Übungen
Abgabetermin: Dieser Zettel wird nicht korrigiert.

Aufgabe 53
Geben Sie jeweils ein geeignetes Modell an, und lösen Sie dann folgende Fragestellungen.

(i) Ist es wahrscheinlicher, mit zwei Tetraedern mindestens eine durch zwei teilbare Zahl als mit drei Tetraedern mindestens eine durch drei teilbare Zahl zu werfen?

(ii) Bei der ersten Ziehung der Lotterie „Glücksspirale 1971" wurden für die Ermittlung einer 7-stelligen Gewinnzahl aus einer Trommel, die Kugeln mit den Ziffern $0, 1, ..., 9$ je 7 mal enthält, nacheinander zufällig 7 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.

Berechnen Sie jeweils die Gewinnwahrscheinlichkeit für die Zahlen

$$1234567 \quad 8888888 \quad 3543234.$$

Wieviele Klassen $K_1, ..., K_n$ von Lottozahlen gab es in diesem Lottospiel, so dass für $\omega, \omega' \in \bigcup K_i$ gilt:

$$\exists i \ \omega, \omega' \in K_i \iff \mathbb{P}(\{\omega\}) = \mathbb{P}(\{\omega'\}).$$

Aufgabe 54
Betrachten Sie nochmal das Beispiel 3.5.3. Anders als dort angegeben sei die relative Häufigkeit von W 80%, die von G 2%, und die von N 18%.

(i) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein als G identifizierter Pilz tatsächlich ein G, wenn unser Sammler mit einer Wahrscheinlichkeit von 2% bzw. 4% ein W bzw. ein N für G hält – also genau andersherum als im Beispiel.

(ii) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein als nicht G identifizierter Pilz auch tatsächlich ungiftig?

Aufgabe 55
Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}$ so, dass $(p_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ mit

$$p_i = c \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist. Es sei X gemäß (p_i) verteilt. Berechnen Sie $\mathbb{E}\,X$.

Aufgabe 56
Auf den n Seiten eines Buches seien $2n$ Druckfehler zufällig verteilt ($n \in \mathbb{N}$). Wie groß ist (approximativ) die Wahrscheinlichkeit, dass auf der zweiten und der dritten Seite je genau ein Druckfehler vorkommt?

Aufgabe 57
Betrachten Sie eine Urne, gefüllt mit zwei Arten (z.B. zwei mögliche Farben) von Kugeln. Es ist nun bekannt, dass für eine große Anzahl an Kugeln, und eine kleine Anzahl an Zügen (ohne zurücklegen) die Wahrscheinlichkeit für einen Versuchsausgang auch durch ein geeignetes Münzwurfexperiment mit geeignet vielen Würfen relativ gut angenähert werden kann.
Formulieren Sie diese Aussage mathematisch, und beweisen Sie diese dann.

Aufgabe 58
Eine Stadt besitze 1 000 000 wahlberechtigte Einwohner, die dazu aufgerufen seien, ihre Stimme für oder gegen ein städtisches Bauvorhaben abzugeben. Eine Gruppe von n Personen stimmt geschlossen dafür, während sich die übrigen zufällig entscheiden, also durch Wurf einer fairen Münze.

(i) Berechnen Sie für $n = 400$ die Wahrscheinlichkeit, dass das Bauvorhaben angenommen wird.

(ii) Bei welcher Gruppengröße n wird das Vorhaben mit 95% Sicherheit mit einfacher Mehrheit angenommen?

Aufgabe 59
Für ein $n \in \mathbb{N}$ sind $(X_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ unabhängige Zufallsvariablen, die jeweils $\mathbb{P}(X_i = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_i = 2) = p$ für ein unbekanntes $p \in (0,1)$, erfüllen. Berechnen Sie für eine gegebene Realisierung $(x_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ einen Maximum-Likelihood-Schätzer $\widehat{p}$ für p.

(i) Ist dieser Schätzer der einzige Maximum-Likelihood-Schätzer für λ?

(ii) Ist $\widehat{\lambda}$ erwartungstreu?

(iii) Ist $\widehat{\lambda}$ konsistent?

Aufgabe 60
Eine Münze werde 5 mal geworfen. Geben Sie für das Niveau $\alpha = 0,05$ einen möglichst guten Test für

$$H : p \geq \frac{2}{3} \quad \text{gegen} \quad K : p < \frac{2}{3}$$

an.