Varianz

Definition

Ist für eine Zufallsvariable X der Ausdruck

$$\mathbb{V}X = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2]$$

endlich, so heißt er *Varianz von* X und $\sqrt{\mathbb{V}X}$ heißt *Standardabweichung von* X. Ist für zwei Zufallsvariablen X und Y der Ausdruck

$$\mathbb{K}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X) \cdot (Y - \mathbb{E}Y)]$$

endlich, so heißt er *Kovarianz von* X *und* Y.

Varianz

Lemma

Sind für zwei Zufallsvariablen X und Y auf einem W–Raum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ die Erwartungswerte $\mathbb{E}X^2$ und $\mathbb{E}[Y^2]$ endlich, dann gilt dies auch für die Größen

$$\mathbb{E}X\ ,\ \mathbb{E}Y\ ,\ \mathbb{E}[X \cdot Y]\ ,\ \mathbb{V}X\ ,\ \mathbb{V}Y\ ,\ \mathbb{K}(X, Y).$$

Varianz

Satz (Verschiebungssatz der Varianz)

Seien X *und* Y *Zufallsvariablen auf einem W–Raum und* $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ *und* $\mathbb{E}[Y^2] < \infty$, *dann gilt*

$$\mathbb{K}(X, Y) = \mathbb{E}[X \cdot Y] - \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y.$$

Insbesondere gilt für eine Zufallsvariable X *mit* $\mathbb{E}[X^2] < \infty$

$$\mathbb{V}X = \mathbb{K}(X, X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}X)^2.$$

Korollar

Ist $\mathbb{K}(X_i, X_j) = 0$ *für* $1 \leq i \neq j \leq n$*, so ist mit den Voraussetzungen von Satz* **??**

$$\mathbb{V}\Big[\sum_{i=1}^{n} X_i\Big] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}X_i. \tag{3}$$

Insbesondere gilt dies für paarweise unabhängige Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$.

Tschebyschev-Ungleichung

Satz (Tschebyschev–Ungleichung)

Es sei X eine Zufallsvariable mit $\mathbb{E}[X^2] < \infty$, dann gilt für jedes $a > 0$

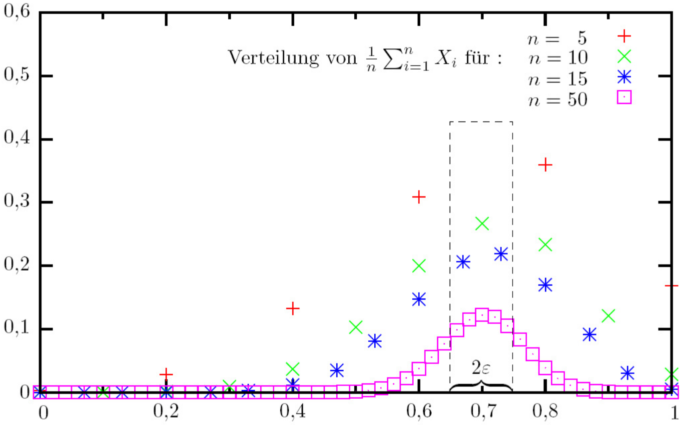
$$\mathbb{P}(\{|X - \mathbb{E}X| \geq a\}) \leq \frac{\mathbb{V}X}{a^2}.$$

Satz (Gesetz der großen Zahlen)

Sind $X_1, \ldots, X_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ paarweise unabhängige Zufallsvariablen mit gleichem Erwartungswert $m := \mathbb{E}X_i$ und gleicher Varianz $s^2 := \mathbb{V}X_i < \infty$ für alle $1 \leq i \leq n$, dann gilt für jedes $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - m\right| > \varepsilon\right\}\right) = 0.$$

Gesetz der großen Zahlen



Gesetz der großen Zahlen

- Wenden wir das Korollar auf den n–fachen fairen Münzwurf an, so erhalten wir, dass die relative Häufigkeit der geworfenen Einsen gegen $1/2$ konvergiert.
- Dies bedeutet aber nicht, dass beispielsweise für gerades $n \in \mathbb{N}$ die Wahrscheinlichkeit, dass in n Würfen genau $n/2$ Einsen fallen, gegen 1 geht.
- Im Gegenteil: Diese Wahrscheinlichkeit ist etwa $\sqrt{\frac{2}{\pi n}}$ und konvergiert daher mit wachsendem n gegen 0.
- In Worten: Es wird zwar immer unwahrscheinlicher, dass die relative Häufigkeit der Einsen deutlich von $1/2$ abweicht, jedoch wird es auch immer unwahrscheinlicher, dass diese Häufigkeit genau gleich $1/2$ ist.