

- Es gilt sogar mehr.
- Um das zu präzisieren, benötigen wir ein Maß für den Abstand zweier Wahrscheinlichkeiten.
- Dies wird in unserem Fall gegeben sein durch

$$\Delta(n, p) := \sum_{k=0}^{\infty} |b(k; n, p) - \pi_{np}(k)|.$$

- $\Delta(n, p)$ läßt sich ähnlich auf für den Abstand beliebiger anderer Wahrscheinlichkeiten definieren und heißt *Abstand der totalen Variation*.

Damit gilt

Satz

Es seien X_1, \dots, X_n unabhängige Zufallsvariablen, definiert auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum, mit $P(X_i = 1) = p_i$ und $P(X_i = 0) = 1 - p_i$ mit $0 < p_i < 1$ für alle $i = 1, \dots, n$. Sei $X = X_1 + \dots + X_n$ und $\lambda = p_1 + \dots + p_n$, dann gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |P(X = k) - \pi_{\lambda}(k)| \leq 2 \sum_{i=1}^n p_i^2.$$

Eine unmittelbare Konsequenz ist

Satz

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $p \in (0, 1)$ gilt $\Delta(n, p) \leq 2np^2$.

Der obige Grenzwertsatz von Poisson ist ein Korollar hieraus.

Satz

X und Y seien unabhängig und Poisson-verteilt mit Parametern λ beziehungsweise $\mu > 0$. Dann ist $X + Y$ Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda + \mu$.

- In einem bekannten Experiment beobachteten die Physiker Rutherford und Geiger den Zerfall einer radioaktiven Substanz.
- Sie studierten die Emission von α -Teilchen eines radioaktiven Präparates in $n = 2608$ Zeitabschnitten von 7.5 Sekunden.
- Die folgende Tabelle gibt die Versuchsergebnisse wieder.
- Hierbei gibt k die Anzahl der Emissionen wieder, r_k die relativen Häufigkeiten und $\pi_\lambda(k)$ die Poisson-Wahrscheinlichkeit zum Parameter $\lambda = 3.87$.

Der Poissonsche Punktprozess

k	r_k	$\pi_\lambda(k)$
0	0.0219	0.0208
1	0.0778	0.0807
2	0.1469	0.1561
3	0.2013	0.2015
4	0.2040	0.1949
5	0.1564	0.1509
6	0.1047	0.0973
7	0.0533	0.0538
8	0.0173	0.0260
9	0.0103	0.0112
10	0.0038	0.0043
11	0.0015	0.0015
12	0	0.0005
13	0.0004	0.0002
14	0.0004	4×10^{-5}

- Wir konstruieren ein mathematisches Modell für auf einer Zeitachse zufällig eintretende Vorkommnisse.
- Die Zeitachse sei $(0, \infty)$, und die „Vorkommnisse“ seien einfach zufällige Punkte auf dieser Achse.
- Die Konstruktion eines unterliegenden Wahrscheinlichkeitsraumes ist leider etwas aufwendig und soll hier einfach weggelassen werden (wir glauben hier einfach mal, dass man das kann).
- Ist $I = (t, t + s]$ ein halboffenes Intervall, so bezeichnen wir mit N_I die zufällige Anzahl der Punkte in I .
- N_I ist also eine Zufallsgröße mit Werten in \mathbb{N}_0 .
- Statt $N_{(0,t]}$ schreiben wir auch einfach N_t .

An unser Modell stellen wir eine Anzahl von Bedingungen (P1) bis (P5), die für Anwendungen oft nur teilweise realistisch sind.

- (P1) Die Verteilung von N_I hängt nur von der Länge des Intervalls I ab. Man bezeichnet das auch als (zeitliche) Homogenität des Punktprozesses.
- (P2) Sind I_1, I_2, \dots, I_k paarweise disjunkte Intervalle, so sind $N_{I_1}, N_{I_2}, \dots, N_{I_k}$ unabhängige Zufallsgrößen.
- (P3) Für alle I (stets mit endlicher Länge) existiert EN_I .
- (P4) Es existiert ein Intervall I mit $P(N_I > 0) > 0$.

- Für kleine Intervalle ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass überhaupt ein Punkt in diesem Intervall liegt, klein. Es gilt:
- $P(N_I \geq 1) = \sum_{k=1}^{\infty} P(N_I = k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} kP(N_I = k) = EN_I$ und demzufolge

$$P(N_{(t,t+\varepsilon]} \geq 1) \leq \lambda\varepsilon \quad \text{für alle } t, \varepsilon \geq 0.$$

- Unsere letzte Forderung besagt, dass sich je zwei Punkte separieren lassen, es also keine Mehrfachpunkte gibt.
- Dazu sei für $T > 0$

$$D_T(\omega) := \inf_{t,s \leq T} \{|t - s| : |N_t - N_s| \geq 1\}$$

- Dann besagt unsere Forderung (P5):

$$P(D_T \leq \alpha_n) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{P5})$$

für jede Nullfolge α_n und jedes endliche T .

Satz

Sind (P1) bis (P5) erfüllt, so sind für alle $t, s \geq 0$ die Zufallsgrößen $N_{(t, t+s]}$ Poisson-verteilt mit Parameter λs .