

Satz (Gesetz der großen Zahlen)

Sind X_1, \dots, X_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ paarweise unabhängige Zufallsvariablen mit gleichem Erwartungswert $m := \mathbb{E}X_i$ und gleicher Varianz $s^2 := \mathbb{V}X_i < \infty$ für alle $1 \leq i \leq n$, dann gilt für jedes $\varepsilon > 0$

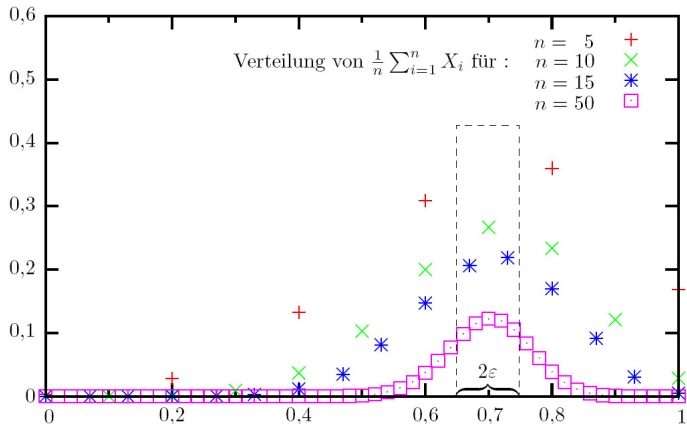
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - m\right| > \varepsilon\right\}\right) = 0.$$

Korollar

Ein Experiment werde n -mal unabhängig durchgeführt und es sei X_i die Indikatorvariable für ein Ereignis A im i -ten Versuch: Also 1, falls A im i -ten Versuch eintritt und 0 sonst. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mathbb{P}(A) \right| > \varepsilon \right\} \right) = 0.$$

Gesetz der großen Zahlen



- Wenden wir das Korollar auf den n -fachen fairen Münzwurf an, so erhalten wir, dass die relative Häufigkeit der geworfenen Einsen gegen $1/2$ konvergiert.
- Dies bedeutet aber nicht, dass beispielsweise für gerades $n \in \mathbb{N}$ die Wahrscheinlichkeit, dass in n Würfeln genau $n/2$ Einsen fallen, gegen 1 geht.
- Im Gegenteil: Diese Wahrscheinlichkeit ist etwa $\sqrt{\frac{2}{\pi n}}$ und konvergiert daher mit wachsendem n gegen 0.
- In Worten: Es wird zwar immer unwahrscheinlicher, dass die relative Häufigkeit der Einsen deutlich von $1/2$ abweicht, jedoch wird es auch immer unwahrscheinlicher, dass diese Häufigkeit genau gleich $1/2$ ist.

Satz

Gilt für eine Folge $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Zufallsvariablen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\{|Z_n - z| > \varepsilon\}) = 0 \text{ für ein } z \in \mathbb{R} \text{ und alle } \varepsilon > 0,$$

so ist für jede stetige und beschränkte Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[f(Z_n)] = f(z).$$

Satz

Für ein $n \in \mathbb{N}$ und jedes $i \in \mathbb{N}$ sei die Zufallsvariable Z_i hypergeometrisch verteilt zu den Parametern r_i, s_i, n . Falls die Folgen $(r_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und $(s_i)_{i \in \mathbb{N}}$ divergieren, jedoch der Grenzwert

$$a := \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{r_i}{s_i}$$

existiert und $a > 0$ gilt, so ist

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\{Z_i = k\}) = \binom{n}{k} \left(\frac{a}{1+a}\right)^k \left(\frac{1}{1+a}\right)^{n-k} \quad \text{f. a. } k = 0, 1, \dots, n.$$

Ist die Zufallsvariable Z binomialverteilt zu den Parametern n und $p := \frac{a}{1+a}$, so gilt für jede Funktion $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{E}[f(Z_i)] = \mathbb{E}[f(Z)].$$

Satz

Ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zufallsvariable X_n Laplace-verteilt auf $\{1, \dots, n\}$, dann gilt für jedes Intervall $I \subseteq [0, 1]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\left\{\frac{1}{n}X_n \in I\right\}\right) = \mathcal{L}(I).$$

Ist die Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left[f\left(\frac{1}{n}X_n\right)\right] = \int_0^1 f(x) dx.$$