Übungen
Abgabetermin: Dienstag, 15.12.2009, 10 Uhr

Aufgabe 33
Beweisen Sie Satz 4.5.2 aus der Vorlesung, also

Satz 0.1. *Gilt für eine Folge* $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *von Zufallsvariablen*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|Z_n - z| > \varepsilon) = 0 \quad \textit{für ein } z \in \mathbb{R} \textit{ und alle } \varepsilon > 0,$$

so ist für jede stetige und beschänkte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[f(Z_n)] = f(z).$$

Aufgabe 34

(i) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass für eine Folge $(X_n)_n$ von auf $\{1, ..., n\}$ Laplaceverteilte Zufallsvariablen

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left\{\frac{X_n}{n} \in I\right\}\right) \to \mathbb{P}(Y \in I) \text{ für alle Intervalle } I \subseteq [0,1]$$

gilt, wenn Y gleichverteilt ist, auf $[0, 1]$. Bestimmen sie ein $c \in \mathbb{R}$ so, dass die Konvergenzgeschwindigkeit mindestens $\frac{c}{n}$ ist, es soll also

$$\left|\mathbb{P}\left(\left\{\frac{X_n}{n} \in I\right\}\right) - \mathbb{P}(Y \in I)\right| \leq \frac{c}{n}$$

gelten.

(ii) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei die Zufallsvariable X_n geometrischverteilt zum Parameter $p_n > 0$. Die Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere gegen Null. Es sei weiter Y exponentialverteilt zum Parameter 1. Zeigen Sie, dass es eine Konstante $C(a, b) > 0$ gibt, so dass die Konvergenzgeschwindigkeit in Satz 4.5.7 der Vorlesung asymptotisch besser als $C \cdot p_n$ ist, also

$$\left|\mathbb{P}\big(p_n X_n \in [a, b]\big) - \mathbb{P}\big(Y \in [a, b]\big)\right| \leq C \cdot p_n$$

gilt. Beschränken Sie sich auf den Fall $1 \leq a < b$.
Hinweis Nutzen Sie die aus Analysis 1 bekannte Tatsache, dass die Folge

$$\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

asymptotisch eine Konvergenzgeschwindigkeit von $\frac{e}{2n}$ aufweist.

Aufgabe 35
Im Weinhandel des Supermarktes stehen von einer Sorte preiswerten Rotweins 76 Flaschen vom Jahrgang 2003 und 89 Flaschen vom Jahrgang 2004. Sie nehmen 9 dieser Flaschen, ohne dabei auf den Jahrgang zu achten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben Sie genau 6 Flaschen des Jahrgangs 2004? Vergleichen Sie das exakt berechnete Ergebnis mit der Wahrscheinlichkeit, die Sie mittels Approximation durch die Binomialverteilung erhalten.

Aufgabe 36
Auf den n Seiten eines Buches seien n Druckfehler zufällig verteilt ($n \in \mathbb{N}$). Wie groß ist (approximativ) die Wahrscheinlichkeit, dass auf den ersten beiden Seiten je genau ein Druckfehler vorkommt?