hilberträume und  $I : E \rightarrow F$  eine Isometrie. Zeigen Sie, dass das Bild von  $E$  unter  $I$  einen abgeschlossenen Teilraum von  $F$  bildet.

## Aufgabe 2:

4 Punkte

Jedes stetige, lokale Martingal ist eine zeittransformierte Brownsche Bewegung. Genauer sei  $M$  ein stetiges lokales Martingal mit  $M(0) = 0$  und  $[M]_t \uparrow \infty$  für  $t \uparrow \infty$ . Für  $t \geq 0$  definiere die Stopzeit

$$\tau_t = \inf\{u : [M]_u > t\}$$

und setze  $\mathfrak{G}_t = \mathfrak{F}_{\tau_t}$  für alle  $t \geq 0$ .

Zeigen Sie, dass  $B_t = M(\tau_t), t \geq 0$  einen Standard Wiener-Prozess bezüglich der  $(\mathfrak{G}_t)$  Filtration definiert. Mehr noch, es gilt  $[M]_t$  ist eine  $(\mathfrak{G}_s)$  Stopzeit für alle  $t \geq 0$  und

$$M_t = B([M]_t)$$

für alle  $t \geq 0$ .

Hinweis: Satz von Lévy.

## Aufgabe 3:

4 Punkte

Finanzmarktmodell mit einem risky asset und zwei Quellen der Unsicherheit. Sei  $W$  ein zweidimensionaler Wiener-Prozess und  $S$  als Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dS(t) = S(t)(\mu dt + \sigma_1 dW^{(1)}(t) + \sigma_2 dW^{(2)}(t)), S(0) = x,$$

ein Preisprozess eines risky assets. Hierbei sind  $\sigma_1, \sigma_2, \mu$  reelle Konstanten mit  $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ . Für den Handelszeitraum  $[0, T)$  besteht der Finanzmarkt aus dem risky asset und einem Bankkonto mit Preisprozess gegeben durch  $\beta(t) = \exp(rt)$ .

1. Zeigen Sie, dass es ein äquivalentes Martingalmaß in diesem Modell gibt.
2. Ist dieses eindeutig bestimmt?

**Bitte wenden!**

**Aufgabe 4:**

4 Punkte

Bestimmen Sie in der Fortsetzung von Aufgabe 3 einen eindimensionalen Wiener-Prozeß  $B$ , derart, dass

$$dS(t) = S(t)(\mu dt + \sigma_3 dB(t))$$

gilt für ein geeignetes  $\sigma_3 > 0$ . Bezüglich der von  $B$  erzeugten Filtration liegt dann ein Black-Scholes Modell vor. Diese Filtration stimmt mit der von  $S$  erzeugten überein.

Hinweis: Wieso ist  $\frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}(\sigma_1 W^{(1)}(t) + \sigma_2 W^{(2)}(t))$  ein Wiener-Prozeß?

**Abgabe:** Mo. 12.07.2010 bis spätestens 11.00 in Fach 45

**Besprechung:** Am Mittwoch, dem 14.07.2010. 12.00-14.00 M5