

Ziel: Modelliere *bedingte* Wahrscheinlichkeiten.

- Ein Ereignis $A \in \mathcal{A}$ wird mit der Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(A)$ eintreten.
- Was ist nun unter der Bedingung, dass wir wissen, dass ein Ereignis B eintritt, die Wahrscheinlichkeit, dass auch A eintritt?
- Bezeichnen wir diese andere Wahrscheinlichkeit mit $\mathbb{P}(A|B)$, so sind für ihre Berechnung sicher nur die ω relevant, die sowohl in A als auch in B liegen, also $\omega \in A \cap B$.
- Wir können nicht einfach $\mathbb{P}(A|B)$ gleich $\mathbb{P}(A \cap B)$ setzen, denn dann wäre zB

$$\mathbb{P}(\Omega|B) = \mathbb{P}(B),$$

was nicht notwendig eine Wahrscheinlichkeit ist

Definition

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \mathcal{A}$ mit $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Als die *bedingte Wahrscheinlichkeit von A gegeben B* definieren wir

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Ziel: Modelliere *Unabhängigkeit*.

- Im Alltag nennen wir zwei Ereignisse A und B unabhängig, wenn das Eintreten von B die Realisierung von A nicht beeinflusst.
- In Symbolen ausgedrückt bedeutet dies

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A).$$

- Mit anderen Worten, es soll gelten

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

- Hierfür wird auch nicht $\mathbb{P}(B) \neq 0$ benötigt.

Definition (Unabhängigkeit zweier Ereignisse)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, dann heißen $A, B \in \mathcal{A}$ unabhängig, falls

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

- Wir wollen den Begriff der Unabhängigkeit auf mehr als zwei Ereignisse ausweiten.
- Naheliegend: Für Ereignisse A_1, \dots, A_n definieren wir ihre Unabhängigkeit durch die Gültigkeit der Gleichung

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdots \mathbb{P}(A_n) \quad (2)$$

- Diese Forderung reicht nicht aus.
- Betrachten wir z.B. ein Laplace-Modell mit $\Omega = \{1, 2\}$ und den Ereignissen $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2\}$ und $A_3 = \emptyset$, dann gilt

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0 = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3),$$

- D.h. mit obiger Definition wären dann A_1 , A_2 und A_3 unabhängig. Andererseits ist jedoch

$$0 = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) \neq \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2) = \frac{1}{4},$$

d.h. A_1 und A_2 sind nicht unabhängig!

Definition

Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und Ereignisse $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Die Ereignisse heißen *unabhängig*, falls für jedes $1 \leq m \leq n$ und jede Teilmenge $\{i_1, \dots, i_m\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ gilt

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_m}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdots \mathbb{P}(A_{i_m}).$$

Natürlich impliziert die Unabhängigkeit von A_1, \dots, A_n auch die **paarweise Unabhängigkeit**, d.h. die Unabhängigkeit je zweier Ereignisse:

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$$

für $i \neq j$

- Ein *n*-stufiges Zufallsexperiment ist ein Experiment, dass aus *n* Einzelversuchen besteht, wobei wir annehmen, dass die Versuchsausgänge der späteren Versuche die früheren nicht beeinflussen, wohl aber möglicherweise umgekehrt.
- Als Grundmenge Ω nehmen wir

$$\Omega := \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n := \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \mid \omega_i \in \Omega_i, 1 \leq i \leq n\}.$$

- Dabei enthält für jedes $i = 1, \dots, n$ die Menge Ω_i die möglichen Versuchsausgänge des *i*-ten Experimentes, und zwar *ohne* Berücksichtigung aller anderen Experimente.
- Die Menge Ω_i beschreibt den *i*-ten Versuch so, als sei er unbeeinflusst von den übrigen Versuchen. Die Abhängigkeit wird also nicht mit der Menge Ω selbst modelliert, sondern mit \mathbb{P} .
- Wenn alle Ω_i endliche Mengen sind, dann ist auch Ω endlich und wir wählen, wie immer, $\mathcal{P}(\Omega)$ als σ -Algebra über Ω .