Satz

Gilt für eine Folge $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *von Zufallsvariablen*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\{|Z_n - z| > \varepsilon\}) = 0 \quad \textit{für ein } z \in \mathbb{R} \textit{ und alle } \varepsilon > 0,$$

so ist für jede stetige und beschränkte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[f(Z_n)] = f(z).$$

Hypergeometrische und Binomialverteilung

Satz

Für ein $n \in \mathbb{N}$ und jedes $i \in \mathbb{N}$ sei die Zufallsvariable Z_i hypergeometrisch verteilt zu den Parametern r_i, s_i, n. Falls die Folgen $(r_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ divergieren, jedoch der Grenzwert

$$a := \lim_{i\to\infty} \frac{r_i}{s_i}$$

existiert und $a > 0$ gilt, so ist

$$\lim_{i\to\infty} \mathbb{P}(\{Z_i = k\}) = \binom{n}{k} \left(\frac{a}{1+a}\right)^k \left(\frac{1}{1+a}\right)^{n-k} \quad \text{f. a. } k = 0, 1, \ldots, n.$$

Ist die Zufallsvariable Z binomialverteilt zu den Parametern n und $p := \frac{a}{1+a}$, so gilt für jede Funktion $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$

$$\lim_{i\to\infty} \mathbb{E}[f(Z_i)] = \mathbb{E}[f(Z)].$$

Satz

Ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zufallsvariable X_n Laplace–verteilt auf $\{1, \dots, n\}$, dann gilt für jedes Intervall $I \subseteq [0,1]$

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(\left\{\frac{1}{n} X_n \in I\right\}\right) = \mathcal{L}(I).$$

Ist die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ Riemann–integrierbar, so gilt

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}\left[f\left(\frac{1}{n} X_n\right)\right] = \int_0^1 f(x)\, dx.$$

Satz

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei die Zufallsvariable X_n geometrisch verteilt zum Parameter $p_n > 0$. Konvergiert die Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen Null, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\{a \le p_n X_n \le b\}) = \int_a^b e^{-t}\,dt = e^{-a} - e^{-b} \text{ für alle } 0 < a < b.$$