Erwartungswert einer Zufallsvariablen

Satz (Linearität des Erwartungswerts)

Auf einem W–Raum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ seien zwei Zufallsvariablen X und Y mit ihren Erwartungswerten $\mathbb{E}X$ und $\mathbb{E}Y$ gegeben. Dann existiert der Erwartungswert der Zufallsvariablen $a \cdot X + b \cdot Y$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und es ist

$$\mathbb{E}[a \cdot X + b \cdot Y] = a \cdot \mathbb{E}X + b \cdot \mathbb{E}Y.$$

Erwartungswert einer Zufallsvariablen

Beispiele

1. *Die Zufallsvariable X heißt Laplace–verteilt auf $\{1, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, wenn*

$$\mathbb{P}(\{X = k\}) = \frac{1}{n} \quad \textit{für alle } k = 1, \ldots, n$$

   gilt. Es gilt $\mathbb{E}X = \frac{1}{2}(n+1)$.

2. *Die Zufallsvariable X heißt Bernoulli–verteilt zum Parameter $p \in [0, 1]$, falls*

$$\mathbb{P}(\{X = 1\}) = p \quad \textit{und} \quad \mathbb{P}(\{X = 0\}) = 1 - p$$

   gilt. Es gilt

$$\mathbb{E}X = 1 \cdot \mathbb{P}(\{X = 1\}) + 0 \cdot \mathbb{P}(\{X = 0\}) = p.$$

Erwartungswert einer Zufallsvariablen

Beispiele

1. *Seien* $r, s, n \in \mathbb{N}$ *mit* $n \leq r$ *und* $n \leq s$*, dann heißt die Zufallsvariable* X *hypergeometrisch verteilt zu den Parametern* r, s, n*, falls*

$$\mathbb{P}(\{X = k\}) = \frac{\binom{r}{k} \cdot \binom{s}{n-k}}{\binom{r+s}{n}} \quad \text{für } k = 0, 1, \dots, n.$$

Es gilt:

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \mathbb{P}(\{X = k\}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{nr}{r+s} \cdot \mathbb{P}(\{Y = k-1\}) = \frac{nr}{r+s}.$$

Beispiele

1. *Die Zufallsvariable X heißt binomialverteilt zu den Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0,1]$ (kurz $B(n,p)$–verteilt), falls*

$$\mathbb{P}(\{X = k\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{für } k = 0, 1, \ldots, n.$$

   Es gilt:

$$\mathbb{E}X = np.$$

2. *Die Zufallsvariable X heißt geometrisch verteilt zum Parameter $p \in [0,1]$, falls*

$$\mathbb{P}(\{X = k\}) = (1-p)^{n-1} \cdot p \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

   Es gilt:

$$\mathbb{E}X = 1/p.$$

Beispiele

1. *Die Zufallsvariable X heißt negativ binomialverteilt zu den Parametern $r \in \mathbb{N}$ und $p \in [0,1]$, falls für $n \geq r$ gilt:*

$$\mathbb{P}(\{X = n\}) = \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}.$$

Es gilt:

$$\mathbb{E}X = \frac{r}{p}.$$

2. *Die Zufallsvariable X heißt Poisson-verteilt zum Parameter $\lambda \in \mathbb{R}^+$, falls*

$$\mathbb{P}(\{X = n\}) = \pi_\lambda(n) := \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \text{ für } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Es gilt $\mathbb{E}X = \lambda$.

Erwartungswert einer Zufallsvariablen

Satz

Gegeben sei eine Zufallsvariable X *mit Verteilung* $\mathbb{P}_X = (p(x_j))_{j \in J}$ *für eine Indexmenge* $J \subseteq \mathbb{N}$ *und eine Abbildung*

$$f : \{x_j \mid j \in J\} \to \mathbb{R}.$$

Der Erwartungswert $\mathbb{E}[f \circ X]$ *existiert genau dann, wenn* $\sum_{j \in J} |f(x_j)| \cdot p(x_j) < +\infty$ *ist und in diesem Fall gilt dann*

$$\mathbb{E}[f \circ X] = \mathbb{E}[\mathbb{P}_{f \circ X}] = \sum_{j \in J} f(x_j) \cdot p(x_j).$$

Definition

Eine stückweise stetige Funktion $\varrho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *(Wahrscheinlichkeits-)Dichte*, falls $\varrho(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varrho(x)\, dx = 1.$$

Ist ϱ eine Dichte, dann heißt das durch

$$\mathbb{P}\big((a,b)\big) = \int_a^b \varrho(x)\, dx \quad \text{für alle } a < b$$

definierte W–Maß $\mathbb{P}$ *absolut stetig*. Eine Zufallsvariable X heißt *absolut stetig verteilt*, wenn $\mathbb{P}_X$ *absolut stetig* ist.

Erwartungswert bei Dichten

Definition

Eine Zufallsvariable X besitze eine Verteilung $\mathbb{P}_X$ mit der Dichte ϱ. Gilt für eine stückweise stetige Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \cdot \varrho(x)\, dx < +\infty,$$

dann ist der Erwartungswert der Zufallsvariablen $f \circ X$ definiert durch

$$\mathbb{E}[f \circ X] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \varrho(x)\, dx.$$

Falls $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, so ist $\mathbb{E}X := \mathbb{E}[f \circ X]$ der Erwartungswert von X.

Erwartungswert bei Dichten

Konvention Ist ein absolut stetiges Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ mit Dichte ϱ gegeben, und ist $\int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot \varrho(x)\, dx < +\infty$, so ist der Erwartungswert von $\mathbb{P}$

$$\mathbb{E}[\mathbb{P}] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \varrho(x)\, dx.$$