Erwartungswert einer Zufallsvariablen

Satz

Gegeben sei eine Zufallsvariable X mit Verteilung $\mathbb{P}_X = \left(p(x_j)\right)_{j \in J}$ für eine Indexmenge $J \subseteq \mathbb{N}$ und eine Abbildung

$$f : \{x_j \mid j \in J\} \to \mathbb{R}.$$

Der Erwartungswert $\mathbb{E}[f \circ X]$ existiert genau dann, wenn $\sum_{j \in J} |f(x_j)| \cdot p(x_j) < +\infty$ ist und in diesem Fall gilt dann

$$\mathbb{E}[f \circ X] = \mathbb{E}[\mathbb{P}_{f \circ X}] = \sum_{j \in J} f(x_j) \cdot p(x_j).$$

Dichte

Definition

Eine stückweise stetige Funktion $\varrho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *(Wahrscheinlichkeits-)Dichte*, falls $\varrho(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varrho(x)\, dx = 1.$$

Ist ϱ eine Dichte, dann heißt das durch

$$\mathbb{P}\big((a,b)\big) = \int_a^b \varrho(x)\, dx \quad \text{für alle } a < b$$

definierte W–Maß $\mathbb{P}$ *absolut stetig*. Eine Zufallsvariable X heißt *absolut stetig verteilt*, wenn $\mathbb{P}_X$ *absolut stetig* ist.

Erwartungswert bei Dichten

Definition

Eine Zufallsvariable X besitze eine Verteilung $\mathbb{P}_X$ mit der Dichte ϱ. Gilt für eine stückweise stetige Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \cdot \varrho(x)\, dx < +\infty,$$

dann ist der Erwartungswert der Zufallsvariablen $f \circ X$ definiert durch

$$\mathbb{E}[f \circ X] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \varrho(x)\, dx.$$

Falls $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, so ist $\mathbb{E}X := \mathbb{E}[f \circ X]$ der Erwartungswert von X.

Erwartungswert bei Dichten

Konvention Ist ein absolut stetiges Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ mit Dichte ϱ gegeben, und ist $\int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot \varrho(x)\, dx < +\infty$, so ist der Erwartungswert von $\mathbb{P}$

$$\mathbb{E}[\mathbb{P}] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \varrho(x)\, dx.$$

Satz

Sind X und Y Zufallsvariablen über einem W–Raum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit endlichen Erwartungswerten, dann gilt

$$\mathbb{E}[a \cdot X + b \cdot Y] = a \cdot \mathbb{E}X + b \cdot \mathbb{E}Y \quad \text{für alle } a, b \in \mathbb{R}.$$

Falls $X(\omega) \leq Y(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$, so ist $\mathbb{E}X \leq \mathbb{E}Y$. Insbesondere ist $|\mathbb{E}X| \leq \mathbb{E}|X|$ und falls $X(\omega) \geq 0$ für alle $\omega \in \Omega$, so gilt $\mathbb{E}X \geq 0$.

Beispiele

1. *Für $\alpha < \beta$ definier*

$$\varrho(x) = 1/(\beta - \alpha)\mathbb{I}_{x \in [\alpha, \beta]}.$$

Eine Zufallsvariable X heißt gleichverteilt auf $[\alpha, \beta]$, *falls $\mathbb{P}_X$ diese Dichte ϱ hat.*
Der Erwartungswert berechnet sich zu

$$\mathbb{E}X = a = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Weiter gilt

$$\mathbb{E}[X^2] = \frac{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}{3}.$$

Erwartungswert mit Dichten

Beispiele

1. *Zu reellen Zahlen* $\mu \in \mathbb{R}$ *und* $\sigma^2 > 0$ *sei die Funktion* $\varphi_{\mu,\sigma^2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definiert durch*

$$\varphi_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} , \; x \in \mathbb{R}.$$

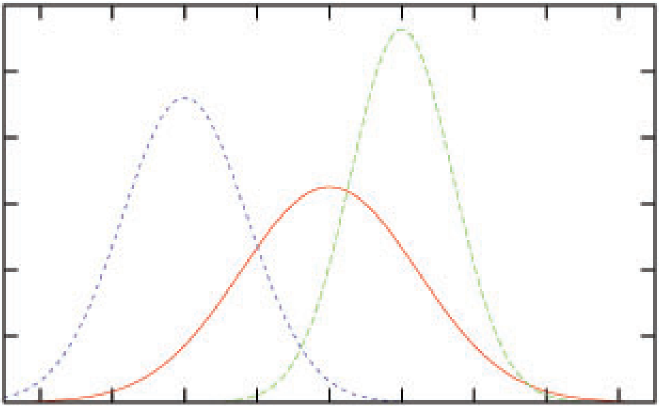
Wir nennen eine Zufallsvariable X *normalverteilt zu den Parametern* μ *und* σ^2 *(kurz* $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$*–verteilt), wenn* $\mathbb{P}_X$ *die Dichte* φ_{μ,σ^2} *besitzt; falls* $\mu = 0$ *und* $\sigma^2 = 1$ *ist, nennen wir* X *standardnormalverteilt. Es gilt*

$$\mathbb{E}(X) = \mu$$

und

$$\mathbb{E}((X - \mu)^2) = \sigma^2.$$

Normalverteilungen



Beispiele

1. *Für ein $0 < \lambda \in \mathbb{R}$ definieren wir*

$$\varrho(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \ . \end{cases}$$

Wir nennen eine Zufallsvariable X exponentialverteilt zum Parameter λ, wenn $\mathbb{P}_X$ diese Dichte hat. Es gilt

$$\mathbb{E}X = \frac{1}{\lambda}.$$

Ebenso gilt

$$\mathbb{E}[X^2] = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Definition

Seien $X_1, \ldots, X_n$ Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, dann heißen $X_1, \ldots, X_n$ *(stochastisch) unabhängig*, wenn für alle Intervalle $I_1, \ldots, I_n \subseteq \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(\{X_1 \in I_1\} \cap \ldots \cap \{X_n \in I_n\}) = \mathbb{P}(\{X_1 \in I_1\}) \cdots \mathbb{P}(\{X_n \in I_n\}).$$

Man kann zeigen, dass für unabhängige Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ sogar

$$\mathbb{P}(\{X_1 \in M_1\} \cap \ldots \cap \{X_n \in M_n\}) = \mathbb{P}(\{X_1 \in M_1\}) \cdots \mathbb{P}(\{X_n \in M_n\})$$

für alle Mengen $M_1, \ldots, M_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ gilt.

Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Satz

Seien $X_1, \ldots, X_n$ diskret verteilte Zufallsvariablen auf einem W–Raum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, dann sind $X_1, \ldots, X_n$ genau dann unabhängig, wenn für alle $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{P}(\{X_1 = a_1\} \cap \ldots \{X_n = a_n\}) = \mathbb{P}(\{X_1 = a_1\}) \cdots \mathbb{P}(\{X_n = a_n\}).$$

Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Satz

Sind X und Y diskret verteilte und stochastisch unabhängige Zufallsvariablen mit existierenden Erwartungswerten und existiert auch $\mathbb{E}[X \cdot Y]$, so gilt

$$\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y.$$

Die Umkehrng dieses Satzes gilt i.A. nicht! Es gilt aber allgemeiner auch für nicht diskrete Zufallsvariablen:

Satz

Sind X und Y stochastisch unabhängige Zufallsvariablen mit existierenden Erwartungswerten und existiert auch $\mathbb{E}[X \cdot Y]$, so gilt

$$\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y.$$