

Satz

Ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zufallsvariable X_n Laplace-verteilt auf $\{1, \dots, n\}$, dann gilt für jedes Intervall $I \subseteq [0, 1]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\left\{\frac{1}{n}X_n \in I\right\}\right) = \mathcal{L}(I).$$

Ist die Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left[f\left(\frac{1}{n}X_n\right)\right] = \int_0^1 f(x) dx.$$

Satz

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei die Zufallsvariable X_n geometrisch verteilt zum Parameter $p_n > 0$. Konvergiert die Folge $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen Null, so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\{a \leq p_n X_n \leq b\}) = \int_a^b e^{-t} dt = e^{-a} - e^{-b} \text{ für alle } 0 < a < b.$$

Satz (Poissonscher Grenzwertsatz)

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei die Zufallsvariable X_n binomialverteilt zu den Parametern n und p_n . Konvergiert die Folge $(n \cdot p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen ein > 0 , so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\{X_n = k\}) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \quad \text{für alle } k = 0, 1, 2, \dots$$

- Es gilt sogar mehr.
- Um das zu präzisieren, benötigen wir ein Maß für den Abstand zweier Wahrscheinlichkeiten.
- Dies wird in unserem Fall gegeben sein durch

$$\Delta(n, p) := \sum_{k=0}^{\infty} |b(k; n, p) - \pi_{np}(k)|.$$

- $\Delta(n, p)$ läßt sich ähnlich auf für den Abstand beliebiger anderer Wahrscheinlichkeiten definieren und heißt *Abstand der totalen Variation*.

Damit gilt

Satz

Es seien X_1, \dots, X_n unabhängige Zufallsvariablen, definiert auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum, mit $P(X_i = 1) = p_i$ und $P(X_i = 0) = 1 - p_i$ mit $0 < p_i < 1$ für alle $i = 1, \dots, n$. Sei $X = X_1 + \dots + X_n$ und $\lambda = p_1 + \dots + p_n$, dann gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |P(X = k) - \pi_{\lambda}(k)| \leq 2 \sum_{i=1}^n p_i^2.$$

Eine unmittelbare Konsequenz ist

Satz

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $p \in (0, 1)$ gilt $\Delta(n, p) \leq 2np^2$.

Der obige Grenzwertsatz von Poisson ist ein Korollar hieraus.

Satz

X und Y seien unabhängig und Poisson-verteilt mit Parametern λ beziehungsweise $\mu > 0$. Dann ist $X + Y$ Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda + \mu$.