Versicherungsmathematik
(Lebens- und Pensionsversicherung)

Volkert Paulsen

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **3**

2 Einfache Beispiele für Personenversicherungen **7**

2.1 Rechnungsgrundlagen . . . 7

2.1.1 Rechnungszins . . . 7

2.1.2 Sterblichkeit . . . 7

2.1.3 Kosten . . . 9

2.2 Versicherungsformen . . . 10

2.2.1 Sofortrente . . . 10

2.2.2 Aufgeschobene Rente . . . 10

2.2.3 Todesfallversicherung . . . 10

2.2.4 Erlebensfallversicherung . . . 10

2.2.5 gemischte Versicherung . . . 11

2.3 Barwerte . . . 11

2.4 Kommutationswerte . . . 14

2.5 Periodische (jährliche) Nettoprämie . . . 15

2.6 Bruttoeinmalbetrag . . . 16

2.7 Periodische (jährliche) Bruttoprämie . . . 17

2.8 Deckungskapital . . . 18

2.9 Das Bruttodeckungskapital . . . 21

2.10 Rekursionsformel für das Deckungskapital . . . 23

3 Ein allgemeines diskretes Modell **27**

3.1 Deterministische Zahlungsströme . . . 27

3.2 Zufällige Zahlungsströme . . . 31

3.3 Markov-Ketten . . . 32

3.4 Markov-Ketten Modellierung . . . 35

3.5 Ein Leben unter mehreren konkurrierenden Risiken . . . 39

3.6 Mehrere Leben unter einem Risiko 42
3.6.1 Zwei verbundene Leben 43
3.6.2 Drei verbundene Leben 45

4 Pensionsversicherung 47
4.1 Modellbeschreibung 47
4.2 Rentenbarwerte 48
4.3 Anwartschaftsbarwerte 49
4.3.1 Anwartschaft eines Aktiven auf lebenslängliche Aktivenaltersrente . 49
4.3.2 Anwartschaft eines Aktiven auf lebenslängliche Invaliden- und Altersrente 50

5 Witwenanwartschaft 53
5.1 Individualmethode 53
5.2 kollektive Methode 55
5.3 vereinfachte Kollektivmethode 57

6 Deckungskapital 59
6.1 Thielesche Rekursionsgleichung 59
6.2 Höhere Momente 65
6.2.1 keine Erlebensfalleistung 65
6.2.2 Berücksichtigung von Erlebensfallleistungen 66
6.3 Verteilungsfunktion 67
6.4 Anwendungen 68
6.5 Hattendorfsches Theorem 68

7 Zeitstetige Modelle 73
7.1 Beispiele 73
7.2 Markovsche Sprungprozesse 75
7.3 Zahlungsströme 79
7.4 Modellbildung 81

Kapitel 1

Einleitung

In dieser Vorlesung soll die Versicherungs- insbesondere Lebensversicherungsmathematik, dargestellt werden. Die Vorlesung ist in zwei Teile untergliedert. Im ersten Teil wird gezeigt, wie in der Praxis Personenversicherungsverträge bewertet werden, während im zweiten Teil eine ausführliche mathematische Theorie entwickelt wird, mit der Personenversicherungen beschrieben werden können. Beginnen wollen wir mit einer sprachlichen Beschreibung des Versicherungsbegriffs, die z.B. in Farny (1988) S. 870 zu finden ist.

1.0.1 Definition: *Versicherung ist die Deckung eines im einzelnen ungewissen, insgesamt geschätzten Mittelbedarfs auf der Grundlage des Risikoausgleichs im Kollektiv und in der Zeit.*

Hieraus ergeben sich einige Hauptmerkmale des Versicherungsgeschäftes

- Finanzierung aus den Entgelten
- Ungewißheit hinsichtlich des versicherten Ereignisses
- Risikokalkulation und Risikoausgleich

Das Versicherungsgeschäft ist interdiszilpinär. Benötigt werden in der Praxis

- Mathematiker zur Tarifkalkulation
- Juristen zur Ausgestaltung von Versicherungsbedingungen
- Ökonomen für die Kapitalanlage der Reserve
- Mediziner zur Risikoprüfung
- Techniker zur Bewertng von Gebäuden

Man unterscheidet folgende Versicherungsarten:

- Composit Sparten
  - Kraftfahrzeugversicherung
  - Sachversicherung
    - Hausrat
    - Wohngebäude
  - private Haftpflicht
  - Rechtsschutz
- Personenversicherung
  - Lebensversicherung
  - private Rentenversicherung
  - Berufsunfähigkeit, Pensionen
  - Unfallversicherung

Entsprechend teilt man die Versicherungsmathematik ein in

- Personenversicherungsmathematik
- Schadensversicherungsmathematik (ASTIN)
  Actuarial Studies in Non-life insurance
- Finanzmathematik (AFIR)
  Actuarial aproach for FInancial Risk, Steuerung der Kapitalanlagen des Versicherungsunternehmens und deren Abstimmung mit den Leistungsverpflichtungen

Hieraus ergeben sich unter anderem folgende Betätigungsfelder für Mathematiker in der Versicherungswirtschaft:

- mathematische Beschreibung des versicherten Risikos
- statistische Schätzung des zufälligen Risikos
  Erstellung von Sterbetafeln, Schadenshöhenverteilung
- Tarifierung und Prämienkalkulation
  - Identfkation von Schadenseinflußgrößen und Bereitstellung von Tarifierungsmerkmalen
  - Berechung von Barwerten, Prämien, Kosten, Deckungskapitalien, ...
- versicherungstechnische Analyse
  - Überschußermittlung
  - Uberschußzerlegung nach Ursachen
  - Renditeberechnungen

  - Controlling
- Berechnung von Rückstellungen und Sicherheitereserven
- Risikoteilung (VN-VU-Rückversicherer)
- Beschreibung des Zinsrisikos und Steuerung der Kapitalanlagen

Kapitel 2

Einfache Beispiele für Personenversicherungen

In diesem Kapitel werden die Lebensversicherung und private Rentenversicherung als typischen Beispiele für Personenversicherungen eingeführt und die gängigen mathematischen Verfahren zur Behandlung dieser Versicherungsarten vorgestellt. Damit ist der Leser in der Lage, die in der Praxis verbreitetsten Versicherungen zu kalkulieren. Wir folgen dem Buch von Isenbart und Münzner und stellen die Kalkulationsprinzipien dar, nach denen in der Praxis Versicherungsunternehmen diese Versicherungen bewerten. Daher verfolgen wir einen zeitlich diskreten, periodischen Ansatz. Dies bedeutet, daß die Zeit in äquidistante Versicherungsperioden etwa Jahre unterteilt wird.

2.1 Rechnungsgrundlagen

Wir geben die Rechnungsgrundlagen an, nach denen üblicherweise eine Tarifkalkulation durchgeführt wird.

2.1.1 Rechnungszins

Üblicherweise wird eine konstante Kaitalverzinsung mit einem periodischen Zinssatz $i > 0$ über die Gesamtlaufeit angenommen. Damit ergibt sich für ein Anfangskapital K die folgende Kapitalentwicklung

$$K(1+i)^n \quad , n \in \mathbb{N}_0.$$

Der periodische Diskontfaktor ist dann gegeben durch

$$v = \frac{1}{1+i} \tag{2.1}$$

2.1.2 Sterblichkeit

Das unbestimmte in der Lebens-bzw. Rentenversicherung macht den Zeitpunkt des Todes aus. Beschrieben wird die Verteilung der zufälligen Restlebensdauer durch Sterbetafeln, die mittels statistischer Verfahren erstellt werden müssen. Sterbetafeln hängen vom Geschlecht ab und geben die einjährigen Sterbewahrscheinlichkeiten an. Sie werden bezeichnet durch

$$(q_x)_{x \in \mathbb{N}_0}. \tag{2.2}$$

q_x kennzeichnet also die Wahrscheinlickeit eines x-jährigen im folgenden Jahr zu versterben. In der Praxis üblich ist die Festlegung eines Höchstalters ω_0 . Damit gilt dann

$$q_x = 0 \text{ f.a. } x \geq \omega_0 \quad .$$

Mathematisch bedeutet dies, daß ein x-jähriger eine zufällige Restlebenszeit T_x in Jahren besitzt. Es gilt dann:

$$\begin{aligned} P(T_x \leq 1) &= q_x \quad \text{ f.a. } x \in \mathbb{N}_0. \\ p_x &= 1 - q_x = P(T_x > 1) \end{aligned}$$

gibt die einjährige Überlebenswahrscheinlichkeit an. Aus der Sterbetafel können die n-jährigen Sterbe- bzw. Überlebenswahrscheinlichkeiten berechnet werden, wenn die folgende Stationaritätsannahme erfüllt ist.

2.1.1 Stationaritätsannahme *Die Familie der Restlebenszeiten* $(T_x)_{x \in \mathbb{N}}$ *erfüllt*

$$P(T_{x+s} > t) = P(T_x > s + t | T_x > s) \quad \textit{f.a. } x \in \mathbb{N}_0, s, t \in \mathbb{N}. \tag{2.3}$$

Dies bedeutet, daß die Überlebens-bzw Sterbewahrscheinlichkeiten eines $x+s$-jährigen den bedingen Überlebens-bzw Sterbewahrscheinlichkeiten eines x-jährigen - gegeben, daß er s Jahre überlebt - entsprechen.

Die obige Annahme ist dann erfüllt, wenn die Sterbewahrscheinlichkeiten vom Alter aber nicht von der Zeit abhängen. Streng genommen ist Stationarität nicht gegeben, da festzustellen ist, daß Sterbetafeln einer zeitlichen Entwicklung unterliegen. Wir können beispielsweise in der Vergangenheit eine Verbesserung der Sterblichkeit der Bevölkerung beobachten und die Fortschritte in der Medizin lassen die Hoffnung zu, daß dies in Zukunft auch noch anhalten wird. Diese zeitliche Veränderung geht aber eher langsam von statten, so daß für eine Kalkulation es durchaus sinnvoll ist, von obiger Stationaritätsannahme auszugehen. Dies hat den weiteren Vorteil, daß die Kalkulation wesentlich vereinfacht wird.

2.1.2 Bezeichnungen:

Üblich in der Versicherungsmathematik sind die folgenden Bezeichnungen für die n-jährigen Überlebens-bzw. Sterbewahrscheinlichkeiten eines $x$jährigen.

$$\begin{aligned} {}_nq_x &= P(T_x \leq n) \\ {}_np_x &= P(T_x > n) \\ {}_{n|}q_x &= P(n < T_x \leq n+1) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Die letzte Wahrscheinlichkeit wird auch als die um n Jahre aufgeschobene Sterbewahrscheinlichkeit eines x-ährigen bezeichnet.

Bei Vorliegen der Stationaritätsannahme kann folgender Zusammenhang zu den einjährigen Sterbewahrscheinlichkeiten elementar nachgewiesen werden.

2.1.3 Bemerkung *Ist die Stationaritätsannahme erfüllt, so gilt*

$$\begin{aligned} {}_np_x &= p_x p_{x+1} \cdot \ldots \cdot p_{x+n-1} \\ {}_nq_x &= 1 - {}_np_x = 1 - (p_x p_{x+1} \cdot \ldots \cdot p_{x+n-1}) \\ {}_{n|}q_x &= {}_np_x q_{x+n} \end{aligned}$$

Beweis: Die erste Gleichung folgt per Induktion sofort aus der Beziehung

$$P(T_x > n) = P(T_x > n | T_x > n-1) P(T_x > n-1) = P(T_{x+n-1} > 1)\, {}_{n-1}p_x \quad .$$

Die zweite Gleichung folgt unmittelbar aus der ersten und die dritte erhält man analog zur ersten. □

2.1.4 Absterbeordnung

Mit Hilfe der einjährigen Sterbewahrscheinlichkeiten wird die sogenannte Absterbeordnung einer fiktiven Population in einer Sterbetafel notiert. Beginnend mit einer Ausgangsgröße von l_0 Neugeborenen, etwa $l_0 = 100000$ ergibt sich die mittlere Anzahl an lebenden x-jährigen durch

$$l_x = l_0\, {}_xp_0 \quad \text{f.a. } x \in \mathbb{N} \tag{2.5}$$

und kann rekursiv durch

$$l_x = l_{x-1} p_{x-1} \quad , x \in \mathbb{N} \tag{2.6}$$

bestimmt werden.

2.1.3 Kosten

Die Durchführung der Versicherung führt beim Versicherungsunternehmen zu Kosten, die für die Kalkulation in folgender Weise aufgeschlüsselt werden.

- α-Kosten
  Unter diesem Stichwort werden die durch den Abschluß eines Versicherungsvertrages verbundenen Kosten bezeichnet, die überwiegend durch die Abschlußprovision entsteht. Bei der Kalkulation werden sie als einmalige Kosten proportional zur Versicherungssumme bzw. Rentenbarwert berücksichtigt. Üblich ist ein Proportionalitätsfaktor α zwschen $0,03$ und $0,035$.

- β-Kosten
  Dies sind die Inkassokosten, die durch das Einziehen der Prämie verursacht werden. Sie fallend laufend an und werden in der Regel proportional zur Bruttojahresprämie mit Faktor $\beta = 0,03$ erhoben.

- γ-Kosten
  Dies sind die laufenden Verwaltungskosten, die über die gesamte Laufzeit des Vertrages anfallen. Jährlich wird ein Betrag proportional zur Versicherungssumme bzw. Rentenbarwert mit Faktor $\gamma = 0,0031$ erhoben.

- Stückkosten Dies sind feste einmalige Kosten, die für jeden Vertrag unabhängig von der Ausgestaltung des Vertrages anfallen, etwa 24 DM pro Vertrag. Diese haben bei kleinen Versicherungssummen eine große Wirkung und sollen den Abschluß von Verträgen mit geringen Versicherungssummen bestrafen, bzw. unattraktiv machen.

2.2 Versicherungsformen

Die in diesem Abschnitt vorgestellten Versicherungsarten decken die in der Praxis gebräuchlichsten Versicherungsformen ab. Dies sind die einfachsten Versicherungstypen, welche durch die Absicherung eines unter einem Risiko stehenden Lebens beschrieben werden können. Wir nehmen einen einzelvertraglichen Standpunkt ein und beschreiben die Leistungsverpflichtungen zwischen Versicherungsnehmer und Versicherungsunternehmen.

2.2.1 Sofortrente

Bei der Sofortrente zahlt jährlich vorschüßig das Versicherungsunternehmen eine Rente vom Betrage R an den Versicherungsnehmer . Wird die Zahlung bis zum Tode durchgeführt, spricht man von einer lebenslangen Sofortleibrente. Eine Vereinbarung von n Rentenzahlungen liegt vor bei einer sofort beginnenden n Jahre dauernden Leibrente.

2.2.2 Aufgeschobene Rente

Die aufgeschobene Rente ist die am häufigsten vorkommende Form der privaten Rentenversicherung. Die Vertragslaufzeit gliedert sich auf in

- Ansparphase (Aufschubzeit)
- Rentenzahlungsphase .

Während der Ansparphase zahlt der Versicherungsnehmer jährlich vorschüßig eine Prämie p an das Versicherungsunternehmen . Während der Rentenzahlungsphase erhält der Versicherungsnehmer jährlich vorschüßig eine Rente der Höhe R vom Versicherungsunternehmen .

2.2.3 Todesfallversicherung

Die Todesfallversicherung, auch Risikolebensversicherung genannt, deckt das Sterberisiko ab. Bei einer Vertragslaufzeit von n Jahren wird bei Eintritt des Todes vor Vertragsende nachschüßig am Ende des Todesjahres die Versicherungssumme M vom Versicherungsunternehmen ausgezahlt. Der Versicherungsnehmer zahlt vorschüßig eine Prämie p an das Versicherungsunternehmen während der Vertragslaufzeit. Im Falle $n = \infty$ spricht man von einer lebenslangen Todesfallversicherung.

2.2.4 Erlebensfallversicherung

Im Gegensatz zur Todesfallversicherung zahlt bei der Erlebensfallversicherung das Versicherungsunternehmen die Versicherungssumme M an den Versicherungsnehmer , wenn dieser die Vertragslaufzeit von n Jahren überlebt. Während der Vertragslaufzeit erhält das Versicherungsunternehmen jährlich vorschüßig eine Prämie p vom Versicherungsnehmer .

2.2.5 gemischte Versicherung

Todesfallversicherung und Erlebensfallversicherung bilden die gemischte Versicherung. Diese sogenannte kapitalbildende Lebensversicherung spielte bislang eine herausragende Rolle bei einem Vermögensaufbau.

2.3 Barwerte

Aufgabe des Versicherungsmathematikers ist es, die Leistungsverpflichtungen eines Versicherungsvertrages zu bewerten. Typisch für eine Personenversicherung ist, daß Zahlungen zu sehr unterschiedlichen Zeitpunkten stattfinden und zufällig vom Todeseintritt abhängen. Um Vergleichbarkeit zu erzielen, werden Zahlungen auf den Vertragsabschluß abdiskontiert. Mit S bezeichne ich die Summe aller zufälligen abdiskontierten Zahlungen. Dies stellt eine zufällige Bewertung des Einzelvertrages dar. Risikoausgleich im Kollektiv bedeutet, daß durch den Abschluß vieler unabhängiger Verträge das Versicherungsunternehmen den einzelnen Vertrag durch den Erwartungswert der abdiskontierten Leistungen bewerten kann.

2.3.1 Definition *Der Barwert eines Versicherungsvertrages ist der Erwartungswert der abdiskontierten Leistungen.*

$$Barwert \quad = \quad ES$$

Der Barwert kann als Preis aufgefaßt werden, den das Versicherungsunternehmen einmalig zum Vertragsabschluß verlangen muß, um seine Versicherungsleistungen erbringen zu können. Er stellt den Gegenwert der reinen Versicherungsleistung dar und wird deshalb auch als Nettoeinmalprämie bezeichnet. im folgenden wollen wir die Barwerte für die angegebenen Beispiele berechnen. Bei allen Beispielen gehen wir von einem Versicherten mit Eintrittsalter x aus, der eine zufällige Restlebenszeit T_x besitzt.

(i) **Sofortrente**
Bei n Rentenzahlungen wird zu Beginn des $k+1$-ten Versicherungsjahres eine Zahlung der Höhe R fällig, wenn k Jahre überlebt werden, wenn also $T_x > k$ gilt. Die zufällige abdiskontierte Gesamtleistung beträgt also

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} Rv^k 1_{\{T_x > k\}}$$

und damit erhält man den Barwert

$$ES = R\sum_{k=0}^{n-1} v^k P(T_x > k) = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \, {}_k p_x \quad .$$

Der Barwert ist linear in der Rentenhöhe R. Deshalb führt man für $R = 1$ eine Bezeichnung für den Barwert ein.

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \, {}_k p_x \tag{2.7}$$

Im Falle der lebenslangen Sofortrente wird üblicherweise der zur Rentenhöhe 1 gehörige Barwert bezeichnet durch

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \, {}_k p_x \tag{2.8}$$

(ii) **Aufgeschobene Rente**
Bei einer Aufschubzeit von m Jahren und einer Rentenbezugszeit von n Jahren wird am Anfang des $k+1$-ten Jahres der Bezugszeit eine Rente der Hohe R fällig, wenn der Versicherungsnehmer $m+k$ Jahre überlebt. Die zufällige Summe der abdiskontierten Leistungen beträgt also

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} R v^{m+k} 1_{\{T_x > m+k\}} \quad ,$$

woraus man den Barwert

$$ES = Rv^m \sum_{k=0}^{n-1} v^k P(T_x > m+k) = Rv^m \sum_{k=0}^{n-1} v^k \, {}_{m+k}p_x$$

erhält. Für $R = 1$ wird ülicherweise die Bezeichnung

$${}_{m|n}\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+m} \, {}_{m+k}p_x = v^m \, {}_m p_x \sum_{k=0}^{n-1} v^k \, {}_k p_{x+m} \tag{2.9}$$

benutzt. Wegen der zweiten Gleichung gilt also die Beziehung

$${}_{m|n}\ddot{a}_x = v^m \, {}_m p_x \, \ddot{a}_{x+m:\overline{n}|} \quad . \tag{2.10}$$

Im Fall der lebenslänglichen um m Jahre aufgeschobenen Rente bezeichnet man mit

$${}_{m|}\ddot{a}_x = v^m \sum_{k=0}^{\infty} v^k \, {}_{m+k}p_x \tag{2.11}$$

den Barwert zur Rentenhöhe 1.

Offensichtlich gilt folgende Zerlegung des Barwertes der lebenslänglichen Sofortrente:

$$\ddot{a}_x = \ddot{a}_{x:\overline{m}|} + {}_{m|n}\ddot{a}_x + {}_{m+n|}\ddot{a}_x \tag{2.12}$$

(iii) **Risikolebensversicherung**
Bei einer Laufzeit von n Jahren wird das Versicherungsunternehmen am Ende des k-ten Versicherungsjahres die Versicherungssumme M auszahlen, wenn der Versicherungsnehmer in dem betreffenden Jahr verstirbt, wennn also $k-1 < T_x \leq k$ gilt. Die Summe der abdiskontierten Leistungen ist also

$$S = \sum_{k=1}^{n} M v^k 1_{\{k-1 < T_x \leq k\}}$$

woraus man den Barwert

$$ES = M \sum_{k=1}^{n} v^k P(k-1 < T_x \leq k)$$

$$= M \sum_{k=1}^{n} v^k P(T_x \leq k | T_x > k-1) P(T_x > k-1)$$
$$= M \sum_{k=1}^{n} v^k q_{x+k-1} \, {}_{k-1}p_x$$

erhält. Man stellt wiederum fest, daß der Barwert linear in der Versicherungssumme ist. Für $M = 1$ wird üblicherweise die Bezeichnung

$$ {}_{|n}A_x = \sum_{k=1}^{n} v^k q_{x+k-1} \, {}_{k-1}p_x \tag{2.13}$$

benutzt. Für die lebenslängliche Todesfallversicherung bezeichnet

$$A_x = \sum_{k=1}^{\infty} v^k q_{x+k-1} \, {}_{k-1}p_x \tag{2.14}$$

den Barwert zur Versicherungssumme 1.

(iv) **Erlebensfallversicherung**
Bei einer Laufzeit von n Jahren wird die Versicherungssumme M im Falle des Erlebens des Vertragsendes fällig. Also ist

$$S = Mv^n 1_{\{T_x > n\}}$$

und somit der Barwert durch

$$ES = Mv^n P(T_x > n) = Mv^n \, {}_np_x$$

gegeben. Für $M = 1$ führt man ein

$${}_nE_x = v^n \, {}_np_x \quad . \tag{2.15}$$

(v) **Gemischte Versicherung**
Eine Todesfallversicherung zusammen mit einer Erlebensfallversicherung bildet eine gemischte Versicherung. Also ist die Summe der abdiskontierten zufälligen Zahlungen gegeben durch

$$S = M \sum_{k=1}^{n} v^k 1_{\{k-1 < T_x \leq k\}} + Mv^n 1_{\{T_x > n\}} ßquad,$$

was den Barwert

$$ES = M({}_{|n}A_x + {}_nE_x)$$

impliziert. Übliche Bezeichnungsweise für $M = 1$ ist

$$A_{x:n\rceil} = {}_{|n}A_x + {}_nE_x \tag{2.16}$$

Bei allen Versicherungen sind konstante Versicherungssummen bzw. Rentenhöhen vereinbart gewesen. Möchte man variable Summen, sind die Formeln geeignet abzuändern. Im weiteren Verlauf wird durch die allgemeine Theorie gezeigt werden, wie dies durchzuführen ist.

2.4 Kommutationswerte

In den gebräuchlichen Sterbetafeln sind neben den einjährigen Sterbewahrscheinlichkeiten und der Absterbeordung auch die sogenannten Kommutationswerte enthalten. Mit diesen können die Barwerte der oigen Versicherungen ausgedrückt werden, so daß eine schnelle Berechnung durchführbar ist. Bezeichne entsprechend der Absterbeordnung mit

- l_x die mittlere Anzahl an x-jährigen einer Population und mit
- d_x die mittlere Anzahl an Personen, die x-jährig versterben.

Es gilt also

$$d_x = l_x - l_{x+1} = l_x - l_x p_x = l_x(1-p_x) = l_x q_x \quad .$$

Ferner gilt :

$$l_{x+n} = l_{x+n-1} p_{x+n-1} = \ldots = l_x p_x \cdot \ldots \cdot p_{x+n-1} = l_x \, {}_n p_x \quad ,$$

sowie

$${}_n q_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} \quad .$$

Üblicherweise bezeichnet man die mit den Überlebenden gebildeten Kommutationswerte durch

$$\begin{aligned} D_x &= l_x v^x \quad \text{diskontierte Lebende des Alters } x \\ N_x &= D_x + D_{x+1} + \cdots \quad \text{aufsummierte Anzahl diskontierter Lebender} \\ S_x &= N_x + N_{x+1} + \cdots \quad \text{doppelt aufsummierte Anzahl diskontierter Lebenden} \\ &= D_x + 2D_{x+1} + 3D_{x+2} + \cdots \end{aligned} \tag{2.17}$$

Die mit den Toten gebildeten Kommutationswerte werden notiert mittels

$$\begin{aligned} C_x &= d_x v^{x+1} \quad \text{diskontierte Tote des Alters } x \\ M_x &= C_x + C_{x+1} + \cdots \quad \text{aufsummierte Anzahl diskontierter Toter} \\ R_x &= M_x + M_{x+1} + \cdots \quad \text{doppelt aufsummierte Anzahl diskontierter Toten} \\ &= D_x + 2D_{x+1} + 3D_{x+2} + \cdots \end{aligned} \tag{2.18}$$

Alle diese Kommutationswerte liegen vertafelt vor, so daß zu einer schnellen Berechnung der Barwerte diese durch die Kommutationswerte ausgedrückt werden können. Man erhält:

- **Sofortrente**

$$\begin{aligned} \ddot{a}_x &= \sum_{k=0}^{\infty} v^k \, {}_k p_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \frac{l_{x+k}}{l_x} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_{x+k}}{D_x} = \frac{N_x}{D_x} \end{aligned}$$

Entsprechend

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D_{x+k}}{D_x} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \tag{2.19}$$

- **Todesfallversicherung**

$$
\begin{aligned}
A_x &= \sum_{k=1}^{\infty} v^k \, {}_{k-1}p_x q_{x+k-1} = \sum_{i=0}^{\infty} v^{i+1} \, {}_i p_x q_{x+i} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} v^{i+1} \frac{d_{x+i}}{l_{x+i}} \frac{l_{x+i}}{l_x} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{C_{x+i}}{D_x} = \frac{M_x}{D_x}
\end{aligned}
$$

Entsprechend:

$$
\begin{aligned}
{}_{|n}A_x &= \sum_{k=1}^{n} v^k \, {}_{k-1}p_x q_{x+k-1} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{C_{x+i}}{D_x} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}
\end{aligned}
$$

- **Erlebensfallversicherung**

$$
{}_nE_x = v^n \, {}_n p_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}
$$

2.5 Periodische (jährliche) Nettoprämie

Der im vorigen Abschnitt eingeführte Barwert stellt den Preis einer Leistung eines Versicherungsvertrages, den der Versicherungsnehmer einmalig zu Beginn des Vertrages zu leisten hätte. Dies wird in der Praxis nicht besonders nachgefragt, da die Einmalprämie in der Regel sehr hoch ist und nicht durch den Versicherungsnehmer einmalig bezahlt werden kann. Der Ausweg besteht darin, den fälligen Barwert durch periodische Prämienzahlungen zu finanzieren. Dies entspricht einem Ratenzahlungsvertrag mit zufälligem Ende, also einer Sofortrente, da in der Regel Prämien über den Tod nicht hinaus fällig werden. Den zufälligen Leistungen des Versicherungsunternehmen s stehen also zufällige Leistungen des Versicherungsnehmer s gegenüber. So ein Versicherungsvertrag ist fair oder ausgewogen, wenn die Barwerte der Leistungen und Gegenleistungen sich entsprechen. Dies ist das sogenannte

2.5.1 Äquivalenzprinzip

Barwert der Leistungen = Barwert der Gegenleistungen

In der Regel wird dies angewandt, um eine konstante periodische Prämie p zu berechnen. Bei einer Versicherung mit Barwert B, Eintrittsalter x und höchstens n Prämienzahlungen erhält man die Prämie aus

$$
p \, \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = B \quad , \tag{2.20}
$$

denn die linke Seite ist der Barwert einer n-jährigen Sofortrente vom Betrage p. Der Versicherungsnehmer zahlt also jährlich an das Versicherungsunternehmen die Sofortrente zur Finanzierung der Versicherungsleistung.

Wir wollen dies auf die betrachteten Beispiele anwenden.

- **Aufgeschobene Rente**
  Bei einer Aufschubzeit von m Jahren, einer lebenslänglichen Zahlung einer Rente der Höhe R erhält man die zu zahlende jährliche Nettoprämie p während der Aufschubzeit durch

$$p\,\ddot{a}_{x:m\rceil} = R\,{}_{m|}\ddot{a}_x = Rv^m\,{}_m p_x \ddot{a}_{x+m} \quad , \tag{2.21}$$

  also

$$p = Rv^m\,{}_m p_x \frac{\ddot{a}_{x+m}}{\ddot{a}_{x:m\rceil}} \quad .$$

- **Todesfallversicherung**
  Bei einer Laufzeit von n Jahren wird jährlich vorschüßig eine Prämie p_R bezahlt und erhält so im Falle des Todes nachschüßig die Versicherungssumme M. Die jährliche Prämie erhält man also aus

$$p_R\,\ddot{a}_{x:n\rceil} = M\,{}_{|n}A_x \quad . \tag{2.22}$$

- **Erlebensfallversicherung**
  Bei einer entsprechenden n jährigen Erlebensfallversicherung erhält man die zu zahlende jährliche Prämie p_S aus

$$p_S\,\ddot{a}_{x:n\rceil} = M\,{}_nE_x = Mv^n\,{}_np_x \quad . \tag{2.23}$$

- **Gemischte Versicherung** Hier erhält man die jahrliche Prämie p aus

$$p\,\ddot{a}_{x:n\rceil} = M\,A_{x:n\rceil} = M(\,{}_{|x}A_n + \,{}_nE_x) \quad . \tag{2.24}$$

  Also ist die Prämie die Summe der Prämien der Einzelversicherungen

$$p = p_R + p_S \quad .$$

2.6 Bruttoeinmalbetrag

Die Nettopräme deckt die reine Versicherungsleistung ab. Will man die Kosten berücksichtigen erhält man die Bruttoprämien, die man als Einmalbetrag oder als jährliche Prämie berechnen kann. Für die üblichen Kostenansätze der α-,β-, γ- Kosten sollen im folgenden die zu den Beispielen gehörigen Bruttoeinmalprämien, die auch als ausreichende Prämien bezeichnet werden, berechnet werden. Notiert werden diese ausreichende Prämien durch Hinzufügen eines a als oberen rechten Index im Barwert, um zu kennzeichnen, daß es sich um eine ausreichende Prämie handelt, etwa

$${}_{n|}\ddot{a}^a_x,\ {}_{|n}A^a_x,\ \ddot{a}^a_{x:n\rceil} \quad .$$

- **Altersrente** Die α- und β Kosten werden proportional zur Bruttoprämie und die γ Kosten proportional zur Nettoprämie angesetzt. Deshalb erhält man bei einer Aufschubzeit von n Jahren, einer lebenslänglichen Rentenzahlungszeit und einem Eintrittsalter x die Bruttoeinmalprämie durch Lösen der Gleichung

$${}_{n|}\ddot{a}^a_x = \,{}_{n|}\ddot{a}_x + \alpha\,{}_{n|}\ddot{a}^a_x + \beta\,{}_{n|}\ddot{a}^a_x + \gamma\ddot{a}_x \quad , \tag{2.25}$$

also

$$ {}_{n|}\ddot{a}_x^a = \frac{{}_{n|}\ddot{a}_x + \gamma \ddot{a}_x}{1 - \alpha - \beta} \quad . \tag{2.26} $$

Splittet man die γ Kosten auf in γ_1 Kosten während der Aufschubzeit und γ_2 Kosten während der Rentenbezugszeit muß man den Ansatz

$$ {}_{n|}\ddot{a}_x^a = {}_{n|}\ddot{a}_x + \alpha\, {}_{n|}\ddot{a}_x^a + \beta\, {}_{n|}\ddot{a}_x^a + \gamma_1\, \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \gamma_2\, {}_{n|}\ddot{a}_x \tag{2.27} $$

verfolgen, also

$$ {}_{n|}\ddot{a}_x^a = \frac{(1 + \gamma_2)\, {}_{n|}\ddot{a}_x + \gamma_1\, \ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{1 - \alpha - \beta} \quad . $$

- gemischte Versicherung
  Hier sind die Abschlußkosten proportional zur Versicherungssumme 1. Also hat man den Ansatz

  $$ A_{x:\overline{n}|}^a = A_{x:\overline{n}|} + \alpha + \beta\, A_{x:\overline{n}|}^a + \gamma\, \ddot{a}_{x:\overline{n}|} \tag{2.28} $$

  durchzuführen und erhält

  $$ A_{x:\overline{n}|}^a = \frac{A_{x:\overline{n}|} + \alpha + \gamma\, \ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{1 - \beta} \tag{2.29} $$

  als Bruttoeinmalbetrag.

- **Todesfallversicherung**
  Bei der reinen Todesfallversicherung ist die Abschlußprovision geringer als bei der gemischten Versicherung. Daher werden die Abschlußkosten proportional zu $\alpha(1 - {}_nE_x)$ kalkuliert. Man löst

  $$ {}_{|n}A_x^a = {}_{|n}A_x + \alpha(1 - {}_nE_x) + \beta\, {}_{|n}A_x^a + \gamma\, \ddot{a}_{x:\overline{n}|} \tag{2.30} $$

  auf und erhält

  $$ {}_{|n}A_x^a = \frac{{}_{|n}A_x + \alpha(1 - {}_nE_x) + \gamma\, \ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{1 - \beta} \tag{2.31} $$

  als Bruttoeinmalprämie.

2.7 Periodische (jährliche) Bruttoprämie

Hier wird analog zum Nettofall die Bruttoeinmalprämie verteilt auf die Laufzeit der Prämienzahlungen. Durch den rechten oberen Index a wird die periodische (jährliche) Bruttoprämie gekennzeichnet. Man erhält:

- **Altersrente**
  Wegen

  $$ p^a\, \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = {}_{n|}\ddot{a}_x^a $$

  gilt wegen (2.26)

  $$ p^a = \frac{{}_{n|}\ddot{a}_x + \gamma \ddot{a}_x}{(1 - \alpha - \beta)\, \ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \quad . \tag{2.32} $$

- **gemischte Versicherung**
  Analog erhält man mit (2.29)

$$p^a = \frac{A_{+:\alpha+\rceil}\gamma\, \ddot{a}_{x:n\rceil}}{(1-\beta)\, \ddot{a}_{x:n\rceil}} \tag{2.33}$$

als jährliche Bruttoprämie.

Zum Abschluß ist darauf hinzuweisen, daß Versicherungsunternehmen konservativ kalkulieren, also zu hohe Kostensätze ansetzen. Dies sind die hier vorgestellten Rechnungsgrundlagen 1. Ordnung. In Form von Rückerstattung werden erzielte Kostenüberschüsse an die Versicherungsnehmer zurückgegeben.

2.8 Deckungskapital

Betrachten wir eine Todesfallversicherung mit periodischer konstanter Prämieneinzahlung, so stellen wir folgendes fest. In den ersten Jahren ist die zu zahlende Prämie höher als das zu versichernde Risiko, da die Sterbewahrscheinlichkeit mit dem Alter wächst. In den letzten Jahren ist hingegen das zu versichernde Risiko höher als die geforderte Prämie. Der Versicherungsnehmer baut am Anfang Rücklagen auf, die er am Ende zur Finanzierung des erhöhten Risikos benutzt. Dieser Verlauf der Rückstellung des sogenannten Deckungskapitals soll in diesem Abschnitt näher untersucht werden. Wir wollen dies zunächst verbal konkretisieren.

2.8.1 Definition *Gegeben sei ein Versicherungsvertrag mit einer Laufzeit von n Jahren und Eintrittsalter x. Das nach m Jahren gebildete Deckungskapital ${}_mV_x$ wird definiert als die Differenz des Barwertes der dann zukünftigen Leistungen und des Barwertes der zukünftigen Einnahmen, wobei die Zahlungen auf das Ende des m-ten Jahres abdiskontiert werden.*

Kurz:

$${}_mV_x = \text{Barwert der zukünftigen Ausgaben - Barwert der zukünftigen Einnahmen}$$

Wir sprechen vom Nettodeckungskapital, wenn keine Kosten berücksichtigt werden. Die obige Definition beschreibt mitttels der vorausschauenden Methode das sogenannte prospektive Deckungskapital. Die zurückschauende Methode führt zum Begriff des retrospektiven Deckungskapitals ${}_mV_x^{re}$, das kurz durch

$${}_mV_x^{re} = \text{Barwert der vergangen Einnahmen - Barwert der vergangen Ausgaben}$$

beschrieben wird, wobei auf das Ende des m-ten Versicherungsjahres diskontiert wird.

Mathematisch kann die obige Definition folgendermaßen beschrieben werden. Sei S die zufällige auf den Vertragsabschluß abdiskontierte Leistung. ES ist dann der Barwert der Leistungen. Die zufälligen auf den Vertragsabschluß abdiskontierten Einnahmen wird mit I bezeichnet. EI ist also der Barwert der Einnahmen. Wegen des Äquivalenzprinzips gilt

$$ES = EI \quad .$$

Nach m Vertragsjahren wird eine Zerlegung der Einnahmen und Ausgaben durchgeführt. Mit $S_m^>$ bezeichnen wir die zukünftigen Leistungen abdiskontiert auf das Ende des m-ten Jahres. Die in den ersten m Jahren fällige Gesamtleistungleistung, aufdiskontiert auf das Ende des m-ten Jahres wird mit $S_m^<$ bezeichnet. Entsprechend führen wir die Zufallsgrößen $I_m^>$ und $I_m^<$ für die Einnahmen ein.

Das prospektive Deckungskapital wird dann definiert durch

$$ {}_mV_x = E(S_m^>|T_x > m) - E(I_m^>|T_x > m) \quad , m = 0, \dots, n \quad , \tag{2.34}$$

während das retrospektive Deckungskapital durch

$$ {}_mV_x^{re} = \frac{EI_m^<}{P(T_x > m)} - \frac{ES_m^<}{P(T_x > m)} \quad , m = 0, \dots, n \tag{2.35}$$

definiert wird.

Die Gleichheit von prospektiven und retrospektiven Deckungskapital erhalten wir durch

2.8.2 Bemerkung *Für alle $m = 0, \dots, n$ gilt*

(i) $(S_m^< + S_m^>)v^m = S$,

(ii) $(I_m^< + I_m^>)v^m = I$,

(iii) ${}_mV_x = {}_mV_x^{re}$.

Beweis: $S_m^< + S_m^>$ sind die Gesamtleistungen diskontiert auf das Ende des m-ten Vertragsjahres. Also folgt (i). Analog erhält man (ii). Wegen

$$E(S_m^>|T_x > m) = \frac{ES_m^> 1_{\{T_x > m\}}}{P(T_x > m)} = \frac{ES_m^>}{P(T_x > m)}$$

folgt

$$E(S_m^>|T_x > m) + \frac{ES_m^<}{P(T_x > m)} = \frac{ES_m^> + ES_m^<}{P(T_x > m)} = \frac{ES}{v^m P(T_x > m)} \quad .$$

Analog erhält man die Beziehung für die Einnahmen, so daß zusammen folgt

$$ {}_mV_x - {}_mV_x^{re} = \frac{ES - EI}{v^m P(T_x > m)} = 0 \quad .$$

□

Wir wollen für unsere Beispiele den Deckungskapitalverlauf berechnen.

- **Erlebensfallversicherung**
  Wir betrachten die Versicherungssumme 1 bei n-jähriger Laufzeit und Eintrittsalter x. Dann ist für $m = 0, \dots, n$

$$S_m^> = v^{n-m} 1_{\{T_x > m\}} \quad , \quad S_m^< = 0$$
$$I_m^> = p \sum_{k=0}^{n-m-1} v^k 1_{\{T_x > m+k\}} \quad , \quad I_m^< = p \sum_{k=0}^{m-1} v^{k-m} 1_{\{T_x > k\}}$$

mit $p = \frac{{}_nE_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$. Also gilt:

$$\begin{aligned}
{}_mV_x &= v^{n-m}P(T_x > n|T_x > m) - p\sum_{k=0}^{n-m-1} v^k P(T_x > m+k|T_x > m) \\
&= v^{n-m}P(T_{x+m} > n-m) - p\sum_{k=0}^{n-m-1} v^k P(T_{x+m} > k) \\
&= {}_{n-m}E_{x+m} - p\,\ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}|}
\end{aligned}$$

Auch wenn aus der Formel dies nicht sofort hervor geht baut sich das Deckungskapital monoton auf mit der Erlebensfalleistung als Endwert.

- **Altersrente**
  Wir betrachten eine n jährige Aufschubzeit bei lebenslänglicher Rentenzahlung der Höhe 1 . Während der Aufschubzeit baut sich das Deckungskapital auf. In der Rentenzahlungszeit wird aus dem Deckungskapital entnommen. Für $0 \le m \le n$ gilt während der Aufschubzeit

$$S_m^< = 0 \quad , \quad S_m^> = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+n-m} 1_{\{T_x > n+k\}}$$

$$I_m^< = p\sum_{k=0}^{m-1} v^{k-m} 1_{\{T_x > k\}} \quad , \quad I_m^> = p\sum_{k=0}^{n-m-1} v^k 1_{\{T_x > k+m\}}$$

mit $p = \frac{{}_{n|}\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$ als jährliche Prämie. Also gilt

$$\begin{aligned}
{}_mV_x &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+n-m}P(T_x > n+k|T_x > m) - p\sum_{k=0}^{n-m-1} v^k P(T_x > k+m|T_x > m) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+n-m}P(T_{x+m} > n-m+k) - p\sum_{k=0}^{n-m-1} v^k P(T_{x+m} > k) \\
&= {}_{n-m|}\ddot{a}_{x+m} - p\,\ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}|}
\end{aligned}$$

In der Rentenbezugszeit gilt für $m \ge n$

$$\begin{aligned}
{}_mV_x &= E(\sum_{k=0}^{\infty} v^k 1_{\{T_x > m+k\}}|T_x > m) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} v^k P(T_x > m+k|T_x > m) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} v^k P(T_{x+m} > k) \\
&= \ddot{a}_{x+m}
\end{aligned}$$

- **Todesfallversicherung**
  Bei einer n jährigen Laufzeit baut sich zunächst das Deckungskapital auf, um im Verlauf wieder zum Ende hin auf 0 abzunehemen. Für $m = 0, \ldots, n$ gilt

$$S_m^> = \sum_{k=m+1}^{n} v^{k-m} 1_{\{k-1 < T_x \le k\}} \quad , \quad S_m^< = \sum_{k=1}^{m} v^{k-m} 1_{\{k-1 < T_x \le k\}} \quad .$$

Also folgt

$$ {}_mV_x = E(\sum_{k=m+1}^{n} v^{k-m} 1_{\{k-1 < T_x \le k\}}|T_x > m) - p\,\ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}|}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{l=1}^{n-m} v^l P(l-1 < T_{x+m} \leq l) - p\,\ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}|} \\
&= {}_{|n-m}A_{x+m} - p\,\ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}|}
\end{aligned}
$$

mit $p = \frac{{}_{|n}A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$.

- **gemischte Versicherung**
  Eine analoge Rechnung liefert

$$
{}_mV_x = A_{x+m:\overline{n-m}|} - p\,\ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}|}
$$

mit $p = \frac{{}_{|x}A_n}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$.

2.9 Das Bruttodeckungskapital

Berücksichtigt man die kalkulatorischen Kosten bei den Leistungen durch das Versicherungsunternehmen kommt man mit dem gleichen Anstz wie im vorigen Abschnitt zum Bruttodeckungskapital, das auch als ausreichendes Deckungskapital bezeichnet wird. Wie üblich wird durch einen oberen Index a dies in der Notation gekennzeichnet. Kurz kann man sagen:

$$
{}_mV_x^a = \text{Barwert der zukünftigen Bruttoausgaben - Barwert der zukünftigen Bruttoeinnahmen}
$$

Stimt die Prämienzahlungsdauer mit der Versicherungsdauer überein, haben die β- und γ Kosten keinen Einfluß auf das Deckungskapital, da pro Periode genau die benötigten Kosten durch den Versicherungsnehmer gezahlt wird. Die einmaligen Abschlußkosten werden am Vertragsanfang fällig und gehören nicht zu den zukünftigen Leistungen. Dies führt zu einem anfänglich negativen Deckungskapital. Für die betrachteten Beispiele ergibt sich:

- **gemischte Versicherung**
  Bei einem Eintittsalter x, einer Laufzeit n und einer Versicherungssumme 1 erfüllt die jährliche Bruttoprämie die Gleichung

$$
p^a = p + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} + \beta p^a + \gamma
$$

  mit

  - $p = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$ als Nettoprämie,
  - $\frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$ als jährlicher Abschluskostenanteil,
  - βp^a als jährliche Inkassokosten,
  - γ als jährliche Verwaltungskosten.

  Nach m Jahren bestehen die dann zukünftigen Leistungen aus

$$
{}_{|x+m}A_{n-m} + \beta p^a\,\ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}|} + \gamma\,\ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}|} \quad . \tag{2.36}
$$

Dies sind die Nettoversicherungsleistung zusammen mit den $n-m$ Jahre fälligen β- und γ Kosten. Auf der Einnahmenseite hat man $p^a\,\ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}|}$ als Sofortrente in Höhe der Bruttoprämie, die noch $n-m$ Jahre läuft. Also ergibt sich als Bruttodeckungskapital

$$\begin{aligned}
{}_mV_x^a &= {}_{|x+m}A_{n-m} + \beta p^a\,\ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}|} + \gamma\,\ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}|} - p^a\,\ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}|} \\
&= {}_{|x+m}A_{n-m} - p\,\ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}|} - \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\,\ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}|} \\
&= {}_mV_x - \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\,\ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}|} \\
&= (1+\alpha)\,{}_mV_x - \alpha \quad ,
\end{aligned}$$

da $\frac{\ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = 1 - {}_mV_x$.

Also erkennt man, daß das Bruttodeckungskapital das Nettodeckungskapital vermindert um den Barwert der noch nicht getilgten Abschlußkosten ist. Dieser Zusammenhang gilt für alle Versicherungen bei denen die Prämien und Versicherungslaufzeit übereinstimmen.

- **Todesfallversicherung**
  Hier führt eine Anwendung der obigen Argumentation zu

$$ {}_mV_x^a = {}_mV_x - \frac{\alpha(1-{}_nE_x)}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\,\ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}|} \quad , \tag{2.37}$$

  wobei $\frac{\alpha(1-{}_nE_x)}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$ hier die jährlichen Abschlußkosten ausmachen.

- **Altersrente**
  Während der n jährigen Aufschubzeit wird jährlich die Bruttoprämie

$$p^a = \frac{{}_{n|}\ddot{a}_x + \gamma\ddot{a}_x}{(1-\alpha-\beta)\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

  gezahlt. Beziehungsweise die Bruttoprämie erfüllt

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}p^a = {}_{n|}\ddot{a}_x + \alpha p^a\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \beta p^a\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \gamma\ddot{a}_x \quad .$$

  Man erhält als Bruttodeckungskapital für $0 \le m \le n$ währed der Aufschubzeit

$$ {}_mV_x^a = {}_mV_x - \alpha p^a\,\ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}|} + \gamma(\ddot{a}_{x+m} - \frac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\,\ddot{a}_{x+m:\overline{n-m)}|} \quad , \tag{2.38}$$

  denn :

  - $\alpha p^a\,\ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}|}$ sind die noch nicht getilgten Abschlußkosten
  - $\gamma\ddot{a}_{x+m}$ sind die noch ausstehenden Verwaltungskosten,
  - von den kalkulierten Verwaltungskosten $\gamma\ddot{a}_x$ stehen $\gamma\frac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\,\ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}|}$ noch aus. Die Differenz aus beiden wird auch Verwaltungskostenreserve genannt.

  Die Verwaltungskostenreserve ist eine Art Vorfinanzierung der Verwaltungskosten, die nach der Aufschubzeit entstehen.

2.10 Rekursionsformel für das Deckungskapital

Das Deckungspkapital ist für Personenversicherungen durch das Versicherungsunternehmen auszuweisen. Daher ist es notwendig schnelle Berechnungsmöglichkeiten zu finden. Vorteilhaft ist natürlich die in diesem Abschnitt vorgestellte rekursive Methode. Wir betrachten einen Versicherungsvertrag mit den folgenden Parametern

- Eintrittsalter x ,
- zufällige Restlebenszeit T_x
- Laufzeit von n Jahren mit $n \in \mathbb{N} \cup \infty$,
- zufällige Leistungen und Einnahmen, die durch T_x induziert sind.

Die Leistungen und Einnahmen sollen nun näher beschrieben werden. Seien $(L_i)_{1 \leq i \leq n}, (H_i)_{1 \leq i \leq n}$ Folgen von nichtnegativen Zufallsvariablen.

- L_i entspricht der Leistung im i-ten Vertragsjahr
- H_i entspricht den Einnahmen im i-ten Vertragsjahr

Die Summe der abdiskontierten Leistungen bzw. Einnahmen ist dann

$$S = \sum_{i=1}^{n} L_i v^i \quad , \quad I = \sum_{i=1}^{n} H_i v^{i-1} \quad , \tag{2.39}$$

wobei wir davon ausgehen, daß die Leistungen nachschüßig und die Einnahmen vorschüßig fällig werden. Wir können definieren

2.10.1 Definition *Ein Versicherungsvertrag genügt dem Äquivalenzprinzip, wenn $ES = EI$ gilt.*

Weiter ergibt sich für $m = 0, \ldots, n$

$$\begin{aligned} S_m^> &= \sum_{i=1}^{n-m} L_{m+i} v^i \quad , \quad S_m^< = \sum_{i=1}^{m} L_i v^{i-m} \\ I_m^> &= \sum_{i=1}^{n-m} H_{m+i} v^{i-1} \quad , \quad I_m^< = \sum_{i=1}^{m} H_i v^{i-1-m}, \end{aligned} \tag{2.40}$$

was

$$v S_{m+1}^> = S_m^> 1_{\{T_x > m+1\}} \quad , \quad v I_{m+1}^> = I_m^> 1_{\{T_x > m+1\}} \tag{2.41}$$

impliziert. Diese Beziehung kann nun in folgender Weise benutzt werden, um eine Rekursionsformel für das Deckungskapital herzuleiten. Für $= 0, \ldots, n-1$ gilt :

$$\begin{aligned} {}_mV_x &= E(S_m^> | T_x > m) - E(I_m^> | T_x > m) \\ &= E(S_m^> 1_{\{T_x > m+1\}} | T_x > m) + E(S_m^> 1_{\{m \; T_x \leq m+1\}} | T_x > m) \\ &\quad - E(I_m^> 1_{\{T_x > m+1\}} | T_x > m) - E(I_m^< 1_{\{m \; T_x \leq m+1\}} | T_x > m) \\ &= E(v S_{m+1}^> | T_x > m) + E(L_{m+1} v | T_x > m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&-E(vI^{>}_{m+1}|T_x > m) - E(H_{m+1}|T_x > m)\\
=\ & E(v(S^{>}_{m+1} - I^{>}_{m+1})|T_x > m, T_x > m+1)P(T_x > m+1|T_x > m)\\
&+E(vL_{m+1} - H_{m+1}|T_x > m)\\
=\ & v\,{}_{m+1}V_x P(T_{x+m} > 1) + E(vL_{m+1} - H_{m+1}|T_x > m)\\
=\ & v\,{}_{m+1}V_x p_{x+m} + v\lambda_m - e_m
\end{aligned}$$

mit $\lambda_m = E(L_{m+1}|T_x > m), e_m = E(H_{m+1}|T_x > m)$. Wir erhalten also so die Rekursionsformel

$$\begin{aligned}
{}_0V_x &= 0\\
{}_{m+1}V_x &= \frac{{}_mV_x - v\lambda_m + e_m}{vp_{x+m}} \quad m = 0,\ldots,n-1.
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Angewendet auf die betrachteten Beispiele ergibt sich:

- **Todesfallversicherung**
  Dann gilt

  $$L_m = 1_{\{m-1<T_x\le m\}} \quad , \quad H_m = p1_{\{T_x>m-1\}}$$

  mit der Nettoprämie $p = \frac{{}_{\lfloor n}A_x}{\ddot{a}_{x:n\rceil}}$. Das Deckungskapital erfüllt also die Rekursionsgleichung

  $${}_0V_x = 0 \quad , \quad {}_{m+1}V_x = \frac{{}_mV_x}{vp_{x+m}} - \frac{q_{x+m}}{p_{x+m}} + \frac{p}{vp_{x+m}} \quad . \tag{2.43}$$

  Löst man nach p auf ergibt sich folgende Prämienzerlegung in Spar-und Risikoanteil

  $$p = p^s_m + p^r_m \tag{2.44}$$

  mit

  $$p^s_m = v\,{}_{m+1}V_x - {}_mV_x \quad , \quad p^r_m = q_{x+m}v(1 - {}_{m+1}V_x) \quad .$$

  Der Sparanteil kann interpretiert werden als derjenige Teil der Prämie, der in das Deckungskapital im $m+1$-ten Versicherungsjahr fließt. Am Ende des $m+1$-ten Versicherungsjahres hat der Versicherungsnehmer ${}_{m+1}V_x$ gewissermaßen als Guthaben angespart. Deshalb steht unter Risiko im $m+1$-ten Versicherungsjahr die Versicherungssumme vermindert um ${}_{m+1}V_x$. Um dies zu versichern benötigt man den Betrag $q_{x+m}v(1 - {}_{m+1}V_x)$, den Risikoanteil der Prämie.

  Ausgedrückt durch die Sparanteile können wir auch den Deckungskapitalverlauf beschreiben mittels

  $${}_{m+1}V_x = (dkmx + p^s_m)(1+i)$$

  und damit

  $${}_{m+1}V_x = p^s_m(1+i) + p^s_{m-1}(1+i)^2 + \cdots + p^s_0(1+i)^{m+1} \quad . \tag{2.45}$$

- **Altersrente** Wir erhalten folgenden Deckungskapitalverlauf mit $p = \frac{{}_{n|}\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:n\rceil}}$

  $${}_0V_x = 0 \quad ,$$

$$\begin{aligned} {}_{m+1}V_x &= \frac{{}_mV_x + p}{vp_{x+m}} \quad , m = 0, \ldots, n-1 \\ {}_{m+1}V_x &= \frac{{}_mV_x - v}{vp_{x+m}} \quad , m = n, n+1, \ldots \quad . \end{aligned} \tag{2.46}$$

Wir erhalten hieraus die folgende Prämienzerlegung in der Aufschubzeit

$$p = (v\,{}_{m+1}V_x - {}_mV_x) - q_{x+m}v\,{}_{m+1}V_x \tag{2.47}$$

für $0 \leq m \leq n-1$. Man stellt fest, daß der Sparanteil $v\,{}_{m+1}V_x - {}_mV_x$ höher als die Prämie ist, denn durch Vererbung fließt zusätzlich der Betrag $q_{x+m}v\,{}_{m+1}V_x$ in das Deckungskapital.

Kapitel 3

Ein allgemeines diskretes Modell

In diesem Kapitel soll ein genaue mathematische Modellbildung für diskrete Personenversicherungen durchgeführt werden, die eine wesentliche Verallgemeinerung gegenüber den bislang betrachteten Beispielen darstellt. Dadurch ist man dann in der Lage komplizierter Versicherungen wie Versicherungen auf verbundene Leben oder Pensionsversicherungen adequat und einfach zu beschreiben. Wir gehen also davon aus, daß Zahlungen durch einen Versicherungsvertrag nur zu diskreten Zeitpunkten geschehen. In der Literatur gibt es hierfür unterschiedliche Ansätze. Ich wähle konsequent einen Markov-Ketten Zugang, der eine vergleichsweise einfache und intuitiv einleuchtende Beschreibung liefert.

3.1 Deterministische Zahlungsströme

Wie wir im vergangenen Kapitel gesehen haben, macht eine Versicherung im wesentlichen zeitlich abhängige zufällige Zahlungen zwischen Versicherungsnehmer und Versicherungsunternehmen aus. Dies soll jetzt mathematisch exakt beschrieben werden. Es soll also der Begriff des Zahlungsstromes eingeführt werden und auf dessen Bewertung eingegangen werden.

3.1.1 Kapitalentwicklung

Bislang haben wir zur Bewertung von Versicherungen eine konstante Kapitalverzinsung postuliert. Eine natürliche Verallgemeinerung kann folgendermaßen beschrieben werden.

3.1.2 Definition *Eine monoton wachsende Funktion* $K : \mathbb{N}_0 \to [1, \infty)$ *mit* $K(0) = 1$ *heißt* **Kapitalfunktion** .

Eine Kapitalfunktion K beschreibt also die zeitiche Entwicklung des Kontostandes auf einem Bankkonto, das eine Anfangseinlage von 1 DM hat. Mathematisch gesehen definiert K ein Maß auf $\mathbb{N}$ mit Zähldichte ΔK definiert durch

$$\Delta K(n) = K(n) - K(n-1) \quad \text{f.a. } n \in \mathbb{N} \quad .$$

Die **Zinsrate** der n-ten Periode erhält man durch

$$r_n = \frac{\Delta K(n)}{K(n-1)} = \frac{K(n)}{K(n-1)} - 1 \quad . \tag{3.1}$$

Die kummulierten Zinsraten können mittels der Kapitalfunktion durch

$$\Phi(n) = \sum_{k=1}^{n} r(k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{K(k-1)} \Delta K(k) = \int_{(0,n]} \frac{1}{K(x-)} dK(x) \tag{3.2}$$

ausgedrückt werden. Die Funktion $\Phi : \mathbb{N} \to (0, \infty)$ wird auch kummulative Zinsintensität genannt. Weiter gilt:

$$K(n) = \prod_{j=1}^{n} \frac{K(j)}{K(j-1)} = \prod_{j=1}^{n} (1 + r(j)) = \prod_{j=1}^{n} (1 + \Delta\Phi(j)) \quad . \tag{3.3}$$

Die durch K induzierte Diskontierungsfunktion $v : \mathbb{N} \to (0, 1)$ ist gegeben durch

$$v(n) = \frac{1}{K(n)} \qquad \text{f.a. } n \in \mathbb{N}, \tag{3.4}$$

denn um 1 DM nach n Perioden zu erhalten, muß $\frac{1}{K(n)}$ DM als Anfangseinlage auf ein Bankkonto eingezahlt werden.

3.1.3 Definition *Eine monoton wachsende Funktion*

$$Z : \mathbb{N}_0 \to [0, \infty)$$

heißt gerichteter Zahlungsstrom.

Die Summe aller Zahlungen (aller Ausgaben) während der ersten n Perioden wird durch $Z(n)$ angegeben und

$$Z(\infty) = \lim_{n\to\infty} Z(n)$$

entspricht der Summe aller zu tätigen Zahlungen uber die gesamte Zeit. Mit $\mathcal{Z}_g$ bezeichnen wir die Menge aller gerichteten Zahlungsströme. $Z \in \mathcal{Z}_g$ definiert ein Maß auf $[0, \infty)$ mit Zähldichte ΔZ, wobei

$$\Delta Z(n) = \begin{cases} Z(n) - Z(n-1) & \text{falls } n \in \mathbb{N} \\ Z(0) & \text{falls } n = 0 \end{cases}$$

Neben den Zahlungen wollen wir auch noch Einnahmen betrachten, bzw. eine Zahlungsbilanz erstellen. Deshalb definieren wir

3.1.4 Definition: *Eine Funktion $Z : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ heißt ungerichteter Zahlungsstrom, wenn es $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}_g$ gibt mit $Z_1(\infty) \wedge Z_2(\infty) < \infty$ und $Z = Z_1 - Z_2$*

Die Zahlungsbilanz nach n Perioden entspricht also $Z(n)$ und $Z(\infty) = Z_1(\infty) - Z_2(\infty)$ gibt die Gesamtzahlungsbilanz über die Gesamtzeit an. Diese ist woldefiniert, da eine der Maße Z_1, Z_2 endlich ist, kann aber durchaus $+\infty$ oder $-\infty$ betragen. Auch kann die Differenz als signiertes Maß auf $[0, \infty)$ mit Dichte ΔZ aufgefaßt werden, wobei $\Delta Z(n)$ die am Ende der n-ten Periode fällige Differenz von Einnahmen und Ausgaben angibt. Mit $\mathcal{Z}$ wollen wir die Menge aller Zahlungsströme bezeichnen.

Zahlungen aus Zahlungsströmen können durch Diskontieren miteinander verglichen werden. So kann man zu einer Bewertung eines Zahlungsstromes kommen.

3.1.5 Definition: *Der Wert des Zahlungsstromes $Z \in \mathcal{Z}$ bezüglich einer Kapitalfunktion K bzw. Diskontierungsfunktion $v = \frac{1}{K}$ ist definiert durch*

$$V(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} v(k)\Delta Z(k) = \int_{[0,\infty} v\, dZ \quad . \tag{3.5}$$

Da die beschränkte Funktion v gegen ein signiertes Maß integriert wird, ist $V(Z)$ ein wohldefiniertes Element aus $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

3.1.6 Eigenschaften

(i) Hat Z die Zerlegung $Z = Z_1 - Z_2$ mit $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}_g$, so gilt

$$V(Z) = V(Z_1) - V(Z_2) \quad .$$

Insbesondere ist $V(Z)$ unabhängig von der Zerlegung.

(ii) Für alle $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}$ mit $V(Z_1) < \infty, V(Z_2) < \infty$ gilt

$$V(Z_1 + Z_2) = V(Z_1) + V(Z_2) \quad .$$

(iii) Für alle $Z \in \mathcal{Z}$ mit $Z(\infty) \in \mathbb{R}$ ist auch $V(Z)$ in $\mathbb{R}$.

Beweis: Die Aussagen folgen elementar durch Summation bzw. Integration. □

Ähnlich wie bei Versicherungen können unterschiedliche Zahlungsströme die gleiche Bewertung besitzen.

3.1.7 Definition: *Zwei Zahlungsströme Z_1, Z_2 heißen äquivalent, wenn sie jeweils endlich Werte haben, die übereinstimmen. Ein Zahlungsstrom Z heißt ausgewogen oder fair, wenn $V(Z) = 0$ gilt.*

Will man nach m Perioden die dann zukünftigen Zahlungen bewerten, so kommt man zum Deckungskapital für deterministische Zahlungsströme.

3.1.8 Definition: *Sei $Z \in \mathcal{Z}$ und K eine Kapitalfunktion. Für $m \in \mathbb{N}_0$ ist das prospektive Deckungskapital $V(m, Z)$ definiert durch*

$$\begin{aligned} V(m,Z) &= K(m) \sum_{k=m}^{\infty} v(k)\Delta Z(k) \\ &= K(m) \int_{[m,\infty)} v dZ \quad . \end{aligned} \tag{3.6}$$

Man beachte hier, daß die am Ende der m-ten Periode fällige Zahlung $\Delta Z(m)$ als zukünfige Zahlung zu interpretieren ist. $V(m, Z)$ gibt also die Summe der zukünftigen auf das Ende der m-ten Periode abdiskontierten Zahlungen an.

3.1.9 Beispiel: Ausbildungsversicherung

Eltern zahlen jährlich in einer Aufschubzeit von n Jahren vorschüßig p DM ein, um so ein Studium von l Jahren zu finanzieren. Während der Studienzeit wird ein Jahresbetrag von R DM vorschüßig ausbezahlt. Dies entspricht dem Zahlungsstrom

$$\begin{aligned} Z &= Z_1 - Z_2 \quad \text{mit} \\ Z_1(k) &= (k+1)p \quad 0 \le k \le n-1 \\ Z_1(k) &= np \quad \text{f.a. } k \ge n \\ Z_2(k) &= 0 \quad \text{f.a. } 0 \le k \le n-1 \\ Z_2(n+k) &= (k+1)R \quad \text{f.a. } 0 \le k \le l-1 \\ Z_2(k) &= lR \quad \text{f.a. } k \ge n+l \quad . \end{aligned}$$

Es ergibt sich folgende Bewertung

$$\begin{aligned} V(Z) &= \sum_{k=0}^{\infty} v(k)\Delta Z(k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} v(k)p - \sum_{k=0}^{l-1} v(n+k)R \\ &= p\sum_{k=0}^{n-1} v(k) - R\sum_{k=0}^{l-1} v(n+k) \end{aligned}$$

Aus $V(Z) = 0$ berechnet sich die zu zahlende jährliche Rate p bei gegebener Rente R durch

$$p = R\frac{\sum_{k=0}^{l-1} v(n+k)}{\sum_{k=0}^{n-1} v(k)} \quad .$$

Auch für deterministische Zahlungsströme kann eine Rekursionsgleichung für das Deckungskapital angegeben werden. Insbesondere kann bei fairen Zahlungsströmen das Deckungskapital rekursiv berechnet werden.

3.1.10 Bemerkung: *Für $Z \in \mathcal{Z}$ erfüllt das Deckungskapital $(V(m,Z))_{m\in\mathbb{N}_0}$ die Rekursionsbeziehung*

$$\begin{aligned} V(0,Z) &= V(Z) \\ V(m+1,Z) &= (1+r(m+1))(V(m,Z) - \Delta Z(m)) \quad \textit{f.a. } m \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} V(m,Z) &= K(m)\sum_{k=m}^{\infty} v(k)\Delta Z(k) = \Delta Z(m) + \frac{K(m)}{K(m+1)}V(m+1,Z) \\ &= \Delta Z(m) + \frac{V(m+1,Z)}{1+r(m+1)} \quad , \end{aligned}$$

woraus die Behauptung sofort folgt. □

Das retrospektive Deckungskapital kann folgendermaßen definiert werden.

3.1.11 Definition: *Für $Z \in \mathcal{Z}$ und einer Kapitalfunktion K wird das retrospektive Deckungskapital $(V^r(m,Z))$ definiert durch*

$$\begin{aligned} V^r(0,Z) &= 0 \quad , \\ V^r(m,Z) &= K(m)\sum_{j=0}^{m-1} v(j)\Delta(-Z)(j) = K(m)\int_{[0,m)} v\, d(-Z) \quad . \end{aligned} \tag{3.8}$$

Die Bewertung der vergangenen Leistungen des negativen Zahlungsstromes, diskontiert auf das Ende der m- ten Periode, ist also durch $V^r(m, Z)$ gegeben. Der Zusammenhang zwischen beiden Deckungskapitalbegriffen ist der folgende, welcher elementar bewiesen werden kann.

3.1.12 Bemerkung: *Es gilt:*

(i) $V^r(m, Z) = -V^r(m, -Z)$,

(ii) $v(m)(V(m, Z) - V^r(m, Z)) = V(Z)$,

(iii) Ist $V(Z) = 0$*, so gilt* $V(m, Z) = V^r(m, Z)$ *für alle* $m \in \mathbb{N}_0$.

3.2 Zufällige Zahlungsströme

Im zweiten Kapitel haben wir gesehen, daß die dort vorgestellten Personenversicherungen im wesentlichen Zahlungsströme sind, die zufällig vom Sterbezeitpunkt abhängen. Als Grundidee wird dies auch bei der Beschreibung von allgemeinen Personenversicherungen verwandt.

Wir gehen von einem hinreichend großen Wahrscheinlichkeitsraum

$$(\Omega, \mathcal{F}, P)$$

aus, auf dem die betrachten Zufallsvariablen definiert sind.

3.2.1 Definition: *Eine Folge* $A = (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *von Zufallsgrößen heißt zufälliger gerichteter Zahlungsstrom, wenn gilt*

$$P(\{\omega : A(\cdot, \omega) \in \mathcal{Z}_g\}) = 1 \quad .$$

A heißt zufälliger Zahlungsstrom, wenn

$$P(\{\omega : A(\cdot, \omega) \in \mathcal{Z}\}) = 1 \quad .$$

Ein zufälliger gerichteter Zahlungsstrom A kann aufgefaßt werden als ein zufälliges Maß auf $\mathbb{N}_0$ bzw. $[0, \infty)$ mit Zähldichte

$$\Delta A(n, \omega) = A(n, \omega) - A(n-1, \omega) \quad .$$

Ein zufälliger Zahlungsstrom A definiert ein zufälliges signiertes Maß auf $\mathbb{N}_0$ bzw. $[0, \infty)$ und kann als Differenz von zufälligen gerichteten Zahlungsströmen ausgedrückt werden.

Punktweise in ω kann eine Bewertung eines zufälligen Zahlungsstromes durchgeführt werden durch

$$V(A) = \sum_{k=0}^{\infty} v(k) \Delta A(k) \quad . \tag{3.9}$$

$V(A)$ ist die Summe der abdiskontierten zufälligen Zahlungen und somit eine $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ wertige Zufallsvariable. Falls $E\, V(A)$ existiert, wird dieser **Barwert** des zufälligen Zahlungsstromes A genannt. Ist

$$A = A_1 - A_2$$

mit $E\,A_1(\infty) < \infty, E\,A_2(\infty) < \infty$, so ist $V(A)$ eine reellwertige Zufallsvariable mit

$$E\,V(A) = E\,V(A_1) - E\,V(A_2) \in \mathbb{R} \quad ,$$

denn

$$V(A_1) = \sum_{k=0}^{\infty} v(k)\Delta A_1(k) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \Delta A_1(k) = A_1(\infty),$$

was die Integrierbarkeit von $V(A_1), V(A_2)$ impliziert.

3.2.2 Definition: *Zwei zufällige Zahlungsströme A_1, A_2 heißen äquivalent, wenn deren Barwerte reelle Zahlen sind und übereinstimmen.*

Ein zufälliger Zahlungsstrom A heißt ausgewogen oder fair, wenn dessen Barwert verschwindet, also $EV(A_1) = 0$ gilt.

3.3 Markov-Ketten

Wie am Anfang schon angedeutet spielen Markov-Ketten eine entscheidende Rolle bei der Definition einer allgemeinen Personenversicherung. Deshalb soll in diesem Abschnitt eine kleine Einführung in die Theorie der Markov-Ketten gegeben werden, wobei der Schwerpunkt im Umgang mit der Markov-Eigenschaft liegt. Wir gehen wieder von einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ aus.

3.3.1 Definition: *Sei $(X(n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von Zufallsvariablen mit Werten in einer abzählbaren Menge E. Dieser stochastische Prozeß X heißt Markov-Kette, falls gilt:*

$$P(X_{n+1} = i_{n+1}|X_n = i_n, \cdots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = i_{n+1}|X_n = i_n) \tag{3.10}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0, i_{n+1} \in E$ und $i_0, \cdots, i_n \in E$ mit $P(X_n = i_n, \cdots, X_0 = i_0) > 0$.

Die obige sogenannte Markov-Eigenschaft besagt, daß die zukünftige Entwicklung des Prozesses von der Vergangenheit nur über die Gegenwart abhängt. Um zu einem Folgezustand zu gelangen, ist nur der gegenwärtige Zustand relevant. Wie der Prozeß dorthin gelangt ist, spielt keine Rolle. Die Vergangenheit kann also vergessen werden.

3.3.2 Beispiele

- **Versicherungsmathematik:**
  Im vorigen Kapitel haben wir schon, ohne es zu erwähnen, eine Markov-Kette betrachtet. Diese kommt auch in der Zuverlässigkeitstheorie vor und kann folgendermaßen eingeführt werden. Sei T eine $(0, \infty)$- wertige Zufallsgröße, die als Restlebenszeit einer Person oder als Ausfallzeit eines technischen Systems interpretiert werden kann. Zu $n \in \mathbb{N}_0$ wird überprüft, ob das System ausgefallen ist oder nicht. Wir erhalten so die Folge der Indikatoren (X_n) definiert durch

$$X_n = 1_{\{T>n\}} \quad .$$

Ein Überleben der n-ten Periode wird also durch $\{X_n = 1\}$ angezeigt. Der Prozeß (X_n) definiert eine zeitlich inhomogene Markov-Kette mit Zustandsraum $E = \{0, 1\}$ und sogenannten Übergängen

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 1|X_n = 1) &= P(T > n+1|T > n) \\ P(X_{n+1} = 0|X_n = 1) &= P(T \le n+1|T > n) \\ P(X_{n+1} = 0|X_n = 0) &= 1 \quad . \end{aligned}$$

Diese Übergangswahrscheinlichkeiten sind zeitlich inhomogen, da sie von n abhängen.

- **Galton-Watson Prozeß**
  Der Galton-Watson Verzweigungsprozeß liefert ein einfaches Modell zur Beschreibung der Entwicklung einer Populationsgröße und beschreibt folgendes Fortpflanzungsverhalten. Startend mit einem Urahn hat dieser eine zufällige Anzahl von Nachkommen, die die erste Generation bilden. Jedes Mitglied dieser Generation hat wiederum unabhängig voneinander und unabhängig von den vorhergehenden Generationen eine zufällige Anzahl von Nachkommen. Die Anzahl aller Nachkommen von Mitgliedern einer Generation bildet die Folgegeneration. Es wird ferner angenommen, daß die sogenannten Reproduktionsverteilungen mit denen Nachkommen produziert werden, identisch verteilt sind. Die zeitliche Entwicklung der Populationsgröße durch die Generationen heißt dann Galton-Watson Prozeß und bildet eine zeitlich homogene Markov-Kette. Formalisiert werden kann dies folgendermaßen. Sei $(X_{n,i})_{n,i \in \mathbb{N}_0}$ eine Familie von unabhängigen, identisch auf $\mathbb{N}_0$ verteilten Zufallsvariablen. $X_{n,i}$ entspricht der Anzahl der Nachkommen des i-ten Mitgliedes der n-ten Generation. Wir setzen

  $$\begin{aligned} Z_0 &= 1 \quad , \\ Z_{n+1} &= \sum_{k=1}^{Z_n} X_{n,i} \qquad \text{f.a. } n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

  Wie man leicht nachweisen kann, definiert $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine zeitlich homogene Markov-Kette mit Zustandsraum $\mathbb{N}_0$ und Übergängen

  $$P(Z_{n+1} = l|Z_n = k) = P(\sum_{i=1}^{k} X_{0,i} = l)$$

  für alle $k, l \in \mathbb{N}_0$.

- **Roulette** Setzen wir nacheinander 1 DM auf Rot beim Roulette, so kann der Gewinnstand X_n nach n Spielen durch eine Markov-Kette (X_n) beschrieben werden mit Übergängen

  $$\begin{aligned} P(X_{n+1} = k+1|X_n = k) &= p = \frac{18}{37} \\ P(X_{n+1} = k-1|X_n = k) &= 1 - p = \frac{19}{37} \end{aligned}$$

Wie in den Beispielen angedeutet, werden die Übergangswahrscheinlichkeiten definiert durch

$$p_{i,j}(n,m) = \begin{cases} P(X_m = j|X_n = i) & \text{falls } P(X_n = i) > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{3.11}$$

für alle $i, j \in E, n < m$. Damit wird die Wahrscheinlichkeit des Übergangs von i zum Zeitpunkt n nach j zum Zeitpunkt m notiert. Sie haben folgende Eigenschaften

3.3.3 Bemerkung:

(i) $p_{i,\cdot}(n,m)$ *definiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf* E*, die bedingte Verteilung von* X_m *- gegeben* $X_n = i$*.*

(ii) Sei $l_\infty(E)$ *die Menge der beschränkten Funktionen von* E *nach* $\mathbb{R}$*. Durch*

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{P}_{n,m} : l_\infty(E) & \longrightarrow & l_\infty(E) \\ f & \mapsto & \mathbf{P}_{n,m} f \end{array}$$

mit

$$\mathbf{P}_{n,m} f(i) = \sum_{j \in E} f(j) p_{i,j}(n,m)$$

wird eine Familie von linearen Operatoren auf $l_\infty(E)$ *definiert.*

(iii) $(\mathbf{P}_{n,m})_{n \in \mathbb{N}_0, m \geq n}$ *bildet eine 2-parametrische Halbgruppe, d.h. es gilt*

$$\mathbf{P}_{n,m}\mathbf{P}_{m,u} = \mathbf{P}_{n,u} \quad f.a.\ n \leq m \leq u.$$

Dies entspricht den sogenannten Chapman-Kolmogorov Gleichungen.

(iv) $\mathbf{P}_{n,m} f(i) = E(f(X_m)|X_n = i) \qquad$ *für alle* $i \in E$*.*

Beweis: Wir wollen (iii) nachweisen, welches umnittelbar mit der Markov-Eigenschaft folgt. Für $n < m < u \in \mathbb{N}_0$, $f \in l_\infty(E)$ gilt für alle $i \in E$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{n,u} f(i) &= E(f(X_u)|X_n = i) = \sum_{j \in E} E(f(X_u) 1_{\{X_m = j\}} | X_n = i) \\ &= \sum_{j \in E} E(f(X_u)|X_m = j, X_n = i) P(X_m = j | X_n = i) \\ &= \sum_{j \in E} E(f(X_u)|X_m = j) p_{i,j}(n,m) \\ &= \sum_{j \in E} \mathbf{P}_{m,u} f(j) p_{i,j}(n,m) \\ &= \mathbf{P}_{n,m}(\mathbf{P}_{m,u} f)(i) \end{aligned}$$

3.3.4 Anwendung

Wir wollen eine nichttriviale Anwendung der Markov-Eigenschaft für das Roulettespielbeispiel geben. Wir nehmen an, daß der Spieler beliebig viel Anfangskapital besitzt, während die Bank nur eine Angangseinlage von K DM vorweisen kann. Setze für $l \in \mathbb{N}$

$$\tau_l = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : X_n = l\} \quad .$$

Dann ist die Bank ruiniert genau dann, wenn $\tau_K < \infty$ eintritt. Diese sogenannte Ruinwahrscheinlichkeit soll nun mit Hilfe eines Markov-Ansatzes berechnet werden. Wir definieren eine Funktion $g : \mathbb{N} \to [0,1]$ durch

$$g(l) = P(\tau_l < \infty | X_0 = 0)$$

und zeigen

$$g(l) = g(1)^l \quad .$$

Dies folgt aus der Markov-Eigenschaft, denn

$$\begin{aligned}
P(\tau_l < \infty | X_0 = 0)) &= P(\tau_l < \infty, \tau_1 < \infty | X_0 = 0) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} P(\tau_l < \infty, \tau_1 = n | X_0 = 0) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} P(\bigcup_{\{k \in \mathbb{N}\}} \{X_{n+k} = l\} \cap \{\tau_1 = n\} | X_0 = 0) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} P(\bigcup_{\{k \in \mathbb{N}\}} \{X_{n+k} = l\} | \{\tau_1 = n\} \cap \{X_0 = 0\}) P(\tau_1 = n | X_0 = 0) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} P(\bigcup_{\{k \in \mathbb{N}\}} \{X_{n+k} = l\} | X_n = 1) P(\tau_1 = n | X_0 = 0) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} P(\bigcup_{\{k \in \mathbb{N}\}} \{X_k = l\} | X_0 = 1) P(\tau_1 = n | X_0 = 0) \\
&= P(\tau_l < \infty | X_0 = 1) P(\tau_1 < \infty | X_0 = 0) \\
&= P(\tau_{l-1} < \infty | X_0 = 0) P(\tau_1 < \infty | X_0 = 0) \\
&= g(l-1) g(1) \quad .
\end{aligned}$$

Es ist also zur expliziten Bestimmung noch $x = g(1)$ zu bestimmen. Ich zeige im folgenden mit Hilfe der Markov-Eigenschaft, daß x die Gleichung

$$x = p + x^2(1-p) \tag{3.12}$$

erfüllt und damit entweder mit $\frac{p}{1-p}$ oder 1 übereinstimmt. Wegen des starken Gesetzes der großen Zahlen muß $x < 1$ sein. Also folgt

$$g(1) = \frac{p}{1-p} \quad .$$

Der Nachweis von (3.12) folgt aus

$$\begin{aligned}
P(\tau_1 < \infty | X_0 = 0) &= P(\tau_1 < \infty, X_1 = 1 | X_0 = 0) + P(\tau_1 < \infty, X_1 = -1 | X_0 = 0) \\
&= P(X_1 = 1 | X_0 = 0) + P(\bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} \{X_{k+1} = 1\}, X_1 = -1 | X_0 = 0) \\
&= p + P(\bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} \{X_{k+1} = 1\} | X_1 = -1, X_0 = 0) P(X_1 = -1 | X_0 = 0) \\
&= p + P(\bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} \{X_k = 1\} | X_0 = -1)(1-p) \\
&= p + P(\tau_1 < \infty | X_0 = -1)(1-p) \\
&= p + P(\tau_2 < \infty | X_0 = 0)(1-p) \\
&= p + x^2(1-p) \quad .
\end{aligned}$$

3.4 Markov-Ketten Modellierung

In diesem Abschnitt soll das schon angekündigte Modell einer Personenversicherung vorgestellt werden, daß eine Beschreibung mittels einer Markov-Kette und sogenannten Versicherungsleistungsfunktionen nach folgendem Ansatz liefert. Wir nehmen an , daß der zu versichernde Gegenstand (die zu versichernde Person) in der Zeit Zustände einer endlichen Menge E zufällig entsprechend einer Markov-Kette X durchläuft. Am Ende jeder Periode werden zwei unterschiedliche Szenarien betrachtet:

- Die Markov-Kette ändert ihren Zustand, etwa i, am Ende der n-ten Periode und springt in einen Folgezustand $j \neq i$. Der allgemeine Versicherungsvertrag sieht dann eine Leistung $\alpha_{i,j}(n) \in \mathbb{R}$ vor.
- Die Markov-Kette verweilt im Zustand i. Dann wird eine Leistung $\Delta a_i(n) \in \mathbb{R}$ fällig.

Leistungen, die durch Sprünge verursacht werden, werden in der Regel als Todesfalleistungen interpretiert, während das Verweilen in einem Zustand als Erlebensfallleistung angesehen wird. Formal können wir die folgende mathematische Definition geben.

3.4.1 Definition: *Eine gerichtete Personenversicherung ist ein Tripel*

$$((X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}, (a_i)_{i\in E}, (\alpha_{i,j})_{i\neq j})$$

bestehend aus

- *einer Markov-Kette (X_n) auf einem endlichen Zustandsraum E,*
- *einer Familie $(a_i)_{i\in E}$ von gerichteten Zahlungsströmen,*
- *einer Familie $(\alpha_{i,j})_{i\neq j}$ von nicht negativen Funktionen $\alpha_{i,j} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$.*

Die durch eine gerichtete Personenversicherung induzierten zufälligen Zahlungsströme sollen nun eingeführt werden. Jeder Pfad der Markov-Kette führt zu einem Zahlungsstrom, indem die Zahlung betrachtet wird, die am Ende jeder Periode fällig wird. Alle Zeitpunkte an denen die Kette im Zustand i verweilt, führen zu Auszahlungen entsprechend dem deterministischen Zahlungsstrom a_i. Da die Zeitpunkte zufällig sind, können wir den zufälligen Zahlungsstrom A_i für jedes $i \in E$ definieren durch

$$\begin{aligned} A_i(0) &= a_i(0) \\ \Delta A_i(n) &= 1_{\{X_n=i,X_{n-1}=i\}}\Delta a_i(n) \quad , n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Durch Zustandswechsel werden die zufälligen Zahlungsströme $A_{i,j}$ für $i \neq j$ definiert.

$$\begin{aligned} A_{i,j} &= 0 \\ \Delta A_{i,j}(n) &= \alpha_{i,j}(n)\Delta N_{i,j}(n) \quad , \end{aligned} \tag{3.14}$$

wobei $N_{i,j}(n)$ die Anzahl der Übergänge von i nach j in den ersten n Perioden zählt, also

$$N_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} 1_{\{X_k=j,X_{k-1}=i\}} \quad .$$

Der durch eine Personenversicherung induzuerte Gesamtzahlungsstrom A ist definiert durch

$$A = \sum_{i\in E} A_i + \sum_{i\neq j} A_{i,j} \tag{3.15}$$

Zu einer gegebenen Kapitalfunktion K bzw. Diskontierungsfunktion $v = 1/K$ können wir also die Personenversicherung mittels ihres zufälligen Gesamtzahlungsstromes bewerten und erhalten

$$V(A) = \sum_{k=0}^{\infty} v(k)\Delta A(k) = \int_{[0,\infty)} v\, dA \tag{3.16}$$

als zufällige Summe aller abdiskontierten Leistungen, welches eine $[0,\infty)\cup\{+\infty\}$ wertige Zufallsvariable ist. Den Barwert einer gerichteten Personenversicherung erhalten wir dann durch

$$EV(A) = E\sum_{k=0}^{\infty} v(k)\Delta A(k) = E\int_{[0,\infty)} v\,dA \quad . \tag{3.17}$$

Wie in Kapitel 2 sind gerichtete Personenversicherungen äquivalent, wenn deren Barwerte übereinstimmen.

3.4.2 Definition: *Zwei gerichtete Personenversicherungen*

$$\Big((X_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}_0},(a_i^{(1)})_{i\in E},(\alpha_{i,j}^{(1)})_{i\neq j}\Big) \quad , \quad \Big((X_n^{(2)})_{n\in\mathbb{N}_0},(a_i^{(2)})_{i\in E},(\alpha_{i,j}^{(2)})_{i\neq j}\Big)$$

heißen äquivalent, wenn deren Barwerte endlich sind und übereinstimmen.

Zunächst fällt es vielleicht schwer, die in Kapitel 3 betrachteten Versicherungen im Sinne der hier gelieferten allgemeinen Definition wiederzuerkennen.

3.4.3 Beispiel: Ein unter einem Risiko stehendes Leben

Die im vorigen Kapitel betrachteten Versicherungen können durch folgendes einfaches Markov-Ketten Modell beschrieben werden. Zu einer Restlebenszeit T_x betrachten wir entsprechend dem Beispiel aus (3.3.2) die Markov-Kette (X_n) definiert durch $X_n = 1_{\{T>n\}}$. Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind dann durch die Sterbe-bzw. Überlebenswahrscheinlichkeiten gegeben. Es gilt also bei einem Eintrittsalter x

$$\begin{aligned} P(X_{n+1}=1|X_n=1) &= P(T>n+1|T>n) = p_{x+n} \\ P(X_{n+1}=0|X_n=1) &= P(T\le n+1|T>n) = q_{x+n} \\ P(X_{n+1}=0|X_n=0) &= 1 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Die unterschiedlichen Versicherungsformen werden durch die Leistungsfunktionen ausgestaltet. Wir stellen vor:

- **allgemeine Todesfallversicherung**
  Ein Tod im n-ten Versicherungsjahr verursacht eine Leistung $t(n)\ge 0$ am Ende des Todesjahres, welche durch die Leistungsfunktionen

  $$\alpha_{1,0} = t, a_0 = a_1 = 0, \alpha_{0,1} = 0$$

  beschrieben wird. Die dann so definierte gerichtete Personenversicherung $((X_n)_{n\in\mathbb{N}_0},(a_i)_{i\in E},(\alpha_{i,j})_{i\neq j}$ kann als allgemeine Todesfallversicherung für ein Leben aufgefaßt werden. Diese induziert folgenden Gesamtzahlungsstrom A, definiert durch

  $$A(0)=0, \Delta A(n) = \alpha_{1,0}(n)\Delta N_{1,0}(n) = t(n)1_{\{X_n=0,X_{n-1}=1\}}$$

  mit Bewertung

  $$V(A) = \sum_{k=1}^{\infty} v(k)\Delta A(k) = \sum_{k=1}^{\infty} v(k)t(k)1_{\{k-1<T_x\le k\}}$$

  und Barwert

  $$EV(A) = \sum_{k=1}^{\infty} v(k)t(k)P(k-1<T_x\le k) \quad .$$

- **allgemeine Rentenversicherung**
  Überleben des n-ten Versicherungsjahres führt zu einer Rentenzahlung in Höhe von $r(n) \geq 0$. Die einzige nichttrivale Leistungsfunktion ist also der zum Zustand 1 gehörige Zahlungsstrom a_1, der durch
$$a_1(0) = r(0) \quad , \quad \Delta a_1(n) = r(n) \text{ f.a. } n \in \mathbb{N}$$
  definiert ist. Die dazugehörige Personenversicherung induziert einen zufälligen Zahlungsstrom A, gegben durch
$$A(0) = r(0), \Delta A(n) = 1_{\{X_n=1, X_{n-1}=1\}} \Delta a_1(n) = 1_{\{T_x > n\}} r(n)$$
  mit Barwert
$$EV(A) = \sum_{k=0}^{\infty} v(k) r(k) P(T_x > k) \quad .$$

Natürlich ist der Einwand gestattet, daß man in offensichtlicher Weise das Konzept des zweiten Kapitels hätte ausdehnen können, ohne eine Markovstruktur einzuführen. Wir werden allerdings im folgenden Beispiele kennen lernen, die mit Markov-Ketten verhältnismaßig leicht exakt beschrieben werden konnen.

Die gerichteten Versicherungen beschreiben die zufälligen Versicherungsleistungen vom Versicherungsunternehmen an den Versicherungsnehmer . Sollen Prämienzahlungen kalkuliert werden, muß gemäß dem Äquivalenzprinzip eine zur Versicherung äquivalente Rentenversicherung bestimmt werden, die dann die Leistungen des Versicherungsnehmers an das Versicherungsunternehmen beschreibt. Wir können dies auch durch eine allgemeine Personenversicherung beschreiben in der folgenden Weise.

3.4.4 Definition: *Ein Tripel*
$$((X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, (a_i)_{i \in E}, (\alpha_{i,j})_{i \neq j})$$
bestehend aus

- *einer Markov-Kette X mit endlichem Zustandsraum E,*
- *einer Familie von Zahlungsströmen $(a_i)_{i \in E}$,*
- *einer Familie von Funktionen $(\alpha_{i,j})_{i \neq j}$*

heißt allgemeine Personenversicherung, wenn es gerichtete Personenversicherungen
$$\left((X_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}_0}, (a_i^{(1)})_{i \in E}, (\alpha_{i,j}^{(1)})_{i \neq j}\right) \quad , \quad \left((X_n^{(2)})_{n \in \mathbb{N}_0}, (a_i^{(2)})_{i \in E}, (\alpha_{i,j}^{(2)})_{i \neq j}\right)$$
gibt mit

(i) $a_i = a_i^{(1)} - a_i^{(2)}$ *f.a.* $i \in E$,

(ii) $\alpha_{i,j} = \alpha_{i,j}^{(1)} - \alpha_{i,j}^{(2)}$ *f.a.* $i \neq j$,

(iii) eine der beiden durch die gerichteten Versicherungen induzierten Gesamtzahlungsströme $A^{(1)}, A^{(2)}$ ist P-f.s. endlich.

Wegen der Bedingung (iii) können wir auch bei der ungerichteten Personenversicherung die induzierten Zahlungsströme einführen mittels

$$\begin{aligned} A_i(0) &= a_i(0) \\ \Delta A_i(n) &= 1_{\{X_n=i, X_{n-1}=i\}} \Delta a_i(n) \\ &= 1_{\{X_n=1, X_{n-1}=i\}} (\Delta a_i^{(1)}(n) - \Delta a_i^{(2)}(n)) \\ &= \Delta A_i^{(1)}(n) - \Delta A_i^{(2)}(n) \quad , n \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{3.19}$$

für alle $i \in E$ sowie

$$\begin{aligned} A_{i,j}(0) &= 0 \\ \Delta A_{i,j}(n) &= \alpha_{i,j}(n) \Delta N_{i,j}(n) \\ &= \alpha_{i,i}^{(1)}(n) \Delta N_{i,j}(n) - \alpha_{i,j}^{(2)}(n) \Delta N_{i,j}(n) \\ &= \Delta A_{i,j}^{(1)}(n) - \Delta A_{i,j}^{(2)}(n) \quad , n \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{3.20}$$

für alle $i, j \in E$ mit $i \neq j$. Der zufällige Gesamtzahlungsstrom A ist gegeben durch

$$A = \sum_{i \in E} A_i + \sum_{i \neq j} A_{i,j} = A^{(1)} - A^{(2)} \quad .$$

Durch

$$V(A) = \sum_{k=0}^{\infty} v(k) \Delta A(k) = V(A^{(1)}) - V(A^{(2)})$$

erhält man die zufällige Bewertung des Gesamtzahlungsstromes der allgemeinen Personenversicherung mit Barwert

$$EV(A) = EV(A^{(1)}) - EV(A^{(2)}) \quad ,$$

falls eine der beiden Erwartungswerte auf der rechten Seite endlich ist. Die Personenversicherung ist ausgewogen oder balanciert, wenn $EV(A) = 0$ gilt.

3.5 Ein Leben unter mehreren konkurrierenden Risiken

Unter dieses Stichwort fallen z.B. Lebensversicherungen, die nach Todesursachen ihre Leistungen differenzieren. Häufgig verkauft werden Risikolebensversicherungen, die bei Unfalltod die doppelte Versicherungssumme auszahlen. Eine weitere praktische Anwendung findet dieser Versicherungstyp, wenn neben dem Tod noch andere Ausscheideursachen wie Berufsunfähigkeit oder Altersrentner betrachtet werden sollen. Grundbestandteile dieser Versicherungsart sind also

- eine zufällige Nichtausfallzeit T mit Werten in $(0, \infty)$,
- mehrere Ausscheideursachen, die konkurrierenden Risiken, beschrieben durch eine Menge $U = \{u_1, \cdots, u_m\}$

Startend aus einem Lebendzustand verbleiben wir in diesem ensprechend der Nichtausfallzeit T und springen in einen Zustand $u \in U$, der die Ausscheideursache kennzeichnet. Die so verbal formulierte Markov-Kette kann folgendermaßen definiert werden.

Sei $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ene Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit Werten in U, die unabhängig von der Restlebenszeit T ist. Wir definieren

$$\tau = \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n = 0\}$$

und

$$X_n = 1_{\{T>n\}} + Y_{\tau-1}1_{\{T\leq n\}} \qquad \text{f.a. } n \in \mathbb{N}_0.$$

Hierdurch wird eine Markov-Kette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ auf $E = U \cup \{1\}$ definiert mit Übergängen

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 1|X_n = 1) &= P(T > n+1|T > n) \\ P(X_{n+1} = u|X_n = 1) &= P(T \leq n+1|T > n)P(Y_n = u) \\ P(X_{n+1} = u|X_n = u) &= 1 \quad \text{f.a. } u \in U, \end{aligned} \tag{3.21}$$

denn

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = u|X_n = 1) &= P(T \leq n+1, X_{n+1} = u|T > n) \\ &= P(n < T \leq n+1, Y_n = u|T > n) \\ &= P(T \leq n+1|T > n)P(Y_n = u) \quad . \end{aligned}$$

$P(X_{n+1} = 1|X_n = 1)$ ist also die einjärige Nichtausscheidewahrscheinlichkeit und $P(X_{n+1} = u|X_n = 1)$ die einjährige Ausfallwahrscheinlichkeit infolge der Ursache u.

Entsprechend der Versicherungsleistung können verschiedene Arten angegeben werden.

- **Todesfallversicherung**
  Scheidet die Person im n-ten Jahr wegen der Ursache u aus, wird eine Leistung $t_u(n)$ fällig. Die Leistung wird also durch eine $[0,\infty)^m$ wertige Folge $(t(n))$, definiert durch
  $$t(n) = (t_{u_1}(n), \cdots, t_{u_m}(n)) \qquad \text{f.a. } n \in \mathbb{N},$$
  angegeben, welche zu eine gerichtete Personenversicherung
  $$((X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}, (a_i)_{i\in E}, (\alpha_{i,j})_{i\neq j})$$
  führt mit
  $$\begin{aligned} a_i &\equiv 0 \quad \text{f.a. } i \in E = U \cup \{1\}, \\ \alpha_{1,u}(n) &= t_u(n) \quad \text{f.a. } n \in \mathbb{N}, u \in U \\ \alpha_{u,1} &\equiv 0 \quad \text{f.a. } u \in U. \end{aligned}$$
  Für die dazugehörigen Zahlungsströme gilt
  $$\begin{aligned} \Delta A_{1,u}(n) &= \alpha_{1,u}(n)\Delta N_{1,u}(n) \\ &= t_u(n)1_{\{X_{n-1}=1, X_n=u\}} \\ &= t_u(n)1_{\{n-1<T\leq n, Y_{n-1}=u\}} \end{aligned}$$
  und damit
  $$\Delta A(n) = \sum_{u\in U} \Delta A_{1,u}(n) = \sum_{u\in U} t_u(n)1_{\{n-1<T\leq n, Y_{n-1}=u\}} \quad .$$
  Dies führt zur Bewertung
  $$V(A) = \sum_{n=1}^{\infty} v(n)\Delta A(n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} v(n) \sum_{u\in U} t_u(n) 1_{\{n-1<T\leq n, Y_{n-1}=u\}}$$

und dem Barwert

$$EV(A) = \sum_{u\in U} \sum_{n=1}^{\infty} t_u(n) P(n-1 < T \leq n) P(Y_{n-1} = u) \quad . \tag{3.22}$$

- **Rentenversicherung**
Solange die Person noch nicht ausgeschieden ist, wird eine Rentenzahlung entsprechend einer Folge $(r(n))$ durchgeführt. Dies kann genauso behandelt werden, wie bei nur einer Ausscheideursache, da die Differenzierung anch Ausscheideursachen keinen Einfluß auf die Leistung hat. Man erhält als Barwert

$$EV(A) = \sum_{n=0}^{\infty} v(n) r(n) P(T > n) \quad .$$

Konkret möchten wir folgende Versicherungen modellieren.

- **Turbotodesfallversicherung**
Diese Versicherung hat die folgenden Bestandteile
  - Zwei Ausscheideursachen u, d, wobei u für Unfalltod und d für andere Todesursache steht. $U = \{u, d\}$.
  - Eintrittsalter x
  - Sterbewahrscheinlichkeiten (q_{x+n}) bzw. Überlebenswahrscheinlichkeiten (p_{x+n}), die aus einer Sterbetafel entnommen werden,
  - Unfalltodwahrscheinlichkeit r unabhängig vom Alter mit $r < q_{x+n}$ f.a. $n \in \mathbb{N}_0$
  - Todesfallleistung unabhängig vom Todesjahr gegeben durch $t_u > 0, t_d > 0$.

  Es gilt

$$\begin{aligned} P(T > n+1 | T > n) &= p_{x+n} \\ P(T \leq n+1 | T > n) &= q_{x+n} \\ P(T \leq n+1 | T > n) P(Y_n = u) &= r \quad , \end{aligned}$$

  was

$$P(Y_n = u) = \frac{r}{q_{x+n}} \quad , \quad P(Y_n = d) = 1 - \frac{r}{q_{x+n}}$$

  impliziert. Wir erhalten also mit (3.22) den Barwert

$$\begin{aligned} EV(A) &= t_u \sum_{n=1}^{\infty} v(n) P(n-1 < T \leq n) \frac{r}{q_{x+n-1}} \\ &\quad + t_d \sum_{n=1}^{\infty} v(n) P(n-1 < T \leq n) \frac{q_{x+n-1} - r}{q_{x+n-1}} \\ &= t_u \sum_{n=1}^{\infty} v(n) P(T > n-1) r + t_d \sum_{n=1}^{\infty} v(n) P(T > n-1)(q_{x+n-1} - r) \quad . \end{aligned}$$

- **Nichtraucherversicherung**
  Hintergrund ist, daß Nichtraucher eine höhere Lebenserwartung besitzen aufgrund geringer Sterbewahrscheinlichkeiten, so daß eine Risikodifferenzierung nach dem Rauchverhalten sinnvoll erscheint. Das Problem ist allerdings, daß keine vernünftige Überprüfung möglich ist. Ein Ausweg könnte darin bestehen, eine Versicherung anzubieten, die günstige Prämien bietet, aber einen Ausschluß von bestimmten Todesursachen wie Lungenkrebs vornimmt. Im Modell der Turbotodesfallversicherung ist also der Zustand u als Tod durch Lungenkrebs und d als andere Todesursache zu interpretieren. Die Lungenkrebstodeswahrscheinlichkeiten (r_{x+n}) müssen allerdings vom Alter abhängen und $r_{x+n} < q_{x+n}$ erfüllen. Analog zur Turbotodesfallversicherung erhalten wir den Barwert

  $$EV(A) = M \sum_{n=1}^{\infty} v(n) P(T > n-1)(q_{x+n-1} - r_{x+n-1}),$$

  wenn nur bei dem Todeszustand d die Versicherungssumme M ausgezahlt wird.

3.6 Mehrere Leben unter einem Risiko

Unter dieses Stichwort fallen die unterschiedlichsten Formen der Versicherungen auf verbundene Leben. Hauptsächlich angewandt wird es bei Lebens- und Rentenversicherungen für Ehepaare. Verallgemeinert bedeutet dies, daß man N Personen versichert mit

- Eintrittsaltern $x_1, \ldots, x_n$,
- stochastisch unabhängige Restlebenszeiten $T_1, \ldots, T_N$.

Wir betrachten also den Zustandsraum $E = \{0,1\}^N$ und $i \in E$ bedeutet:

$$\begin{array}{lcl} i_k = 1 & \cong & \text{Person Nr. k ist am Leben} \\ i_k = 0 & \cong & \text{Person Nr. k ist tod .} \end{array}$$

Wegen der Unabhängigikeitsannahme können wir eine Marko-Kette $(X(n))_{n \in N_0}$ auf E definieren durch

$$X(n) = (1_{\{T_1 > n\}}, \ldots, 1_{\{T_N > n\}}) \quad \text{f.a. } n \in \mathbb{N}_0,$$

die aus stochastisch unabhängigen Komponenten besteht. Ferner gilt:

$$P(X(n+1) = i | X(n) = i) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k(n+1) = i_k | X_k(n) = j_k) \quad \text{f.a. } i, j \in E$$

mit den einjährigen Überlebens- bzw. Sterbewahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned} P(X_k(n+1) = 1 | X_k(n) = 1) &= P(T_k > n+1 | T_k > n) \\ P(X_k(n+1) = 0 | X_k(n) = 1) &= P(T_k \leq n+1 | T_k > n) \\ P(X_k(n+1) = 0 | X_k(n) = 0) &= 1 \end{aligned}$$

der k-ten Person.

3.6.1 Zwei verbundene Leben

Hauptsächlich kommen Versicherungen auf zwei verbundene Leben vor. Wir notieren deren Sterbe-bzw. Überlebenswahrscheinlichkeiten durch $q^{(1)}_{x_1+n}, q^{(2)}_{x_2+n}$ und $p^{(1)}_{x_1+n}, p^{(2)}_{x_2+n}$, die durch

$$q^{(1)}_{x_1+n} = P(T_1 \leq n+1 | T_1 > n) \quad , \quad q^{(2)}_{x_2+n} = P(T_2 \leq n+1 | T_2 > n)$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gegeben sind. Folgende Versicherungen stellen wir vor:

- **Todesfallversicherung auf den ersten Tod**
  Passiert der erste Todesfall im n-ten Jahr, wird eine Versicherungssumme $t(n)$ am Ende des Versicherungsjahres fällig. Dies entspricht folgenden Leistungsfunktionen

$$\begin{aligned} a_i &\equiv 0 \quad \text{f.a. } i \in E \\ \alpha_{i,j} &\equiv 0 \text{ f.a. } i \neq j \text{ und } i \neq (1,1) \\ \alpha_{(1,1),i} &= t(n) \quad \text{f.a. } i \neq (1,1), \end{aligned}$$

  welche zur Definition einer gerichteten Personenversicherung

$$((X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, (a_i)_{i \in E}, (\alpha_{i,j})_{i \neq j})$$

  benutzt werden können, die ein Modell für die Todesfallversicherung auf den ersten Tod darstellt. Diese Versicherung induziert einen Gesamtzahlungsstrom A, der durch $A(0) = 0$ und

$$\begin{aligned} \Delta A(n) &= \sum_{i \neq (1,1)} \alpha_{(1,1),i}(n) \Delta N_{(1,1),i} \\ &= \sum_{i \neq (1,1)} t(n) 1_{\{X_n = i, X_{n-1} = (1,1)\}} \\ &= t(n) 1_{\{X_n \neq (1,1), X_{n-1} = (1,1)\}} \\ &= t(n) 1_{\{T \leq n, T > n-1\}} \quad \text{f.a. } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

  mit $T = T_1 \wedge T_2$ definiert wird. Er wird bewertet durch

$$V(A) = \sum_{n=1}^{\infty} t(n) v(n) 1_{\{T \leq n, T > n-1\}}$$

  mit Barwert

$$EV(A) = \sum_{n=1}^{\infty} v(n) t(n) P(n-1 < T \leq n) \quad .$$

  Wir können dies ausdrücken mittels der Überlebenswahrscheinlichkeiten der beiden Personen durch

$$\begin{aligned} P(n-1 < T \leq n) &= P(T > n-1) - P(T > n) \\ &= P(T_1 > n-1, T_2 > n-1) - P(T_1 > n, T_2 > n) \\ &= {}_{n-1}p^{(1)}_{x_1} \, {}_{n-1}p^{(2)}_{x_2} - {}_{n}p^{(1)}_{x_1} \, {}_{n}p^{(2)}_{x_2} \quad . \end{aligned}$$

- Todesfallversicherung auf den zweiten Tod Hier wird die Versicherungsleistung erst fällig, wenn der zweite Todesfall passiert. Analog zum vorigen Beispiel erhält man den Barwert

$$EV(A) = \sum_{n=1}^{\infty} v(n) t(n) P(n-1 < T \leq n)$$

mit $T = T_1 \vee T_2$. Durch

$$\begin{aligned} P(n-1 < T \leq n) &= P(T \leq n) - P(T \leq n-1) \\ &= P(T_1 \leq n, T_2 \leq n) - P(T_1 \leq n-1, T_2 \leq n-1) \\ &= {}_nq_{x_1}^{(1)}\,{}_nq_{x_2}^{(2)} - {}_{n-1}q_{x_1}^{(1)}\,{}_{n-1}q_{x_2}^{(2)} \quad . \end{aligned}$$

kann der Barwert wieder durch die Sterbewahrscheinlichkeiten der einzelnen Personen ausgedrückt werden.

- allgemeine Todesfallversicherung Durch Spezifizierung durch $(\alpha_{i,j})$ kann man eine allgemeine Todesfallversicherung definieren. Es gilt also dann $a_i \equiv 0$ für alle $i \in E$ und man hat folgende Leistungen

$\alpha_{(1,1),(0,1)}(n)$,falls Person Nr.1 vor Nr.2 im n-ten Jahr stirbt
$\alpha_{(1,1),(1,0)}(n)$,falls Person Nr.2 vor Nr.1 im n-ten Jahr stirbt
$\alpha_{(1,1),(0,0)}(n)$,falls beide Personen im n-ten Jahr sterben
$\alpha_{(1,0),(0,0)}(n)$,falls Person Nr.1 nach Nr.2 im n-ten Jahr stirbt
$\alpha_{(0,1),(0,0)}(n)$,falls Person Nr.2 nach Person Nr.1 im n-ten Jahr stirbt

- **Verbindungsrente** Solange wie das Paar lebt wird eine Rente entsprechend $(r(n))_{n\in\mathbb{N}}$ gezahlt. Dies kann durch die Leistungsfunktionen

$$a_{(1,1)}(0) = r(0) \quad , \quad \Delta a_{(1,1)}(n) = r(n) \text{ f.a. } n \in \mathbb{N}$$

und $a_i \equiv 0$ für $i \neq (1,1)$ sowie $\alpha_{i,j} \equiv 0$ für $i \neq j$. beschrieben werden. Diese hat dann den Gesamtzahlungsstrom

$$\begin{aligned} A(0) &= r(0) \\ \Delta A(n) &= 1_{\{X_n=(1,1),X_{n-1}=(1,1)\}}\Delta a_{(1,1)}(n) = 1_{\{X_n=(1,1),X_{n-1}=(1,1)\}}r(n) \\ &= r(n)1_{\{T>n\}} \end{aligned}$$

mit T als Minimum der Restlebenszeiten der beiden Personen. Dieser wird durch

$$V(A) = \sum_{n=0}^{\infty} v(n)r(n)1_{\{T>n\}}$$

bewertet und hat

$$EV(A) = \sum_{n=0}^{\infty} v(n)r(n)P(T > n)$$

als Barwert. Ist die Rentenhöhe konstant 1, so bezeichnet man den Barwert der Verbindungsrente durch

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{x_1x_2} &= \sum_{n=0}^{\infty} v(n)P(T > n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} v(n)P(T_1 > n)P(T_2 > n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} v(n)\,{}_np_{x_1}^{(1)}\,{}_np_{x_2}^{(2)} \end{aligned} \qquad (3.23)$$

- **einseitige Überlebensrente an Person Nr.2**
  Wenn Person Nr. 2 eine Frau ist, entspricht dies einer Witwenrente, die fällig wird nach dem Tod von Person Nr. 1 . Dies entspricht folgenden Leistungsfunktionen

  $$a_{(0,1)}(0) = r(0), \Delta a_{(0,1)}(n) = r(n) \text{ f.a. } n \in \mathbb{N}$$

  sowie $a_i \equiv 0$ für $i \neq (0,1)$ sowie

  $$\begin{aligned} \alpha_{(1,1),(0,1)}(n) &= r(n) \quad \text{f.a. } n \in \mathbb{N}, \\ \alpha_{i,j} &\equiv 0 \quad \text{sonst.} \end{aligned}$$

  Zunächst ist es etwas verwunderlich, daß auch eine Todesfallleistung nichttrivial ist. Dies liegt aber daran, daß am Ende des Todesjahres von Person Nr.1 die erste Rentenzahlung an eine eventuell vorhandende Witwe fällig wird. Wir erhalten folgenden Gesamtzahlungsstrom

  $$\begin{aligned} A(0) &= 0 \\ \Delta A(n) &= r(n)1_{\{X_n=(0,1),X_{n-1}=(0,1\}} + r(n)1_{\{X_n=(0,1),X_{n-1}=(1,1)\}} \\ &= r(n)1_{\{T_2>n,T_1\leq n-1\}} + r(n)1_{\{T_2>n,n-1<T_1\leq n\}} \\ &= r(n)1_{\{T_2>n,T_1\leq n\}} \\ &= r(n)(1_{\{T_2>n\}} - 1_{\{T_2>n,T_1>n\}}) \end{aligned}$$

  mit Barwert

  $$EV(A) = \sum_{n=1}^{\infty} v(n)r(n)(P(T_2 > n) - P(T > n)) \quad ,$$

  wobei $T = T_1 \wedge T_2$. Bei konstanter Rentenhöhe 1 wird im allgemeinen die Bezeichung

  $$\ddot{a}_{x_1|x_2} = \ddot{a}_{x_2} - \ddot{a}_{x_1x_2} \tag{3.24}$$

  benutzt, was der Anwartschaft auf Witwenrente entspricht.

- **einseitige Überlebensrente an Person Nr.1**
  Hier führt ein analoges Vorgehen für die Rentenhohe 1 zum Barwert

  $$\ddot{a}_{x_2|x_1} = \ddot{a}_{x_1} - \ddot{a}_{x_1x_2} \tag{3.25}$$

- **zweiseitige Überlebensrente** Hier wird eine Rente an den Überlebenden gezahlt. Wir erhalten die Leistungsfunktionen durch Addition der Leistungsfunktionen der einseitigen Überlebensrenten. Damit addieren sich auch die Barwerte. Es ergibt sich somit bei Rentenhöhe 1

  $$\ddot{a}_{\overline{x_1x_2}^{[1]}} = \ddot{a}_{x_1|x_2} + \ddot{a}_{x_2|x_1} = \ddot{a}_{x_1} + \ddot{a}_{x_2} - 2\ddot{a}_{x_1x_2} \quad . \tag{3.26}$$

3.6.2 Drei verbundene Leben

Hier möchten wir ein Anwendungsbeispiel für eine Versicherung auf drei Leben vorstellen. Wir betrachten ein Ehepaar mit Kind und bezeichnen die Eintrittsalter durch:

x	Vater
y	Mutter
z	Kind

Stirbt eines der Eltern, erhält das Kind eine Halbwaisenrente, solange es lebt, höchstens aber bis zu einem Höchstalter von L Jahren, etwa $L = 25$. Wir bezeichnen mit T_x, T_y, T_z die Restlebenszeiten des Vaters, der Mutter und des Kindes und wollen den Barwert zur Rentenhöhe 1 bestimmen. Die Halbwaisenrente entspricht den folgenden Leistungsfunktionen

$$a_{(0,0,1)} = a_{(1,0,1)} = a_{(0,1,1)}$$

definiert durch

$$a_{(0,0,1)}(0) = 1 \quad , \quad \Delta a_{(0,0,1)}(n) = 1_{\{1,\ldots,m-1\}}(n)$$

sowie

$$\alpha_{(1,1,1),(0,0,1)} = \alpha_{(1,1,1),(1,0,1)} = \alpha_{(1,1,1),(0,1,1)} = \alpha_{(1,0,1),(0,0,1)} = \alpha_{(0,1,1),(0,0,1)} \equiv 1_{\{1,\ldots,m-1\}}(n),$$

wobei $m = L - z$ gesetzt wird. Als zufälligen Gesamtzahlungsstrom erhalten wir

$$\begin{aligned} A(0) &= 0 \\ \Delta A(n) &= 1_{\{T_x \le n, T_z > n\}} + 1_{\{T_y \le n, T_z > n\}} \\ &= 1_{\{T_x \wedge T_y \le n, T_z > n\}} \quad \text{für } n < m. \end{aligned}$$

Hieraus erkennt man, daß die Halbwaisenrente äquivalent ist zu einer m-jährigen Überlebensrente an das Kind, wenn man die Eltern zu einer Person mit Restlebenszeit $T_x \wedge T_y$ zusammenfaßt.

Kapitel 4

Pensionsversicherung

In diesem Kapitel soll die Stärke des Markov-Ketten Modells bei der Beschreibung der Pensionsversicherung demonstriert werden.

4.1 Modellbeschreibung

Das Prinzip der privaten Pensionsversicherung besteht darin, daß Arbeitnehmer in eine Pensionkasse während des Arbeitslebens einzahlen, um so Anwartschaften auf Invalidität und Altersruhegeld zu erwerben. Der Versicherungsnehmer kann also in der Zeit folgende Zustände durchlaufen

$$\begin{array}{lcl} a & \cong & \text{aktive Person, Arbeitnehmer,} \\ i & \cong & \text{inaktive Person, Invalide, berufsunfähig,} \\ A & \cong & \text{Altersrentner,} \\ t & \cong & \text{tot.} \end{array}$$

Wir bezeichnen mit x das Eintrittsalter und z das Rentenalter. Üblich sind die Betrachtung von $z = 60, 63$ oder 65. Mit $m = z - x$ wird die maximale Restarbeitszeit bezeichnet. Mit Erreichen des Rentenalters wird ein Aktiver oder Invalide zum Altersrentner. Folgende Zustandsübergänge sind möglich:

Die zukünftige stochastische Zustandsentwicklung eines Aktiven kann durch eine Markov-Kette (X_n) mit Zustandsraum $E = \{a, A, i, t\}$, $P(X_0 = a) = 1$ und folgenden Übergängen beschrieben werden. Als Aktiver bezeichnen wir für $x \leq x + n \leq z - 2$

$$\begin{array}{rcl} P(X_{n+1} = t | X_n = a) & = & q^{aa}_{x+n} \quad \text{einjährige Aktivensterblichkeit} \\ P(X_{n+1} = i | X_n = a) & = & i_{x+n} \quad \text{einjährige Invalidisierungswahrscheinlichkeit} \\ P(X_{n+1} = a | X_n = a) & = & p^{aa}_{x+n} = 1 - (q^{aa}_{x+n} + i_{x+n}) \end{array}$$

und als Invalide für $x \leq x + n \leq z - 2$

$$\begin{array}{rcl} P(X_{n+1} = t | X_n = i) & = & q^{ii}_{x+n} \quad \text{einjährige Invalidensterblichkeit} \\ P(X_{n+1} = i | X_n = i) & = & p^{ii}_{x+n} = 1 - q^{ii}_{x+n} \end{array}$$

In diesem Modell gibt es also keine Reaktivierung, d.h. $P(X_{n+1} = a | X_n = i) = 0$. Ferner haben wir den Übergang zum Altersrentner als Aktiver bzw. Invalide. Für $x + n = z - 1$:

$$P(X_{n+1} = A | X_n = a) \quad = \quad p^{aa}_{z-1}$$

$$\begin{aligned} P(X_{n+1}=t|X_n=a) &= q^{aa}_{z-1} = 1-p^{aa}_{z-1} \\ P(X_{n+1}=A|X_n=i) &= p^{ii}_{z-1} \\ P(X_{n+1}=t|X_n=i) &= q^{ii}_{z-1} \end{aligned}$$

Schließlich fehlen noch die Übergange des Altersrentners für $x+n \geq z$

$$\begin{aligned} P(X_{n+1}=A|X_n=A) &= p^{A}_{x+n} \\ P(X_{n+1}=t|X_n=A) &= q^{A}_{x+n} = 1-p^{A}_{x+n} \end{aligned}$$

Die Übergangswahrscheinlichkeiten liegen vertafelt vor, so kann z.B. (i_{x+n}), (q^{aa}_{x+n}), (q^{ii}_{x+n}) aus der Richttafel von Heubeck entnommen werden. Aus einer normalen Sterbetafel entnimmt man die Sterbewahrscheinlichkeiten der Altersrentner.

Die zugrundeliegende Markov-Kette ist somit bestimmt und man erhält unterschiedliche Versicherungen durch Ausgestaltung der Leistungsfunktionen. Üblich ist die Unterscheidung in Renten und Anwartschaftsbarwerte.

4.2 Rentenbarwerte

Wir betrachten die folgenden Beispiele

- bf abgekürzte Aktivenrente
  Diese Rente wird benutzt zur Berechnung einer Prämie, die ein Aktiver während seines Arbeitslebens aufbringen muß, um andere Anwartschaften zu finanzieren. Solange man aktiv bleibt, wird eine Rente der Höhe 1 gezahlt. Dies bedeutet, daß mit Erreichen des Rentenalters die Rentenzahlung eingestellt wird. Diese Versicherung kann durch folgende nichttriviale Leistungsfunktion

  $$\mathbf{a}_a(0) = 1 \quad , \quad \Delta\mathbf{a}_a(n) = 1 \quad \text{f.a. } n \in \mathbb{N}$$

  beschrieben werden. Alle anderen Leistungsfunktionen verschwinden und man erhält den zufälligen Gesamtzahlungsstrom:

  $$\begin{aligned} A(0) &= 1 \\ \Delta A(n) &= 1_{\{X_n=a, X_{n-1}=a\}} = 1_{\{\tau_a > n\}} \end{aligned}$$

  mit $\tau_a = \inf\{k \in \mathbb{N}_0 : X_k \neq a\}$, der durch

  $$V(A) = \sum_{k=0}^{m-1} v(k) 1_{\{\tau_a > k\}}$$

  bewertet wird. Als Barwert ergibt sich also

  $$\ddot{a}^{aa}_{x:\overline{z-x}|} = EV(A) = \sum_{k=0}^{m-1} v(k) P(\tau_a > k) = \sum_{k=0}^{m-1} v(k)\, {}_k p^{aa}_x \quad . \tag{4.1}$$

  Die k-jährige Verweildauerwahrscheinlichkeit im aktiven Zustand a ergibt sich aus

  $${}_k p^{aa}_x = P(X_k = a|X_0 = a) = \prod_{l=0}^{k-1} P(X_{l+1} = a|X_l = a) = \prod_{l=0}^{k-1} p^{aa}_{x+l}$$

  Der Barwert der abgekürzten Aktivenrente entspricht also dem Barwert einer sofort beginnenden Rente der Höhe 1 abgekürzt um höchstens $z-x$ Rentenzahlungen bei modifizierten Ausscheidewahrscheinlichkeiten.

- **abgekürzte Invalidenrente**
Startend als Invalide, d.h. $P(X_0 = i) = 1$, wird solange eine Rente gezahlt, wie man Invalide bleibt. Insbesondere endet die Rentenzahlung mit dem Erreichen des Rentenalters.

  Hier wird analog zum ersten Beispiel die nichttriviale Leistungsfunktion

$$\mathbf{a}_i(0) = 1 \quad , \quad \Delta\mathbf{a}_i(n) = 1 \quad \text{f.a. } n \in \mathbb{N}$$

  eingeführt, welche mit $\tau_i = \inf\{k \in \mathbb{N}_0 : X_k \neq i\}$ den Barwert

$$\ddot{a}^i_{x:\overline{z-x}|} = \sum_{k=0}^{m-1} v(k)P(\tau_i > k) = \sum_{k=0}^{m-1} v(k)\,{}_kp^{ii}_x \quad . \tag{4.2}$$

  ergibt. Die k-järige Verweilwahrscheinlichkeit in i berechnet sich durch

$${}_kp^i_x = P(X_k = i|X_0 = i) = \prod_{l=0}^{k-1} P(X_{l+1} = i|X_l = i) = \prod_{l=0}^{k-1} p^{ii}_{x+l}$$

- **lebenslängliche Invalidenrente**
Der x-jährige Invalide erhält bis zum Rentenalter z Invalidenrente und danach Altersrente. Dies entspricht einem Zahlungsstrom mit Bewertung

$$V(A) = \sum_{k=0}^{m-1} v(k)1_{\{\tau_i > k\}} + \sum_{k=m}^{\infty} v(k)1_{\{\tau_A > k\}} \quad ,$$

  wobei $\tau_A = \inf\{k \geq m : X_k \neq A\}$. Wir erhalten also als Barwert

$$\begin{aligned} EV(A) &= \ddot{a}^i_{x:\overline{z-x}|} + v(m)\sum_{l=0}^{\infty} v(l)P(\tau_A > m+l|X_m = A)P(X_m = A|X_0 = i) \\ &= \ddot{a}^i_{x:\overline{z-x}|} + v(m)\sum_{l=0}^{\infty} v(l)\,{}_lp^A_z\,{}_{z-x}p^{ii}_x \\ &= \ddot{a}^i_{x:\overline{z-x}|} + v(m)\,{}_{z-x}p^{ii}_x\ddot{a}_z, \end{aligned} \tag{4.3}$$

  der mit $\ddot{a}^i_x$ bezeichnet wird.

4.3 Anwartschaftsbarwerte

Mit Anwartschaften werden lebenslängliche Alters- und Invalidenrenten bezeichnet. Wir geben zwei Fälle an.

4.3.1 Anwartschaft eines Aktiven auf lebenslängliche Aktivenaltersrente

Dies ist die Altersrente, die lebenslänglich im Rentenalter gezahlt wird, wenn der Aktive als Aktiver Rentner wird. Für eine Rentenhöhe vom Betrage 1 entspricht dies folgendem zufalligen Zahlungsstrom

$$A(0) \quad = \quad 0$$

$$\begin{aligned}\Delta A(n) &= 0 \quad \text{für } x+n<z \\ \Delta A(m) &= 1_{\{X_m=A,X_{m-1}=a\}} \quad , \quad m=z-x \\ \Delta A(n) &= 1_{\{X_n=A,X_{n-1}=a\}} \quad \text{für } x+n>z\end{aligned}$$

der mit

$$\Delta A(n) = 1_{\{\tau_a=m,X_m=A\}}1_{\{\tau_A>n\}}$$

übereinstimmt. Die erste Indikatorfunktion entspricht dem Ereignis, als Aktiver Rentner zu werden und die zweite als Renter das n-te Versicherungsjahr zu überleben. Man erhält also als Barwert bei konstanter Verzinsung

$$\begin{aligned}EV(A) &= \sum_{n=m}^{\infty} v(n)P(\tau_A>n,\tau_a=m,X_m=A) \\ &= \sum_{n=m}^{\infty} v(n)P(\tau_A>n|\tau_a=m,X_m=A)P(\tau_a=m,X_m=A) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} v(m+l)P(\tau_A>m+l|X_m=A)P(\tau_a=m,X_m=A) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} v(m+l)\,{}_lp_z^A\,{}_mp_x^{aa} \\ &= v(m)\,{}_mp_x^{aa}\ddot{a}_z,\end{aligned}$$

der mit ${}_{z-x|}\ddot{a}_x^{aA}$ bezeichnet wird. Er stimmt also überein mit dem abdiskontierten Barwert einer vom Rentenalter beginnenden Sofortrente multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit, als Aktiver Rentner zu werden. Ausgedrückt durch die Übergangswahrscheinlichkeiten kann letztere Wahrscheinlichkeit berechnet werden durch

$${}_{z-x}p_x^{aa} = \prod_{l=0}^{m-1} p_{x+l}^{aa} \quad .$$

4.3.2 Anwartschaft eines Aktiven auf lebenslängliche Invaliden- und Altersrente

Die wichtigste Anwartschaft ist die auf Invaliden und Altersrente. Bei der Berechnung des Barwertes werden wir feststellten, wie dieser durch Barwerte von bislang vorgestellten Versicherungen ausgedrückt werden kann. Die obige Versicherung kann durch das Markov-Ketten Modell mit zufälligem Gesamtzahlungsstrom

$$\begin{aligned}A(0) &= 0 \\ \Delta A(n) &= 1_{\{X_n=i,X_{n-1}=i\}} + 1_{\{X_n=i,X_{n-1}=a\}} + 1_{\{X_n=A\}}\end{aligned}$$

beschrieben werden. Eine Rentenzahlung am Ende des n-ten Versicherungsjahres findet also statt, wenn die Person als Invalide das n-te Jahr überlebt oder wenn sie im n-ten Jahr Invalide wird oder als Altersrentner das n-te Jahr überlebt. Formal gesehen wird dieser Zahlungsstrom bewertet durch

$$V(A) = \sum_{n=0}^{\infty} v(n)\left(1_{\{X_n=i,X_{n-1}=i\}} + 1_{\{X_n=i,X_{n-1}=a\}} + 1_{\{X_n=A\}}\right),$$

das zerlegt werden kann in

$$1_{\{\tau_a=m,X_m=A\}}\sum_{l=m}^{\infty} v(l)1_{\{\tau_A>l\}} \tag{4.4}$$

$$1_{\{\tau_a<m,X_m=A\}}\sum_{l=m}^{\infty}v(l)1_{\{\tau_A>l\}} \tag{4.5}$$

$$1_{\tau_a<m\}}\sum_{k=\tau_a}^{m-1}v(k)1_{\{\tau_i>k\}} \tag{4.6}$$

mit

$$\begin{aligned}\tau_a &= \inf\{k\geq 0 : X_k\neq a\},\\ \tau_i &= \inf\{k\geq \tau_a : X_k\neq i\},\\ \tau_A &= \inf\{k\geq m : X_k\neq A\}.\end{aligned}$$

Dem bewerteten Zahlungsstrom eines Aktiven auf lebenslängliche Aktivenaltersrente entspricht (4.4), wohingegen (4.5)+(4.6) der bewertete Zahlungsstrom der Anwartschaft eines Aktiven auf lebenslängliche Invalidenrente ist. Die Bewertung der echten Invalidenrenten wird durch (4.6) vorgenommen. Zerlegt man die lebenslängliche Invalidenrente nach dem Eintritszeitpunkt der Invalidität, so erhält man als Darstellung für (4.5) + (4.6)

$$\sum_{n=1}^{m-1}1_{\{\tau_a=n\}}\left(\sum_{k=n}^{m-1}v(k)1_{\{\tau_i>k\}}+\sum_{k=m}^{\infty}v(k)1_{\{\tau_A>k\}}\right) \tag{4.7}$$

Für den Barwert ${}_{m|}\ddot{a}_x^{ai}$ der lebenslänglichen Invalidenrente eines Aktiven mit Eintrittsalter x erhält man also bei konstanter Verzinsung

$$\begin{aligned}{}_{m|}\ddot{a}_x^{ai} &= \sum_{n=1}^{m-1}\left(\sum_{k=n}^{m-1}v(k)P(\tau_i>k,\tau_a=n)+\sum_{k=m}^{\infty}v(k)P(\tau_a>k,\tau_a=n)\right)\\
&= \sum_{n=1}^{m-1}v(n)P(\tau_a=n,X_n=i)\times\\
&\qquad\times[\sum_{l=0}^{m-1-n}v^lP(\tau_i>n+l|\tau_a=n,X_n=i)+\\
&\qquad\quad+\sum_{l=m-n}^{\infty}v^lP(\tau_A>n+l|\tau_a=n,X_n=i)]\\
&= \sum_{n=1}^{m-1}v^nP(\tau_a=n,X_n=i)\times\\
&\qquad\times\left(\sum_{l=0}^{m-1-n}v^l\,{}_lp_{x+n}^{ii}+v^{m-n}\sum_{k=0}^{\infty}v^kP(\tau_A>m+k|\tau_a=n,X_n=i)\right)\\
&= \sum_{n=1}^{m-1}v^n\,{}_{n-1}p_x^{aa}i_{x+n-1}\left(\ddot{a}^i_{x+n:z-(x+n)\rceil}+v^{m-n}\,{}_{m-n}p_{x+n}^{ii}\ddot{a}_z\right)\\
&= \sum_{n=1}^{m-1}v^n\,{}_{n-1}p_x^{aa}i_{x+n-1}\ddot{a}^i_{x+n},\end{aligned} \tag{4.8}$$

so daß insgesamt der Barwert ${}_{m|}\ddot{a}_x^{aiA}$ der Anwartschaft eines Aktiven auf lebenslängliche Invaliden und Altersrente durch die Beziehung

$${}_{m|}\ddot{a}_x^{aiA}={}_{m|}\ddot{a}_x^{aA}+\sum_{n=1}^{m-1}v^n\,{}_{n-1}p_x^{aa}i_{x+n-1}\ddot{a}^i_{x+n} \tag{4.9}$$

gegeben ist.

Kapitel 5

Witwenanwartschaft

Wir wollen das Modell der Pensionsversicherung des vorigen Kapitels erweitern, so daß eine Witwen- bzw. Witwerversorgung eingeschlossen wird. Hierzu stellen wir drei Methoden vor.

5.1 Individualmethode

Wir betrachten einen Hauptversicherter mit Ehepartner und Eintrittsalter

x	Hauptversicherter
y	Ehepartner
z	Rentenalter

und definieren das erweiterte Markov-Ketten Modell mit den Zuständen

$$\begin{array}{lcl} a & \cong & \text{(x) ist aktiv, (y) lebt,} \\ i & \cong & \text{(x) ist invalide, (y) lebt,} \\ A & \cong & \text{(x) ist Altersrentner, (y) lebt,} \\ w & \cong & \text{(x) ist tot, (y) lebt} \\ t & \cong & \text{(y) ist tot.} \end{array}$$

Mit diesem Modell sollen Witwenanwartschaften berechnet werden. Mit dem Tod des Ehepartners endet daher jede Leistung. Deshalb ist der Tod des Ehehpartners als Todeszustand zu interpretieren und nicht der Tod des Hauptversicherten. Wir haben folgende Zustandsübergänge mit Übergangswahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = w | X_n = a) &= q^{aa}_{x+n} p^{(2)}_{y+n} \\ P(X_{n+1} = i | X_n = a) &= i_{x+n} p^{(2)}_{y+n} \\ P(X_{n+1} = t | X_n = a) &= q^{(2)}_{y+n} \\ P(X_{n+1} = a | X_n = a) &= p^{aa}_{x+n} p^{(2)}_{y+n} \end{aligned}$$

als Aktiver. Als Invalide hat man die folgenden Übergänge für $0 \leq n \leq m-2$

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = i | X_n = i) &= p^{ii}_{x+n} p^{(2)}_{y+n} \\ P(X_{n+1} = w | X_n = i) &= q^{ii}_{x+n} p^{(2)}_{y+n} \end{aligned}$$

$$P(X_{n+1} = t | X_n = i) \quad = \quad q^{(2)}_{y+n} \quad .$$

Zum Altersrentner führen die Übergänge

$$\begin{aligned}
P(X_m = A | X_{m-1} = i) &= p^{ii}_{z-1} p^{(2)}_{y+m-1} \\
P(X_m = A | X_{m-1} = a) &= p^{aa}_{z-1} p^{(2)}_{y+m-1} \\
P(X_m = w | X_{m-1} = i) &= q^{ii}_{z-1} p^{(2)}_{y+m-1} \\
P(X_m = w | X_{m-1} = a) &= q^{aa}_{z-1} p^{(2)}_{y+m-1} \\
P(X_m = t | X_{m-1} = i) &= q^{(2)}_{y+m-1} \\
P(X_m = t | X_{m-1} = a) &= q^{(2)}_{y+m-1}
\end{aligned}$$

und als Witwe

$$\begin{aligned}
P(X_{n+1} = w | X_n = w) &= p^{(2)}_{y+n} \\
P(X_{n+1} = t | X_n = w) &= q^{(2)}_{y+n}
\end{aligned}$$

Schließlich als Altersrentner hat man für $n \geq m$

$$\begin{aligned}
P(X_{n+1} = A | X_n = A) &= p^{A}_{x+n} p^{(2)}_{y+n} \\
P(X_{n+1} = w | X_n = A) &= q^{A}_{x+n} p^{(2)}_{y+n} \\
P(X_{n+1} = t | X_n = A) &= q^{(2)}_{y+n}
\end{aligned}$$

Schließlich ist der Todeszustand absorbierend, was durch $P(X_{n+1} = t | X_n = t) = 1$ für alle n ausgedrückt wird.

Zusätzlich zu den einjährigen Aktiven-bzw Invalidensterblichkeiten, Invalidisierungswahrscheinlichkeiten sind also noch die einjährigen Sterbewahrscheinlichkeiten des Ehepartners aus einer normalen Sterbetafel zu entnehmen.

Wir wollen als Beispiel die Witwenanwartschaft, also die Anwartschaft eines Aktiven auf Witwenrente betrachten und deren Barwert berechnen. Wir gehen von einem x-jährigen Aktiven aus und bezahlen nach dessen Tod eine Rente an eine überlebende Witwe. Dies entspricht einer Personenversicherung mit Zahlungsstrom

$$\begin{aligned}
A(0) &= 0 \\
\Delta A(n) &= 1_{\{X_n = w, X_{n-1} = w\}} + 1_{\{X_n = w, X_{n-1} = a\}} + 1_{\{X_n = w, X_{n-1} = i\}} + 1_{\{X_n = w, X_{n-1} = A\}}
\end{aligned}$$

für $n \in \mathbb{N}$, der auch durch

$$\Delta A(n) = 1_{\{\sigma_w \leq n, \sigma_t > n\}}$$

für $n \in \mathbb{N}$ ausgedrückt werden kann mit

$$\begin{aligned}
\sigma_w &= \inf\{k \in \mathbb{N}_0 : X_k = w\} \\
\sigma_t &= \inf\{k \in \mathbb{N}_0 : X_k = t\} \quad .
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir als Barwert

$$\ddot{a}^{aw}_x = \sum_{n=0}^{\infty} v(n) P(\sigma_w \leq n, \sigma_t > n) \quad . \tag{5.1}$$

Bei konstanter Verzinsung gilt

$$\ddot{a}^{aw}_x \quad = \quad \sum_{n=1}^{\infty} v^n P(\sigma_w \leq n, \sigma_t > n)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} v^n P(\sigma_w = k, \sigma_t > n) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty} v^n P(\sigma_t > n|\sigma_w = k)P(\sigma_w = k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} v^{l+k} P(\sigma_t > k+l|\sigma_w = k)P(\sigma_w = k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} v^k \sum_{l=0}^{\infty} P(X_{k+l} = w|X_k = w)P(\sigma_w = k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} v^k \sum_{l=0}^{\infty} {}_lp_{y+k}^{(2)} P(\sigma_w = k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} v^k P(\sigma_w = k)\ddot{a}_{y+k}
\end{aligned}$$

Es ist also zu summieren über die abdiskontierten Barwerte einer Sofortrente einer $y+k$-jährigen Witwe,die im k-ten Versicherungsjahr verwitwet. Zu expliziten Bestimmung des Barwertes ist $P(\sigma_w = k)$ aus den Übergangswahrscheinlichkeiten zu bestimmen. Wir unterscheiden zwei Fälle. Für $1 \leq k \leq m$ gilt

$$\begin{aligned}
P(\sigma_w = k) &= \sum_{l=1}^{k} P(\sigma_w = k, \tau_a = l) \\
&= P(\sigma_w = k, \tau_a = k) + \sum_{l=1}^{k-1} P(\sigma_w = k, \tau_a = l, X_l = i) \\
&= {}_kp_y^{(2)} \left({}_{k-1}p_x^{aa} q_{x+k-1}^{aa} + \sum_{l=1}^{k-1} {}_{k-1-l}p_{x+l}^{ii} q_{x+k-1}^{ii} i_{x+l-1}\, {}_{l-1}p_x^{aa} \right)
\end{aligned}$$

und für $k > m$

$$\begin{aligned}
P(\sigma_w = k) &= P(\sigma_w = k, X_m = A) \\
&= P(X_k = w, X_{k-1} = A, \ldots, X_m = A) \\
&= P(X_k = w, X_{k-1} = A, \ldots, X_{m+1} = A|X_m = A)P(X_m = A) \\
&= {}_{k-m}p_{y+m}^{(2)}\, {}_{k-1-m}p_z^A q_{x+k-1}^A P(X_m = A) \quad ,
\end{aligned}$$

so daß schließlich nur noch festzustellen ist

$$\begin{aligned}
P(X_m = A) &= P(X_m = A, \tau_a = m) + \sum_{l=1}^{m-1} P(X_m = A, \tau_a = l) \\
&= {}_mp_y^{(2)} \left({}_mp_x^{aa} + \sum_{l=1}^{m-1} {}_{m-l}p_{x+l}^{ii} i_{x+l-1}\, {}_{l-1}p_x^{aa} \right) \quad .
\end{aligned}$$

5.2 kollektive Methode

Der Nachteil der Individualmethode ist, daß schon bei Vertragsabschluß ein Ehepartner vorhanden sein muß, dessen Eintrittsalter ebenfalls bei Vertragsabschluß festgesetzt wird. Häufig besteht aber auch der Wunsch, daß ein nach Vertragsabschluß hinzukommender Ehepartner auch ein Anspruch auf Witwenrente erhalten soll. Deshalb wird die kollektive Methode eingeführt, die erst bei Tod des Haupversicherten überprüft, ob eine versorgungsberechtigte Witwe existiert. Alle Hauptversicherten gleichen Alters und Geschlechts bilden ein Kollektiv und werden gleich behandelt unabhängig von ihrem Ehestatus. Für ein sinvolles Modell notieren wir.

x	Eintrittsalter des Hauptversicherter
x_0	kleinstmögliche Eintrittsalter eines Hauptversicherten
y_0	kleinstmögliche Verwitwungsalter
y_1	größtmögliche Verwitwungsalter
z	Rentenalter

Häufig werden gesetzt $x_0 = 20, y_0 = 20, y_1 = 110$. Die Zuständen a, i, A, t werden wie im vorigen Abschnitt interpretiert, wohingegen der Witwenzustand differenziert wird in

$$l \quad , wd_0, \ldots, wd_L \quad . \tag{5.2}$$

Der Zustand l tritt ein, wenn der Haupversicherte stirbt, ohne eine Witwe zu hinterlassen. Beträgt die Altersdifferenz zwischen Partner und Witwe d_i Jahre, so tritt bei Tod des Hauptversicherten der Zustand wd_i ein. d_i variiert zwischen der kleinstmöglichen $d_0 = x_0 - y_1$ und der größtmöglichen Altersdifferenz $d_L = \omega_0 - 1 - y_0$, wobei ω_0 das erreichbare Höchstalter eines Hauptversicherten bezeichnet. Man hat etwa eine Spanne von -90 bis $+80$.

Die Übergangswahrscheinlichkeiten von a nach i, a nach A , i nach A werden mit Hilfe von $(q^{aa}_{x+n}), (q^{ii}_{x+n}), (i_{x+n}), (q^{A}_{z+n})$ wie in 5.1 definiert. Für die Übergänge in einen Witwenzustand setzt man

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = wd_i | X_n = a) &= q^{aa}_{x+n} h_{x+n,x+n-d_i} \\ P(X_{n+1} = wd_i | X_n = i) &= q^{ii}_{x+n} h_{x+n,x+n-d_i} \\ P(X_{n+1} = wd_i | X_n = A) &= q^{A}_{x+n} h_{x+n,x+n-d_i} \end{aligned}$$

für $0 \leq i \leq L$. Dabei ist für jedes Alter u eines Hauptversicherten und y einer Witwe $h_{u,y}$ die bedingte Wahrscheinlichkeit eines Hauptversicherten des Alters u eine Witwe des Alters y zu hinterlassen - gegeben daß er im nächsten Jahr verstirbt. Wir nehmen an, daß diese bedingte Wahrscheinlichkeit unabhängig vom Zustand des Hauptversicherten, ob aktiv, invalid oder Altersrentner, ist.

Die Wahrscheinlichkeit, beim Tode des Haupversicherten im Alter u verheiratet zu sein, also eine Witwe zu hinterlassen, ist gegeben durch

$$h_u = \sum_{y=y_0}^{y_1} h_{u,y} \quad .$$

Deshalb gibt man für den Übergang nach l an

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = l | X_n = a) &= q^{aa}_{x+n}(1 - h_{x+n}) \\ P(X_{n+1} = l | X_n = i) &= q^{ii}_{x+n}(1 - h_{x+n}) \\ P(X_{n+1} = l | X_n = A) &= q^{A}_{x+n}(1 - h_{x+n}) \quad . \end{aligned}$$

Schließlich setzt man für die Übergänge von wd_i nach t an

$$P(X_{n+1} = t | X_n = wd_i) = q_{x+n-d_i} \quad ,$$

welches die Sterbewahrscheinlichkeit einer Witwe des Alters $x + n - d_i$ ist. Damit ist das Modell vollständig spezifizert und Barwerte und können wie im vorigen Abschnitt berechnet werden.

5.3 vereinfachte Kollektivmethode

Das Problem der Kollektivmethode besteht darin, daß die Wahrscheinlichkeiten $h_{u,y}$ nicht genau genug zu schätzen sind. Deshalb ersetzt man die verschieden möglichen Witwenalter durch ein einziges Witwenalter. Naheliegend ist das mittlere Witwenalter. Für ein Alter u des Haupversicherten setze

$$\mu(u) = \frac{1}{h_u} \sum_{y=y_0}^{y_1} y h(u,y) \quad ,$$

welches das bedingt erwartete Witwenalter ist - gegeben, das ein Hauptversicherter des Alters u im nächsten Jahr stirbt und eine Witwe hinterläßt. Die nächste ganze Zahl $y(u)$ zu $\mu(u)$

$$y(u) = \begin{cases} \mu(u) & \text{, falls } \mu(u) - \mu(u) < \frac{1}{2} \\ \mu(u) + 1 & \text{, sonst} \end{cases}$$

Wir können jetzt das vereinfachte kollektive Modell folgendermaßen beschreiben. Stirbt der Hauptversicherte im Alter u als Aktiver, hinterläßt er eine Witwe mit Wahrscheinlichkeit h_u. Diese ist dann $y(u)$ Jahre alt, was eine Altersdifferenz von $\delta(u) = u - y(u)$ impliziert. Im Unterschied zur kollektiven Methode springt die Kette dann in $w\delta(u)$ mit Wahrscheinlichkeit $h_u q_u^{aa}$ oder in l mit Wahrscheinlichkeit $(1 - h_u)q_u^{aa}$. Dies führt zu den Übergängen

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = w\delta(x+n) | X_n = a) &= q_{x+n}^{aa} h_{x+n} \\ P(X_{n+1} = l | X_n = a) &= q_{x+n}^{aa}(1 - h_{x+n}) \\ P(X_{n+1} = wd_i | X_n = a) &= 0 \text{sonst.} \end{aligned}$$

Eine analoge Argumentation führt man durch, wenn der Hauptversicherte als Invalide oder Altersrentner stirbt. Man hat also ein kollektives Modell mit nur einem nichttrivialen Witwenübergang. In diesem vereinfachten Modell sind statistisch $h_u, \mu(u)$ zu schätzen für jedes Alter u. Natürliche Schätzer sind

$$\frac{\#\text{ verheirateten } u\text{-jährigen Toten}}{\#\, u\text{-jährigen Toten}}$$

für h_u, sowie das empirische Mittel der Witwen der u-jährigen Toten für $\mu(u)$.

Kapitel 6

Deckungskapital

In diesem Kapitel soll der Begriff des Deckungskapitals für allgemeine Personenversicherungen eingeführt werden. Dieser gibt die zeitliche Veränderung des Barwertes einer Personenversicherung an, was als Preisentwicklung eines Versicherungsvertrages interpretiert werden kann. Es werden die Thieleschen Rekursionsgleichungen vorgestellt, die schnelle Berechnungsmöglichkeiten liefern.

6.1 Thielesche Rekursionsgleichung

Im folgenden sei

$$((X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}, (a_i)_{i\in E}, (\alpha_{i,j})_{i\neq j})$$

eine (allgemeine) Personenversicherung mit existierendem Barwert. Dies bedeutet, daß (X_n) eine Markov-Kette auf einem endlichen Zustandsraum E bezeichnet, (a_i), $(\alpha_{i,j})$ Versicherungsleistungsfunktionen sind, siehe (3.4.4). Die Versicherung induziert zufällige Zahlungsströme $(A_i), (A_{i,j})$ definiert durch

$$\begin{aligned} A_i(0) = a_i(0) \quad &, \quad \Delta A_i(n) = 1_{\{X_n=i, X_{n-1}=i\}} \Delta a_i(n) \\ A_{i,j}(0) = 0 \quad &, \quad \Delta A_{i,j}(n) = \alpha_{i,j}(n) \Delta N_{i,j}(n) \end{aligned} \tag{6.1}$$

Der zufällige Gesamtzahlungsstrom ist dann gegeben durch

$$A = \sum_{i\in E} A_i + \sum_{i\neq j} A_{i,j} \quad .$$

Für $m \in N_0$ wird zur Definition des prospektiven Deckungskapitals nur Zahlungen nach m betrachtet. Wichtig ist zu entscheiden, welche Zahlungen in m als zukünftige und welche als vergangene Leistungen anzusehen sind. In unserem Ansatz sind Erlebensfallleistungen, die durch Verweilen in einem Zustand verursacht werden, als zuküntige Zahlung zu interpretieren, da sie vorschüßig für die kommende Periode anzusehen sind. Todesfallleistungen, also Zahlungen verursacht durch einen Zustandswechsel, sind als vergangene Leistung zu interpretieren, da sie nachschüßig für die vergangene Periode stehen.

Wir definieren für $i \in E$

$$V_i(m) = K(m) \left(\Delta a_i(m) v(m) 1_{\{X_m=i\}} + \sum_{k=m+1}^{\infty} v(k) \Delta A_i(k) \right)$$

$$= \Delta a_i(m) 1_{\{X_m=i\}} + K(m) \sum_{k=m+1}^{\infty} v(k) \Delta A_i(k) \tag{6.2}$$

und für $i \neq j$

$$V_{i,j}(m) = K(m) \sum_{k=m+1}^{\infty} v(k) \Delta A_{i,j}(k) \quad . \tag{6.3}$$

Die Bewertung der zufälligen Leistungen nach m, diskontiert auf das Ende der m-ten Periode, wird also beschrieben durch

$$V(m) = \sum_{i \in E} V_i + \sum_{i \neq j} V_{i,j} \quad . \tag{6.4}$$

Dies wird benutzt zur Definition des Deckungskapitals als bedingter Erwartungswert - gegeben, daß die Markov-Kette im Zustand i ist. Bemerken wollen wir noch, daß zwischen $V(m)$ und dem zufälligen Gesamtzahlungsstrom nach m folgender Zusammenhang besteht.

$$V(m) 1_{\{X_m=i\}} = \Delta a_i(m) 1_{\{X_m=i\}} + \sum_{l=m+1}^{\infty} v(l) \Delta A(l) 1_{\{X_m=i\}} \quad . \tag{6.5}$$

6.1.1 Definition: *Für $m \in \mathbb{N}_0, i \in E$ wird das Deckungskapital $Dk_i(m)$ definiert durch*

$$Dk_i(m) = E(V(m) | X_m = i) \quad .$$

Mittels (6.4) ergibt sich also

$$Dk_i(m) = \sum_{j \in E} E(V_j(m) | X_m = i) + \sum_{k \neq l} E(V_{kl}(m) | X_m = i) \quad . \tag{6.6}$$

6.1.2 Beispiel

Als Beispiel betrachten wir die lebenslängliche Todesfallversicherung auf ein Leben, siehe (3.4.3), welche einer Personenversicherung

$$((X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, (a_i)_{i \in E}, (\alpha_{i,j})_{i \neq j})$$

mit Markov-Kette (X_n) auf dem Zustandsraum $E = \{0, 1\}$ und Übergangen

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 1 | X_n = 1) &= p_{x+n} \\ P(X_{n+1} = 0 X_n = 1) &= q_{x+n} \\ P(X_{n+1} = 0 | X_n = 0) &= 1 \end{aligned}$$

entspricht. Die nichttrivialen Versicherungsleistungsfunktionen sind gegeben durch

$$a_1(n) = -(n+1)p \quad , \quad a_{1,0}(n) = 1 \quad \text{f.a. } n \in \mathbb{N}_0$$

Dann ist

$$A_1(0) = -p \quad , \quad \Delta A_1(n) = -p 1_{\{X_n=1\}}$$

$$A_{1,0}(0) = 0 \quad , \quad \Delta A_{1,0}(n) = 1_{\{X_n=0, X_{n-1}=1\}}$$

Für $m \in \mathbb{N}_0$ also

$$\begin{aligned} V_0(m) &\equiv 0 \\ V_1(m) &= -\sum_{k=m}^{\infty} v^{k-m} p 1_{\{X_k=1\}} \\ V_{1,0}(m) &= \sum_{k=m+1}^{\infty} v^{k-m} 1_{\{X_k=0, X_{k-1}=1\}} \end{aligned}$$

und damit

$$V(m) = \sum_{k=m+1}^{\infty} v^{k-m} 1_{\{X_k=0, X_{k-1}=1\}} - \sum_{k=m}^{\infty} v^{k-m} p 1_{\{X_k=1\}}$$

Somit folgt für das Deckungskapitals des Lebendzustandes

$$\begin{aligned} Dk_1(m) &= E(V(m)|X_m = 1) \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} v^l P(X_{m+l} = 0, X_{m+l-1} = 1|X_m = 1) - p \sum_{l=0}^{\infty} v^l P(X_{m+l} = 1|X_m = 1) \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} v^l \,{}_{l-1}p_{x+m} q_{x+m+l-1} - p \sum_{l=0}^{\infty} v^l \,{}_l p_{x+m} \\ &= A_{x+m} - p\ddot{a}_{x+m} \end{aligned}$$

Wir wollen im folgenden das Deckungskapital mit Hilfe der Übergangswahrscheinlichkeiten der Markov-Kette ausdrücken, welches eine prinzipielle Berechnungsmöglichkeit impliziert.

6.1.3 Lemma: *Sei $m \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt für alle Zustände $i, j \in E$ mit $i \neq j, k \in E$*

$$\begin{aligned} E(V_j(m)|X_m = k) &= \Delta a_k(m) 1_{\{k\}}(j) + \\ &\quad + K(m) \sum_{l=m+1}^{\infty} \Delta a_j(l) v(l) P(X_l = j, X_{l-1} = j|X_m = k) \quad (6.7) \end{aligned}$$

$$E(V_{i,j}(m)|X_m = k) = K(m) \sum_{l=m+1}^{\infty} v(l) \alpha_{i,j}(l) P(X_l = j, X_{l-1} = i|X_m = k) \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned} Dk_k(m) &= a_k(m) + K(m) \sum_{l=m+1}^{\infty} v(l) \sum_{i \in E} P(X_{l-1} = i|X_m = k) \times \\ &\quad \times \left(P(X_l = i|X_{l-1} = i) \Delta a_i(l) + \sum_{j \in E, j \neq i} P(X_l = j|X_{l-1} = i) \alpha_{i,j}(l) \right) (6.9) \end{aligned}$$

Beweis: Die Formel (6.7) folgt sofort aus (6.2), da $P(X_m = j|X_m = k) = 1_{\{k\}}(m)$. Analog ergibt sich (6.8) aus (6.3). Der Nachweis von (6.9) ergibt sich aus

$$Dk_k(m) = \sum_{i \in E} E(V_i(m)|X_m = k) + \sum_{i \neq j} E(V_{i,j}(m)|X_m = k)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i\in E, i\neq k}\sum_{l=m+1}^{\infty} v(l)P(X_l = i, X_{l-1} = i|X_m = k)\Delta a_i(l)+ \\
&\quad +\Delta a_k(m) + \sum_{l=m+1}^{\infty} v(l)P(X_l = k, X_{l-1} = k|X_m = k)\Delta a_k(l)+ \\
&\quad +\sum_{i\in E}\sum_{j\neq i}\sum_{l=m+1}^{\infty} v(l)P(X_l = j, X_{l-1} = i|X_m = k)\alpha_{i,j}(l) \\
&= \Delta a_k(m) + \sum_{l=m+1}^{\infty}\sum_{i\in E} P(X_{l-1} = i|X_m = k)\times \\
&\qquad \times\left(P(X_l = i|X_{l-1} = i)\Delta a_i(l) + \sum_{j\neq i} P(X_l = j|X_{l-1} = i)\alpha_{i,j}(l)\right)
\end{aligned}$$

□

Somit haben wir das Deckungskapital durch die Übergangswahrscheinlichkeiten der Markov-Kette ausgedrückt. Zur effizienten Berechnung wird im folgenden die sogenannte Thielesche Rekursionsgleichung hergeleitet.

6.1.4 Satz: *Für alle $m \in \mathbb{N}_0$ und Zustände $i \in E$ gilt*

$$\begin{aligned}
Dk_i(m) &= \Delta a_i(m) + \frac{v(m+1)}{v(m)}\sum_{j\neq i} p_{i,j}(m, m+1)(\alpha_{i,j}(m+1) + Dk_j(m+1) - \Delta a_j(m+1)) \\
&\quad +\frac{v(m+1)}{v(m)} p_{i,i}(m, m+1)Dk_i(m+1) \quad ,
\end{aligned}$$

wobei $p_{i,j}(m, m+1) = P(X_{m+1} = j|X_m = i)$ für alle i, j .

Beweis: Wir zeigen zunächst

$$\begin{aligned}
V(m)1_{\{X_m=i\}} &= \Delta a_i(m)1_{\{X_m=i\}} \\
&\quad +\frac{v(m+1)}{v(m)}\sum_{j\neq i}(\alpha_{i,j}(m+1) + V(m+1) - \Delta a_j(m+1))1_{\{X_{m+1}=j, X_m=i\}} \\
&\quad +\frac{v(m+1)}{v(m)}V(m+1)1_{\{X_{m+1}=i, X_m=i\}} \quad . \qquad (6.10)
\end{aligned}$$

Dies folgt wegen (6.5) durch

$$\begin{aligned}
V(m)1_{\{X_m=i\}} &= \Delta a_i(m)1_{\{X_m=i\}} + \sum_{j\in E, j\neq i} K(m)\sum_{l=m+1}^{\infty} v(l)\Delta A(l)1_{\{X_m=i, X_{m+1}=j\}} \\
&\quad +K(m)\sum_{l=m+1}^{\infty} v(l)\Delta A(l)1_{\{X_m=i, X_{m+1}=i\}} \\
&= \Delta a_i(m)1_{\{X_m=i\}}+ \\
&\quad +\sum_{j\in E, j\neq i}\left(\frac{v(m+1)}{v(m)}\alpha_{i,j}(m+1) + \sum_{l=m+2}^{\infty}\frac{v(l)}{v(m)}\Delta A(l)\right)1_{\{X_m=i, X_{m+1}=j\}}+ \\
&\quad +\left(\frac{v(m+1)}{v(m)}\Delta a_i(m+1) + \sum_{l=m+2}^{\infty}\frac{v(l)}{v(m)}\Delta A(l)\right)1_{\{X_m=i, X_{m+1}=i\}} \\
&= \Delta a_i(m)1_{\{X_m=i\}}+ \\
&\quad +\sum_{j\in E, j\neq i}\frac{v(m+1)}{v(m)}\left(\alpha_{i,j}(m+1) - \Delta a_j(m+1) + V(m+1)\right)1_{\{X_m=i, X_{m+1}=j\}}
\end{aligned}$$

$$+\frac{v(m+1)}{v(m)}V(m+1)1_{\{X_m=i,X_{m+1}=i\}}$$

Durch Erwartungswertbildung folgt die Behauptung:

$$\begin{aligned}
Dk_i(m) &= E(V(m)|X_m=i) \\
&= E(V(m)1_{\{X_m=i\}}|X_m=i) \\
&= E(\Delta a_i(m)1_{\{X_m=i\}}|X_m=i) + \frac{v(m+1)}{v(m)}E(V(m+1)|X_m=i)P(X_{m+1}=i|X_m=i)+ \\
&\quad + \sum_{j\in E, j\neq i}\frac{v(m+1)}{v(m)}E\Big(\left(\alpha_{i,j}(m+1)-\Delta a_j(m+1)+V(m+1)\right)1_{\{X_m=i,X_{m+1}=j\}}|X_m=i\Big) \\
&= \Delta a_i(m) + \frac{v(m+1)}{v(m)}Dk_i(m+1)p_{i,i}(m,m+1)+ \\
&\quad +\frac{v(m+1)}{v(m)}\sum_{j\neq i}\left(\alpha_{i,j}(m+1)-\Delta a_j(m+1)+Dk_j(m+1)\right)p_{i,j}(m,m+1)
\end{aligned}$$

Die Thielesche Rekursionsgleichung kann zur effizienten Berechnung des Deckungskapitals benutzt werden. Sie ist eine Rückwärtsrekursion, da in der Zeit rückwärts von Periode zu Periode das Deckungskapital berechnet wird. Hierzu benötigt man eine Endbedingung, die in der Regel dadurch gegeben ist, daß Personenversicherungen häufig nur eine endliche Laufzeit haben. Wir betrachten folgende

6.1.5 Beispiele

- **lebenslängliche Sofortrente**
  Ausgehend von einem Eintrittsalter x betrachten wir eine Versicherung auf ein unter einem Risiko stehendes Leben. Wir betrachten also eine Markov-Kette (X_n) auf $\{0,1\}$, deren Übergangswahrscheinlichkeiten durch die einjährigen Sterbe-bzw. Überlebenswahrscheinlichkeiten gegeben sind. Die nichttriviale Leistungsfunktionen der Rentenversicherung ist gegeben durch die Rentenhöhen

  $$a_1(0)=r(0) \quad , \quad \Delta a_1(n)=r(n) \quad .$$

  Aus der maximalen Restlebenszeit von N Jahren, die durch $q_{x+N}=0$ gegeben ist, erhalten wir die Endbedingung für das Deckungskapital

  $$Dk_1(N)=r(N) \quad , \quad Dk_0(N)=0 \quad .$$

  Weiter für $m<N$ wegen $P(X_{m+1}=1|X_m=0)=0$

  $$\begin{aligned}
  Dk_0(m) &= \Delta a_0(m)+\frac{v(m+1)}{v(m)}Dk_0(m+1) \\
  &= \frac{v(m+1)}{v(m)}Dk_0(m+1)=0
  \end{aligned}$$

  sowie

  $$\begin{aligned}
  Dk_1(m) &= \Delta a_1(m)+\frac{v(m+1)}{v(m)}p_{1,1}(m,m+1)Dk_1(m+1) \\
  &= r(m)+\frac{v(m+1)}{v(m)}p_{x+m}Dk_1(m+1) \quad .
  \end{aligned}$$

  Die Rekursionsgleichung kann explizit aufgelöst werden und man erhält für $m<N$

  $$Dk_1(m)=\frac{1}{v(m)}\sum_{k=0}^{N-m}r(m+k)v(m+k)\,{}_kp_{x+m} \quad .$$

- **gemischte Versicherung** Wir haben eine Laufzeit von N Jahren und die Todesfallleistungen $(t(n))$, die am Ende des n-ten Versicherungsjahres gezahlt werden. Bei Überleben wird die Versicherungssumme M fällig. Vorschüßig wird am Anfang jedes Versicherungsjahres eine Prämie entsprechend $(r(n))_{n=0,\dots,N-1}$. Als Randbedingung für das Deckungskapital gilt

$$Dk_1(N+1) = 0 = Dk_0(N+1) \quad , \quad Dk_1(N) = \Delta a_1(N) = M.$$

Thielesche Rekursionsgleichung liefert:

$$Dk_0(m) = \Delta a_0(m) + \frac{v(m+1)}{v(m)} Dk_0(m+1) = 0 \quad ,$$

da $a_0 \equiv 0$. Ferner

$$\begin{aligned} Dk_1(m) &= \Delta a_1(m) + \frac{v(m+1)}{v(m)} (q_{x+m}(\alpha_{1,0}(m+1) - \Delta a_0(m+1) + Dk_0(m+1)) + \\ &\qquad p_{x+m} Dk_1(m+1)) \\ &= -r(m) + \frac{v(m+1)}{v(m)} (q_{x+m} t(m+1) + p_{x+m} Dk_1(m+1)) \end{aligned}$$

Diese Rekursionsgleichung kann wieder explizit aufgelöst werden.

- **ein Leben unter mehreren konkurrierenden Risiken**
Wir betrachten eine allgemeine Todsfallversicherung entsprechend Beispiel (3.5), der eine zufällige Verweildauer T zugrundeliegt, die $P(T > N+1) = 0$ erfüllt. Damit ergibt sich als Randbedingung

$$Dk_1(N+1) = 0 \quad , \quad Dk_u(N+1) = 0 \text{ f.a. } u \in U.$$

Die Thielesche Rekursionsgleichung liefert für $m \leq N, u \in U$

$$Dk_u(m) = \Delta a_u(m) + \frac{v(m+1)}{v(m)} P(X_{m+1} = u | X_m = u) Dk_u(m+1) = 0$$

sowie

$$\begin{aligned} Dk_1(m) &= \Delta a_1(m) + \sum_{u \in U} \frac{v(m+1)}{v(m)} P(X_{m+1} = u | X_m = 1) t_u(m+1) + \\ &\quad + P(X_{m+1} = 1 | X_m = 1) Dk_1(m+1) \end{aligned}$$

- **Verbindungsrente auf zwei Leben**
Diese ist in (3.6.1) eingeführt worden. Sei N_1 und N_2 die maximalen Restlebenszeiten der ersten und zweiten Person, d.h.

$$q^{(1)}_{x+N_1} = 1 = q^{(2)}_{y+N_2} \quad .$$

Für $N = \max\{N_1, N_2\}$ ergibt sich also als Randbedingung

$$Dk_i(N+1) = 0 \quad \text{f.a. } i \in E$$

Für $m \leq N$ gilt $Dk_{(0,0)}(m) = 0$ wie bei den vorherigen Beispielen. Zunächst müssen die Zustände $(1,0)$, $(0,1)$ untersucht werden. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
& Dk_{(1,0)}(m) \\
= \;& \Delta a_{(1,0)}(m) + \frac{v(m+1)}{v(m)} p^{(1)}_{x+m} Dk_{(1,0)}(m+1) + \\
& + \frac{v(m+1)}{v(m)} q^{(1)}_{x+m} (\alpha_{(1,0),(0,0)}(m+1) - \Delta\alpha_{(0,0)}(m+1) + Dk_{(0,0)}(m+1)),
\end{aligned}$$

welche der Rekursionsgleichung einer Sofortrente entspricht sowie

$$\begin{aligned}
Dk_{(0,1)}(m) &= \Delta a_{(0,1)}(m) + \frac{v(m+1)}{v(m)} p^{(2)}_{y+m} Dk_{(0,1)}(m+1) \\
&= 1 + \frac{v(m+1)}{v(m)} p^{(2)}_{y+m} Dk_{(0,1)}(m+1) \quad .
\end{aligned}$$

Angewendet werden kann dies zur Berechnung von $Dk_{(1,1)}(m)$ mittels

$$\begin{aligned}
& Dk_{(1,1)}(m) \\
= \;& \Delta a_{(1,1)}(m) + \frac{v(m+1)}{v(m)} p^{(2)}_{x+m} p^{(2)}_{y+m} Dk_{(1,1)}(m+1) + \\
& + \frac{v(m+1)}{v(m)} p^{(1)}_{x+m} q^{(2)}_{y+m} (\alpha_{(1,1),(1,0)}(m+1) - \Delta a_{(1,0)}(m+1) + Dk_{(1,0)}(m+1)) + \\
& + \frac{v(m+1)}{v(m)} p^{(2)}_{x+m} q^{(1)}_{y+m} (\alpha_{(1,1),(0,1)}(m+1) - \Delta a_{(0,1)}(m+1) + Dk_{(0,1)}(m+1)) \\
= \;& \Delta a_{(1,1)}(m) + \frac{v(m+1)}{v(m)} (p^{(1)}_{x+m} q^{(2)}_{y+m} Dk_{(1,0)}(m+1) + p^{(2)}_{x+m} q^{(1)}_{y+m} Dk_{(0,1)}(m+1)) + \\
& + \frac{v(m+1)}{v(m)} p^{(2)}_{x+m} p^{(2)}_{y+m} Dk_{(1,1)}(m+1) \quad .
\end{aligned}$$

6.2 Höhere Momente

Bislang haben wir die effiziente Berechnung des Deckungskapitalverlaufs kennengelernt, der eine Entwicklung der Bewertung eines Versicherungsvertrages wiedergibt. Hierdurch ist aber keine Risikoeinschätzung möglich. Ein erster Weg hierzu ist die Bestimmung der Varianz und der höheren Momente der Reserve. Wir betrachten im folgenden eine Personenversicherung

$$((X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, (a_i)_{i \in E}, (\alpha_{i,j})_{i \neq j})$$

auf einem Zustandsraum E. Wie in (6.4) führen wir die Zufallsvariablen $V(m)$ für $m \in \mathbb{N}_0$ ein, die die zufällige Bewertung der zukünftigen Zahlungen nach m darstellen. Der stochastische Prozeß $(V(m))_{m \in \mathbb{N}_0}$ wird auch als Prozeß der Reserven genannt und erfüllt die Rekursion (6.5), bzw. (6.10), von denen ausgehend eine Rekursion für die höhere Momente angegeben werden kann. Da die Formeln etwas länglich sind, gehen wir in zwei Schritten vor.

6.2.1 keine Erlebensfalleistung

Das bedeutet, das die Verweilzahlungsströme a_i für $i \in E$ alle verschwinden. Dann vereinfacht sich (6.10) zu

$$V(m) 1_{\{X_m = i\}} = \frac{v(m+1)}{v(m)} 1_{\{X_m = i\}} \sum_{j \in E} (\alpha_{i,j}(m+1) + V(m+1)) 1_{\{X_{m+1} = j\}}, \qquad (6.11)$$

wobei $\alpha_{i,i}(m+1)=0$ gesetzt wird für alle $i \in E$. Für die p-te Potenz erhalten wir somit

$$V(m)^p 1_{\{X_m=i\}} = \left(\frac{v(m+1)}{v(m)}\right)^p 1_{\{X_m=i\}} \sum_{j\in E}(\alpha_{i,j}(m+1)+V(m+1))^p 1_{\{X_{m+1}=j\}}, \quad (6.12)$$

da die gemischten Terme wegen

$$1_{\{X_{m+1}=k\}}1_{\{X_{m+1}=l\}} = 0 \text{ f.a. } k \neq l$$

verschwinden. Also folgt

$$\begin{aligned}
E(V(m)^p|X_m=i) &= \left(\frac{v(m+1)}{v(m)}\right)^p (\sum_{j\neq i} E\left((\alpha_{i,j}(m+1)+V(m+1))^p 1_{\{X_{m+1}=j\}}|X_m=i\right) \\
&\quad +E(V(m+1)^p 1_{\{X_{m+1}=i\}}|X_m=i)) \\
&= \left(\frac{v(m+1)}{v(m)}\right)^p (\sum_{j\neq i} E\left((\alpha_{i,j}(m+1)+V(m+1))^p|X_m=i\right) p_{i,j}(m,m+1) \\
&\quad +E(V(m+1)^p|X_m=i)p_{i,i}(m,m+1)) \\
&= \left(\frac{v(m+1)}{v(m)}\right)^p [p_{i,i}(m,m+1)E(V(m+1)^p|X_m=i)+ \\
&\quad \sum_{j\neq i} p_{i,j}(m,m+1)\left(\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\alpha_{i,j}(m+1)^k E(V(m+1)^{p-k}|X_m=i)\right)] \quad .
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich eine rekursive Berechnungsvorschrift für das p-te Moment der Reserve, wobei rückwärts in der Zeit und aufsteigend in p vorgegangen wird. Als Randbedingung muß man alle Momente kleiner gleich p an einem Zeitpunkt N kennen.

6.2.2 Berücksichtigung von Erlebensfallleistungen

Hier führt das gleiche Vorgehen auch zum Ziel. Allerdings sind die Formeln etwas unübersichtlich. Bei Berücksichtigung der Verweilzahlungsströme a_i ändert sich 6.11 zu

$$\begin{aligned}
& V(m)^p 1_{\{X_m=i\}} \\
= \ & 1_{\{X_m=i\}}[\Delta a_i(m) + \frac{v(m+1)}{v(m)} V(m+1)1_{\{X_{m+1}=i\}} + \\
& \frac{v(m+1)}{v(m)}\left(\sum_{j\neq i}(\alpha_{i,j}(m+1)-\Delta a_j(m+1)+V(m+1)\right)1_{\{X_{m+1}=j\}}]^p \\
= \ & 1_{\{X_m=i\}}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\Delta a_i(m)^{p-k}(\frac{v(m+1)}{v(m)})^k \times \\
& \times\left(\sum_{j\neq i}(\alpha_{i,j}(m+1)-\Delta a_j(m+1)+V(m+1))1_{\{X_{m+1}=j\}}+V(m+1)1_{\{X_{m+1}=i\}}\right)^k \\
= \ & 1_{\{X_m=i\}}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\Delta a_i(m)^{p-k}(\frac{v(m+1)}{v(m)})^k \times \\
& \times\left(\sum_{j\neq i}(\alpha_{i,j}(m+1)-\Delta a_j(m+1)+V(m+1))^k 1_{\{X_{m+1}=j\}}+V(m+1)^k 1_{\{X_{m+1}=i\}}\right)
\end{aligned}$$

Hiermit erhält man eine zum vorherigen Abschnitt analoge Rekursionsbeziehung durch

$$
\begin{aligned}
& E(V(m)^p|X_m = i) \\
= \;& \Delta a_i(m)^p + \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} \Delta a_i(m)^{p-k} (\frac{v(m+1)}{v(m)})^k [E(V(m+1)^k 1_{\{X_{m+1}=i\}}|X_m = i) + \\
& + \sum_{j \neq i} E\left((\alpha_{i,j}(m+1) - \Delta a_j(m+1) + V(m+1))^k \, 1_{\{X_{m+1}=j\}}|X_m = i \right)] \\
= \;& \Delta a_i(m)^p + \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} \Delta a_i(m)^{p-k} (\frac{v(m+1)}{v(m)})^k [E(V(m+1)^k|X_m = i) p_{i,i}(m, m+1) + \\
& + \sum_{j \neq i} p_{i,j}(m, m+1) \sum_{l=0}^{k} \binom{l}{k} (\alpha_{i,j}(m+1) - \Delta a_j(m+1))^{k-l} E(V(m+1)^l|X_m = i)]
\end{aligned}
$$

und wieder kann rückwärts in der Zeit und aufsteigend in p die Momente der Reserve berechnet werden.

6.3 Verteilungsfunktion

Nicht nur die Momente sondern auch die ganze Verteilungsfunktion der Reserve V_m kann rekursiv bestimmt werden. Dies gibt die Möglichkeit eine Risikobeurteilung durchzuführen, die nicht auf den Momenten fußt. Wir bezeichnen mit $F_{m,i}$ die Verteilungsfunktion von V_m - gegeben $X_m = i$ - definiert durch

$$
F_{m,i}(t) = P(V(m) \leq t | X_m = i) \quad \text{f.a. } t \in \mathbb{R}. \tag{6.13}
$$

Die Rekursionsbeziehung (6.10) wollen wir etwas anders bezeichnen durch

$$
V(m) 1_{\{X_m=i\}} = 1_{\{X_m=i\}} \left(\Delta a_i(m) + \sum_{j \in E} \frac{v(m+1)}{v(m)} (\delta_{i,j}(m+1) + V(m+1)) 1_{\{X_{m+1}=j\}} \right)
$$

mit

$$
\delta_{i,j} = \begin{cases} \alpha_{i,j}(m+1) - \Delta a_j(m+1) & \text{für } i \neq j \\ 0 & \text{für } i = j \end{cases}
$$

Also folgt

$$
\begin{aligned}
F_{m,i}(t) &= P(V(m) \leq t | X_m = i) \\
&= P(\sum_{j \in E} [\delta_{i,j}(m+1) + V(m+1)] 1_{\{X_{m+1}=j\}} \leq (t - \Delta a_i(m)) \frac{v(m)}{v(m+1)} | X_m = i) \\
&= \sum_{j \in E} P(V(m+1) \leq (t - \Delta a_i(m)) \frac{v(m)}{v(m+1)} - \delta_{i,j}(m+1) | X_{m+1} = j) p_{i,j}(m, m+1) \\
&= \sum_{j \in E} F_{m+1,j} \left((t - \Delta a_i(m)) \frac{v(m)}{v(m+1} - \delta_{i,j}(m+1) \right) p_{i,j}(m, m+1)
\end{aligned}
$$

und man kann rückwärts in der Zeit die Folge der bedingten Verteilungsfunktionen berechnen. Als Randbedingung muß $(F_{N,i})_{i \in E}$ für ein $N \in \mathbb{N}$ gegeben sein.

6.4 Anwendungen

Beispielhaft wollen wir die Sofortrente untersuchen und die Varianz sowie die Verteilungsfunktion der Reserve bestimmen. Wir führen also das Beispiel aus (6.1.5) fort und verweisen auf die Rekursionsgleichung für das Deckungskapital. Für das zweite Moment gilt die Rekursionsgleichung

$$\begin{aligned} E(V(m)^2|X_m = 1) &= \Delta a_1(m)^2 + 2\Delta a_1(m) p_{x+m} E(V(m+1)|X_m = 1)\frac{v(m+1)}{vm)} \\ &\quad + p_{x+m} E(V(m+1)^2|X_m = 1)(\frac{v(m+1)}{v(m)})^2 \end{aligned}$$

welche zusammen mit

$$Dk_1(m)^2 = r(m)^2 + (\frac{v(m+1)}{v(m)})^2 p_{x+m}^2 Dk_1(m+1)^2 + 2r(m)\frac{v(m+1)}{v(m)} p_{x+m} Dk_1(m+1)$$

eine Rekursionsgleichung für die bedingte Varianz von $V(m)$ - gegeben $X_m = 1$, die durch

$$Var(V(m)|X_m = 1) = E((V(m) - E(V(m)|X_m = 1)^2|X_m = 1) = E(V(m)^2|X_m = 1) - Dk_1(m)^2$$

definiert ist, ergibt:

$$\begin{aligned} & Var(V(m)|X_m = 1) \\ = \; & (\frac{v(m+1)}{v(m)})^2 p_{x+m}((E(V(m+1)^2|X_m = 1) - p_{x+m} Dk_1(m+1)^2) \\ = \; & (\frac{v(m+1)}{v(m)})^2 p_{x+m}(E(V(m+1)^2|X_m = 1) - Dk_1(m+1)^2 + q_{x+m} Dk_1(m+1)^2) \\ = \; & (\frac{v(m+1)}{v(m)})^2 p_{x+m} Var(V(m+1)|X_m = 1) + p_{x+m} q_{x+m}(\frac{v(m+1)}{v(m)})^2 Dk_1(m+1)^2 \end{aligned}$$

Diese Rekursionsgleichung kann folgendermaßen aufgelöst werden. Setze

$$Var(m) = Var(V(m)|X_m = 1) \quad , \quad c(m) = (\frac{v(m+1)}{v(m)})^2 p_{x+m} q_{x+m} Dk_1(m+1)^2 \quad .$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} var(m) &= (\frac{v(m+1)}{v(m)})^2 p_{x+m} var(m+1) + c(m) \\ &= c(m) + (\frac{v(m+1)}{v(m)})^2 p_{x+m} \left(c(m+1) + (\frac{v(m+2)}{v(m+1)})^2 p_{x+m+1} var(m+2) \right) \\ &= \ldots \\ &= c(m) + (\frac{v(m+1)}{v(m)})^2 p_{x+m} c(m+1) + (\frac{v(m+2)}{v(m)})^2 \, {}_2p_{x+m} c(m+2) + \ldots + \\ &\qquad + (\frac{v(N)}{v(m)})^2 \, {}_{N-m}p_{x+m} c(N) \end{aligned}$$

6.5 Hattendorfsches Theorem

Das Hattendorfsche Theorem besagt kurz gesagt, daß die jährlichen Verluste eines Versicherungsvertrages zentriert und unkorreliert sind. In diesem Kapitel wird diese Aussage präzisiert und bewiesen.

Wir gehen von einer allgemeinen Personenversicherung

$$((X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}, (a_i)_{i\in E}, (\alpha_{i,j})_{i\neq j})$$

mit Zahlungsstrom

$$A = \sum_{i\in E} A_i + \sum_{i\neq j} A_{i,j},$$

wobei

$$\Delta A_i(n) = 1_{\{X_n=i, X_{n-1}=i\}}\Delta a_i(n) \quad , \quad \Delta A_{i,j}(n) = 1_{\{X_n=i, X_{n-1}=j\}}\alpha_{i,j}(n) \quad .$$

Wir setzen voraus, daß die zufällige Bewertung

$$V(A) = \sum_{k=0}^{\infty} v(k)\Delta A(k)$$

ein endliches zweites Moment besitzt.

Das Deckungskapital $Dk_i(n)$ gibt den Preis einer Versicherung nach n Versicherungsperioden wieder - gegeben, daß die Markov-Kette nach n Versicherungsperioden im Zustand i ist, wobei auf den Zeitpunkt n abdiskontiert wird. Vom Vertragsabschluß gesehen wird der zufällige Preis der zukünftigen Versicherungsleistungen nach n Versicherungsperioden also durch

$$\pi(n) = v(n)\sum_{i\in E} 1_{\{X_n=i\}} Dk_i(n) \qquad \text{f.a. } n\in\mathbb{N}_0 \tag{6.14}$$

definiert. Es gilt folgende

6.5.1 Bemerkung

(i) $P(X_0 = i) = 1 \Rightarrow \pi(0) = Dk_i(0)$

(ii) $\pi(n) = \sum_{i\in E} 1_{\{X_n=i\}}\Delta a_i(n) + E(\sum_{k=n+1}^{\infty} v(k)\Delta A(k)|\mathcal{F}_n)$ für $n\in\mathbb{N}_0$.

Beweis: Die Aussage (i) ist unmittelbar klar. Wegen (6.5) gilt

$$Dk_i(n) = \Delta a_i(n) + E(\sum_{k=n+1}^{\infty} v(k)\Delta A(k)|X_n = i),$$

was

$$\begin{aligned}
\pi(n) &= \sum_{i\in E} 1_{\{X_n=i\}}\Delta a_i(n) + \sum_{i\in E} 1_{\{X_n=i\}} E(\sum_{k=n+1}^{\infty} v(k)\Delta A(k)|X_n = i) \\
&= \sum_{i\in E} 1_{\{X_n=i\}}\Delta a_i(n) + E(\sum_{k=n+1}^{\infty} v(k)\Delta A(k)|X_n) \\
&= \sum_{i\in E} 1_{\{X_n=i\}}\Delta a_i(n) + E(\sum_{k=n+1}^{\infty} v(k)\Delta A(k)|\mathcal{F}_n)
\end{aligned}$$

impliziert. □

Definiere für $n \in \mathbb{N}$

$$\lambda(n) = \pi(n) - \pi(0) + \sum_{k=1}^{n} v(k)\Delta A(k) + \sum_{i\in E} a_i(0) 1_{\{X_0=i\}} - \sum_{i\in E} 1_{\{X_n=i\}} \Delta a_i(n) \quad ,$$

welches den zufälligen diskontierten Verlust der Versicherung im Zeitintervall $]0,n]$ beschreibt, was folgendermaßen begründet werden kann. Wir kaufen die Versicherung für $\pi(0)$ zum Vertragsabschluß, halten sie über n Perioden und bekommen in dieser Zeitperiode

$$\sum_{k=1}^{n} v(k)\Delta A(k) + \sum_{i\in E} a_i(0) 1_{\{X_0=i\}} - \sum_{i\in E} 1_{\{X_n=i\}} \Delta a_i(n)$$

als diskontierte Summe aller Zahlungen. Schließlich verkaufen sie zum Zeitpunkt n und erhalten $\pi(n)$. Die Gesamtbilanz ist also $\lambda(n)$. Hierbei ist zu beachten, daß die Erlebensfallleistung in n abgezogen wird, da dies eine zukünftige Leistung aus dem Zahlungsstrom der Versicherung ist.

Entscheidend für den Nachweis des Hattendorfschen Theorems ist der folgende Zusammenhang.

6.5.2 Bemerkung: *Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:*

$$\lambda(n) = E(V(A)|\mathcal{F}_n) - E(V(A)|\mathcal{F}_0) \quad .$$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} \pi(n) - \sum_{i\in E} 1_{\{X_n=i\}} \Delta a_i(n) &= E(\sum_{k=n+1}^{\infty} v(k)\Delta A(k)|\mathcal{F}_n) \\ \pi(0) - \sum_{i\in E} 1_{\{X_0=i\}} &= E(\sum_{k=1}^{\infty} v(k)\Delta A(k)|\mathcal{F}_0) \end{aligned}$$

Also folgt

$$\begin{aligned} \lambda(n) &= E(\sum_{k=n+1}^{\infty} v(k)\Delta A(k)|\mathcal{F}_n) - E(\sum_{k=1}^{\infty} v(k)\Delta A(k)|\mathcal{F}_0) + \sum_{k=1}^{n} v(k)\Delta A(k) \\ &= E(\sum_{k=1}^{\infty} v(k)\Delta A(k)|\mathcal{F}_n) - E(\sum_{k=1}^{\infty} v(k)\Delta A(k)|\mathcal{F}_0) \\ &= E(\sum_{k=0}^{\infty} v(k)\Delta A(k)|\mathcal{F}_n) - E(\sum_{k=0}^{\infty} v(k)\Delta A(k)|\mathcal{F}_0) \\ &= E(V(A)|\mathcal{F}_n) - E(V(A)|\mathcal{F}_0) \quad . \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich unmittelbar, daß $(\lambda(n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal ist mit $E\lambda(n) = 0 \quad$ f.a. $n \in \mathbb{N}_0$. Insbesondere bedeutet dies, daß es keine mittleren Verluste in den ersten n Versicherungsperioden gibt. Die Martingaleigenschaft impliziert auch das Hattendorfsche Theorem

6.5.3 Satz: *Es gilt*

(i) *Die jährlichen Verluste $(\Delta\lambda(n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ bilden einen unkorrelierten, zentrierten Prozeß, d.h.*

$$E\Delta\lambda(n) = 0 \quad , \quad E\Delta\lambda(n)\Delta\lambda(m) = 0$$

für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$ mit $n \neq m$.

(ii) $Var\lambda(n) = \sum_{k=1}^{n} Var(\Delta\lambda(k))$ *für alle* $n \in \mathbb{N}_0$.

(iii) Gilt $P(X_0 = i) = 1$, *so ist* $VarV(A) = \sum_{k=1}^{\infty} Var(\Delta\lambda(k))$

Beweis: Aus der Martingaleigenschaft folgt:

$$E\Delta\lambda(n) - E\Delta\lambda(n-1) = 0$$

und für $m < n$

$$\begin{aligned}
E\Delta\lambda(m)\Delta\lambda(n) &= E\lambda(m)\Delta\lambda(n) - E\lambda(m-1)\Delta\lambda(n) \\
&= E(E(\lambda(m)\Delta\lambda(n)|\mathcal{F}_m) - E(E(\lambda(m-1)\Delta\lambda(m)|\mathcal{F}_{m-1}) \\
&= E\lambda(m)E(\lambda(n) - \lambda(n-1)|\mathcal{F}_m) - E\lambda(m-1)E(\lambda(n) - \lambda(n-1)|F_{m-1}) \\
&= E\lambda(m)(\lambda(m) - \lambda(m)) - E\lambda(m-1)(\lambda(m-1) - \lambda(m-1)) = 0
\end{aligned}$$

Also gilt (i). Die aussage (ii) erhält man wegen $\lambda(0) = 0$ aus

$$Var\lambda(n) = Var\sum_{k=1}^{n}\Delta\lambda(k) = \sum_{k=1}^{n} Var(\Delta\lambda(k)) \quad .$$

□

Durch

$$L(]m,n]) = \lambda(n) - \lambda(m)$$

für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $m < n$ wird der Verlust im Zeitintervall $]m,n]$ beschrieben. Es gilt

$$L(]m,n]) = \pi(n) - \pi(m) + \sum_{k=m+1}^{n} v(k)\Delta A(k) + \sum_{i\in E} 1_{\{X_n=i\}}\Delta a_i(n) - \sum_{i\in E} 1_{\{X_n=i\}}\Delta a_i(n)$$

und anders ausgedrückt

$$L(]m,n]) = E(V(A)|\mathcal{F}_n) - E(V(A)|\mathcal{F}_m) \quad .$$

Das Hattendorfsche Theorem liefert, daß Verluste in disjunkten Zeitintervallen unkorreliert sind.

6.5.4 Folgerung: *Sind die Zeitintervalle* $T_1 =]m_1, n_1], T_2 =]m_2, n_2]$ *disjunkt, so sind* $L(T_1), L(T_2)$ *unkorrelierte Zufallsvariablen mit* $EL(T_i) = 0$ *für* $i = 1, 2$.

Beweis: O.E.d.A. sei $m_1 < n_1 \leq m_2 < n_2$. Dann gilt

$$L(T_1) = \sum_{k=m_1}^{n_1}\Delta\lambda(k) \quad , \quad L(T_2) = \sum_{k=m_2}^{n_2}\Delta\lambda(k) \quad .$$

Also ist

$$Cov(L(T_1), L(T_2)) = \sum_{k=m_1}^{n_1}\sum_{l=m_2}^{n_2} Cov(\Delta\lambda(k), \Delta\lambda(k)) = 0$$

Kapitel 7

Zeitstetige Modelle

Bislang haben wir diskrete Modelle zur Beschreibung von Versicherungen vorgestellt. Dies ist sicherlich ausreichend für die praktischen Bedürfnisse eines Versicherungsunternehmens. Versicherungen spielen aber auch in anderen Bereichen der Finanzmathematik eine wichtige Rolle. So kann z.B. das Ausfallrisiko von Kreditverträgen durch eine Versicherung modelliert werden, die als eine Art Risikopreis in der Rendite sich widerspiegelt. Diese werden praktisch zeitstetig gehandelt, so daß hier ein Bedürfnis nach der Bewertung von zeitstetigen Versicherungen besteht. Zunächst möchte wir die einfachen Beispiele aus Kapitel 2 in einem zeitstetigen Kontext betrachten und vorstellen, wie man dann Barwerte berechnet.

7.1 Beispiele

Als einfachstes Beispiel einer Versicherung haben wir die auf ein unter einem Risiko stehendem Leben kennengelernt. In einem zeitstetigen Kontext werden üblicherweise die folgenden Annahmen zu einer adequaten Beschreibung getroffen.

- Eintrittsalter $x \in [0, \infty)$.
- eine zufällige Restlebenszeit in Jahren, die durch eine $(0, \infty)$ wertige Zufallsvariable T_x mit Lebesgue-Dichte f_x beschrieben wird. Sie hat eine Verteilungsfunktion F_x, definiert durch
$$F_x(t) = P(T_x \le t) = \int_0^t f_x(s)ds \quad \text{f.a. } t > 0.$$
Die versicherungsmathematischen Schreibweisen entsprechen also im zeitstetigen Kontext
$${}_tp_x = P(T_x > t) \quad , \quad {}_tq_x = P(T_x \le t) \quad \text{f.a. } t > 0.$$
- eine Rechnungskapitalverzinsung der Form
$$K(t) = e^{rt} \quad , \quad v(t) = \frac{1}{K(t)} = e^{-rt}$$
mit stetiger Zinsrate $r > 0$.

Entsprechend der Versicherungsleistungen können die unterschiedlichen Versicherungsformen eingeführt werden.

7.1.1 Todesfallversicherung

Ein Tod nach $t \in (0, \infty)$ Versicherungsjahren führt zur sofortigen Auszahlung der Versicherungssumme M. Die zufällige abdiskontierte Gesamtleistung ist also

$$S = Mv(T_x) = Me^{-rT_x}$$

mit Barwert

$$ES = ME(v(T_x) = M \int_0^\infty v(s)P^{T_x}(ds) = M \int_0^\infty v(s)f(s)ds = M \int_0^\infty e^{-rs}f(s)ds \quad .$$

Diese kann mit Hilfe der sogenannten Hazardrate $(\mu(t))_{t \geq 0}$, definiert durch

$$\mu(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} P(T_x \leq t + h | T_x > t) \quad \text{f.a. } t > 0,$$

ausgedrückt werden. Die Entwicklung der Hazardraten, die hier auch Sterberaten genannt werden, beschreibt also die Sterblichkeit. Es gilt

$$\mu(t) = \frac{f(t)}{P(T_x > t} = \frac{f(t)}{1 - F_x(t)}$$

für Lebesgue fast alle t, da

$$P(T_x \leq t + h | T_x > t) = \frac{P(t < T_x \leq t + h)}{P(T_x > t)} = \frac{\int_t^{t+h} f(s)ds}{P(T_x > t)} \quad .$$

Somit gilt

$$\mu(t)P(T_x > t) = f(t) = -\frac{d}{dt}P(T_x > t) \quad ,$$

was

$$P(T_x > t) = \exp(-\int_0^t \mu(s)ds) \quad \text{f.a. } t > 0 \tag{7.1}$$

impliziert. Angewendet auf den Barwert bedeutet dies:

$$\begin{aligned} ES &= MEv(T_x) = M \int_0^\infty e^{-rs}f(s)ds = M \int_0^\infty e^{-rs}\mu(s)P(T_x > s)ds \\ &= M \int_0^\infty e^{-rs}\mu(s) \exp(-\int_0^s \mu(u)du)ds, \end{aligned}$$

was eine Formel nur unter Verwendung der Sterberaten ergibt. Wir bezeichnen wie bei den diskreten Modellen mit A_x den Barwert einer lebenslänglichen Todesfallversicherung mit Versicherungssumme 1 .

7.1.2 Sofortrente

Überlebt der Versicherte den Zeitpunkt $s \in (0, \infty)$, wird eine Rente der Höhe 1 ausgezahlt. Bei einer Höchstversicherungsdauer von t_1 Jahren mit $t_1 \in (0, \infty]$ ergibt sich also als Summe der abdiskontierten Leistungen

$$S = \int_0^{t_1} e^{-rs} 1_{\{T_x > s\}} ds$$

mit Barwert

$$ES = \int_0^{t_1} e^{-rs} P(T_x > s)ds = \int_0^{t_1} e^{-rs} \exp(-\int_0^s \mu(u)du)ds \quad ,$$

der mit $\ddot{a}_{x:t_1\rceil}$ bezeichnet wird.

7.1.3 gemischte Versicherung

Bei einer Versicherungsdauer von t_1 Jahren wird bis t_1 im Todesfall die Versicherungssumme 1 ausgezahlt. Bei Überleben von t_1 wird der Betrag 1 als Erlebensfallleistung fällig. Es ergibt sich als abdiskontierte Gesamtleistung

$$S = v(T_x)1_{\{T_x \le t_1\}} + v(t_1)1_{\{T_x > t_1\}}$$

mit Barwert

$$\begin{aligned} ES &= \int_0^{t_1} v(s)f(s)ds + e^{-rt_1}P(T_x \ge t_1) \\ &= \int_0^{t_1} e^{-rs}\exp(-\int_0^s \mu(u)du)ds + e^{-rt_1}\exp(-\int_{t_1}^\infty \mu(u)du), \end{aligned}$$

der mit $A_{x:t_1\rceil}$ bezeichnet wird.

7.1.4 Prämienfestsetzung

Dies kann nach dem Äquivalenzprinzip wie im diskreten durchgeführt werden. Zu einer Versicherung mit Barwert B und Prämienlaufzeit t_1 wird die Einmalprämie auf eine kontinuierliche konstante Prämienzahlung der Höhe p auf das Zeitintervall $(0, t_1)$ verteilt. Dies ist eine Sofortrente mit Barwert $p\,\ddot{a}_{x:t_1\rceil}$. Die Prämienhöhe p erhält man also aus

$$p\,\ddot{a}_{x:t_1\rceil} = B \quad .$$

7.2 Markovsche Sprungprozesse

Um zu einer analogen zeitstetigen Beschreibung von Versicherungen zu gelangen, muß der zeitstetige Markov-Prozeß auf einem endlichen Zustandsraum E eingeführt werden. Dies sind sogenannte reine Markovsche Sprungprozesse. Wir betrachten also einen abzählbaren Zustandsraum E und einen hinreichend großen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und definieren

7.2.1 Definition: *Sei $(X_t)_{t\in[0,\infty)}$ eine Familie von Zufallsvariablen mit Werten in E. X heißt Markovscher Sprungprozeß (MSP), falls gilt:*

$$P(X_{t_{n+1}} = i_{n+1}|X_{t_n} = i_n, \ldots, X_{t_1} = i_1) = P(X_{t_{n+1}} = i_{n+1}|X_{t_n} = i_n)$$

für alle

$$0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t_{n+1}, \quad i_1, \ldots, i_{n+1} \in E \quad \textit{mit} \quad P(X_{t_n} = i_n, \ldots, X_{t_1} = i_1) > 0.$$

Wie im diskreten können wir die Übergangswahrscheinlichkeiten definieren durch

$$p_{i,j}(s,t) = \begin{cases} P(X_t = j|X_s = i) & \text{falls } P(X_s = i) > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{7.2}$$

für alle $0 \le s \le t, i, j \in E$. Durchlaufen wir die Paare der Zustaände $i, j \in E$, so erhalten wir die Übergangsmatrix

$$\mathbf{P}(s,t) = (p_{i,j}(s,t))_{i,j\in E}$$

und können die Chapman-Kolmogorov Gleichung bzw. Halbgruppeneigenschaft formulieren.

7.2.2 Proposition: *Für einen Markovschen Sprungprozeß X gilt:*

$$\mathbf{P}(s,t) = \mathbf{P}(s,r)\mathbf{P}(r,t)$$

für alle $0 \leq s < r < t$, wobei die Übergangsmatrizen entsprechend einer Matrixmultiplikation miteinander multipliziert werden.

Beweis: Mit der Markov-Eigenschaft folgt für alle $i, j \in E$.

$$\begin{aligned}
p_{i,j}(s,t) = P(X_t = j | X_s = i) &= \sum_{k\in E} P(X_t = j, X_r = k | X_s = i) \\
&= \sum_{k\in E} P(X_t = j | X_r = k, X_s = i) P(X_r = k | X_s = i) \\
&= \sum_{k\in E} P(X_t = j | X_r = k) P(X_r = k | X_s = i) \\
&= \sum_{k\in E} p_{i,k}(s,r) p_{k,j}(r,t) \quad ,
\end{aligned}$$

was die Behauptung impliziert. Für Versicherungszwecke reicht die Betrachtung von endlichen Zustandsräumen. Wir setzen also für das folgende

$$|E| = n < \infty$$

voraus und bezeichnen mit $M(E)$ die Menge aller Matrizen mit Indexmenge $E \times E$. Ferner sei I die Einheitsmatrix und $GL(E)$ die Menge aller invertierbaren Matrizen aus $M(E)$. Im folgenden wollen wir den Zusammenhang zwischen der Halbgruppe $\mathbf{P}(s,t)$ und den sogenannten Übergangsintensitäten herstellen, die zur Definition von Markov Sprungprozessen im allgemeinen bentzt werden. Wir werden hier nur einen adhoc Zugang verfolgen, der verbessert werden kann.

7.2.3 Definition: *Ein Markovscher-Sprungprozeß X auf E heißt regulär, falls es eine stetige $M(E)$ wertige Funktion μ gibt mit*

$$\mathbf{P}(s, s+h) = I + \mu(s)h + R(s,h) \quad \textit{f.a. } h > 0$$

und

$$\forall_{s>0} \exists_{\varepsilon>0} : \sup_{r\in(s-\varepsilon,s]} \frac{\|R(r,h)\|}{h} \to 0 \quad \textit{für} \ \ h \to 0.$$

Die Intensität des Übergangs von i nach j zum Zeitpunkt s ist also dann gegeben durch

$$\mu_{i,j}(s) = \lim_{h\to 0} \frac{p_{i,j}(s, s+h)}{h} \quad .$$

Die Intensität, den Zustand i zu verlassen ist

$$\mu_i(s) = -\mu_{i,i}(s) = \sum_{j\neq i} \mu_{i,j}(s)$$

wegen

$$1 - p_{i,i}(s, s+h) = P(X_{s+h} \neq i | X_s = i) = \sum_{j\neq i} p_{i,j}(s, s+h) \quad .$$

Die Intensitätsfunktion μ wird auch als Erzeuger von X bezeichnet, da sie die Halbgruppe eindeutig bestimmt, was wir im folgenden einsehen wollen. Vorbereitend stellen wir fest

7.2.4 Proposition: *Für einen regulären Markovschen Sprungprozeß X gilt:*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(\mathbf{P}(s-h,s) - I) = \mu(s)$$

für alle $s > 0$, insbesondere gilt

$$\lim_{h\to 0} \mathbf{P}(s-h,s) = I \quad .$$

Beweis: Sei $s > 0$. Aus der Regularität folgt

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(s-h,s) &= I + \mu(s-h)h + R(s-h,s) \\ &= I + \mu(s)h + (\mu(s-h) - \mu(s))h + R(s-h,s) \quad .\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt somit aus der Stetigkeit von μ und $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} R(s-h,s) = 0$. □

Als Folgerung erhalten wir, daß die Übergangsmatrizen invertierbar sind, wenn ihre Zeitdifferenz klein ist.

7.2.5 Folgerung: *Zu jedem $s > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit*

$$\mathbf{P}(s-h,s) \in GL(E) \quad , \quad \mathbf{P}(s,s+h) \in GL(E) \quad \textit{f.a. } 0 < h < \delta.$$

Beweis: Zu $s > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit $\|\mathbf{P}(s,s+h) - I\| < 1$, $\|\mathbf{P}(s-h,s) - I\| < 1$ für alle $h \in [0,\delta)$, woraus die Behauptung folgt mit der von Neumannschen Reihenentwicklung der Inversen. □

Der angekündigte Zusammenhang zwischen Erzeuger und Halbgruppe besteht darin, daß die Halbgruppe die eindeutige Lösung der sogenannten Kolmogorovschen Differenential-gleichung, die durch den Erzeuger definiert wird, ist.

7.2.6 Satz: *Sei X ein regulärer Markovscher-Sprungprozeß mit Erzeuger μ und Halbgruppe $(\mathbf{P}(s,t))_{0\le s<t}$. Dann gilt:*

(i) $\frac{d}{ds}\mathbf{P}(s,t) = -\mu(s)\mathbf{P}(s,t)$

(ii) $\frac{d}{dt}\mathbf{P}(s,t) = \mathbf{P}(s,t)\mu(t)$

Die erste Gleichung wird auch als Kolmogorovsche Rückwärts- und die zweite als Kolmogorovsche Vorwärtsgleichung bezeichnet.

Beweis: Für festes $s > 0$ gilt

$$\frac{1}{h}(\mathbf{P}(s,t+h) - \mathbf{P}(s,t)) = \mathbf{P}(s,t)\frac{1}{h}(\mathbf{P}(t,t+h) - I) \longrightarrow \mathbf{P}(s,t)\mu(t)$$

sowie

$$\frac{1}{-h}(\mathbf{P}(s,t-h) - I) = \mathbf{P}(s,t-h)\frac{1}{h}(\mathbf{P}(t-h,t) - I) \longrightarrow \mathbf{P}(s,t)\mu(t)$$

Also folgt die Behauptung (ii). Zum Nachweis von (i) betrachten wir ein festes $t > 0$ und stellen fest

$$\frac{1}{h}(\mathbf{P}(s+h,t) - \mathbf{P}(s,t)) = \frac{1}{h}(I - \mathbf{P}(s,s+h))\mathbf{P}(s+h,t) \longrightarrow -\mu(s)\mathbf{P}(s,t) \quad ,$$

denn $\mathbf{P}(s+h,t) = \mathbf{P}(s,s+h)^{-1}\mathbf{P}(s,t)$ strebt gegen $\mathbf{P}(s,t)$ für $h \searrow 0$. $\square$

In Komponentenform lauten die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}p_{i,j}(s,t) &= \mu_i(s)p_{i,j}(s,t) - \sum_{k\neq i}\mu_{i,k}(s)p_{k,j}(s,t) \\
\frac{d}{ds}p_{i,j}(s,t) &= -p_{i,j}(s,t)\mu_j(t) + \sum_{k\neq j}p_{i,k}(s,t)\mu_{k,j}(t)
\end{aligned}$$

für alle $i,j \in E$, $0 < s < t$, insbesondere erhält man

7.2.7 Folgerung: *Der Erzeuger eines regulären Markovschen Sprungprozesse bestimmt eindeutig die Halbgruppe*

Beweis: Aus den Kolmogorovschen Differntialgleichungen folgt, daß $\mathbf{P}(s,\cdot)$ Lösung von

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathbf{P}(s,t) &= \mathbf{P}(s,t)\mu(t) \\
\mathbf{P}(s,s) &= I
\end{aligned}$$

ist. Dieses Anfangsproblem ist eindeutig lösbar. Also ist $\mathbf{P}(s,\cdot)$ durch μ eindeutig bestimmt. $\square$

Für die Versicherungsmathematik sind die Verweildauern

$$\tau_{i,s} = \inf\{t \geq s : X_t \neq i\} \quad i \in E, s \geq 0$$

von besonderer Bedeutung. Gegeben $X_s = i$ verweilt X in i im Zeitintervall $[s,\tau_{i,s})$. Die Verteilung der Verweildauern kann mit Hilfe der Intensität μ_i berechnet werden, indem man $\tau_{i,s}$ als Lebenszeit des Zustandes i nach s interpretiert.

7.2.8 Proposition: *Sei X ein regulärer Markovscher Sprungprozeß mit Erzeuger μ. Dann gilt für alle $i \in E, s \geq 0$*

$$P(\tau_{i,s} > t|X_s = i) = \exp(-\int_s^t \mu_i(r)dr) = \exp(\int_s^t \mu_{i,i}(r)dr) = \exp(-\int_s^t \sum_{j\neq i}\mu_{i,j}(r)dr)$$

für alle $t > s$.

Beweis: Die Funktion

$$H(s,t) = P(\tau_{i,s} > t|X_s = i)$$

ist eine zweiparametrische reellwertige Halbgruppe mit

$$\lim_{h\searrow 0}\frac{1}{h}(H(t,t+h)-1) = -\mu_i(t),$$

denn für $s \leq r \leq t$ gilt

$$\begin{aligned}
H(s,t) &= P(\tau_{i,s} > t|X_s = i) = P(\tau_{i,r} > t, \tau_{i,s} > r|X_s = i) \\
&= P(\tau_{i,r} > t|\tau_{i,s} > r, X_s = i)P(\tau_{i,s} > r|X_s = i) \\
&= P(\tau_{i,r} > t|X_r = i)P(\tau_{i,s} > r|X_s = i) \\
&= H(s,r)H(r,t)
\end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned}
\lim_{h \searrow 0} \frac{1}{h}(H(t,t+h)-1) &= \lim_{h \searrow 0} -\frac{1}{h} P(\tau_{i,t} \leq t+h | X_t = i) \\
&= \lim_{h \searrow 0} -\frac{1}{h} P(X_{t+h} \neq i | X_t = i) = -\mu_i(t).
\end{aligned}$$

Wie bei den Kolmogorovschen Differentialgleichungen folgt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} H(s,t) &= -\mu_i(t) H(s,t) \\
H(s,s) &= 1 \quad ,
\end{aligned}$$

was die Behauptung impliziert. □

Bei der Versicherung eines unter einem Risiko stehendem Leben kann die Restlebenszeit benutzt werden zur Definition eines geeigneten Markovschen Sprungtprozeß.

7.2.9 Beispiel Versicherungsmathematik

Sei T eine $[0,\infty)$ wertige Zufallsvariable mit Dichte f und stetiger Hazardrate $\lambda : [0,\infty) \to [0,\infty)$, so daß also

$$P(T > t) = \exp(\int_0^t \lambda(s) ds) \quad \text{ f.a. } t > 0$$

gilt. Wir definieren den Markovschen Sprungprozeß $(X_t)_{t \geq 0}$ auf $\{0,1\}$ durch

$$X_t = 1_{\{T > t\}} \quad \text{ f.a. } t \geq 0.$$

Dann ist X regulär mit Erzeuger

$$\mu(t) = \begin{pmatrix} \mu_{0,0}(t) & \mu_{0,1}(t) \\ \mu_{1,0}(t) & \mu_{1,1}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda(t) & -\lambda(t) \end{pmatrix} \tag{7.3}$$

und Übergangswahrscheinlichkeiten

$$\mathbf{P}(s,t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ P(T \leq t | T > s) & P(T > t | T > s) \end{pmatrix}$$

Insbesondere ist die Verweildauer des Zustandes 1 die Lebenszeit der zu versichernden Person.

7.3 Zahlungsströme

Im Gegensatz zum diskreten Modell müssen kontinuierliche Zahlungen in einem zeitstetigen Modell für Versicherungen betrachtet werden. Deshalb wird der Begriff des Zahlungsstromes auf den kontinuierlichen Kontext erweitert. Weiter findet auch eine kontinuierliche Verzinsung des Kapitals statt. Wir definieren deshalb

7.3.1 Definition: *Eine Funktion $K : [0,\infty) \to [1,\infty)$ heißt Kapitalfunktion, wenn sie rechtsseitig stetig, monoton wachsend mit $K(0) = 1$ ist.*

Die Funktion K beschreibt also die zeitliche Entwicklung eines Kapitals auf eiem Bankkonto mit Anfangseinlage 1, das kontinuierlich verzinst wird. Üblich ist die

7.3.2 Annahme *Wir betrachten nur Kapitalfunktionen K, die absolut-stetig bezüglich des Lebesgue-Maßes sind und bezeichnen mit k dessen Dichte.*

Dann heißt

$$\delta(t) = \frac{k(t)}{K(t)} \tag{7.4}$$

die Zinsintensität der Kapitalfunktion. Es gilt

$$\frac{K(t+h) - K(t)}{hK(t)} = \frac{\int_t^{t+h} k(s)ds}{hK(t)} \to \frac{k(t)}{K(t)} = \delta(t) \quad ,$$

was $\delta(t) = (\log \circ K)'(t)$ impliziert. Somit folgt

$$K(t) = \exp(\int_0^t \delta(s)ds) \quad \text{f.a. } t > 0 \tag{7.5}$$

und für die Diskontierungsfunktion

$$v(t) = \frac{1}{K(t)} = \exp(-\int_0^t \delta(s)ds) \tag{7.6}$$

Die Kapital- bzw. Diskontierungsfunktion wird benötigt, um Zahlungen, die zu unterschiedlichen Zeitpunkten getätigt werden, zu vergleichen.

Analog zum diskreten Modell führen wir ein

7.3.3 Definition: *Ein deterministischer gerichteter Zahlungsstrom Z ist eine rechtsseitig stetige, monoton wachsende Abbildung $Z : [0, \infty) \to [0, \infty)$*

Die bis zum Zeitpunkt t erhaltenen Einnahmen werden also durch $Z(t)$ beschrieben. Z kann als ein Maß auf $([0, \infty), \mathcal{B}([0, \infty))$ aufgefaßt werden, das endlich ist genau dann, wenn $Z(\infty) = \lim_{t\to\infty} Z(t) < \infty$ gilt. Wir bewerten einen gerichteten Zahlungsstrom Z durch

$$V(Z) = \int_0^\infty v(t)dZ(t) \quad . \tag{7.7}$$

Will man eine Zahlungsbilanz aus Einnahmen und Ausgaben herstellen, so muß man betrachten

7.3.4 Definition: *Eine Abbildung $Z : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ heißt ungerichteter Zahlungsstrom, wenn es gerichtete Zahlungsströme Z_1, Z_2 gibt mit $Z = Z_1 - Z_2$ und $Z_1(\infty) \wedge Z_2(\infty) < \infty$.*

Ein solcher entspricht also einem signierten Maß auf $[0, \infty)$ und wird durch

$$V(Z) = \int_0^\infty v(t)dZ(t) = \int_0^\infty v(t)dZ_1(t) - \int_0^\infty v(t)dZ_2(t) \tag{7.8}$$

bewertet, der auch Barwert des Zahlungsstromes genannt wird. Dieser ist wohldefiniert, da zumindest eine der beiden definierenden Terme endlich ist.

Sind die Zahlungen zufällig, da sie etwa vom zufälligen Todeszeitpunkt einer Person abhängen, sprechen wir von einem zufälligen Zahlungsstrom.

7.3.5 Definition: *Ein stochastischer Prozeß* $(A_t)_{t\geq 0}$ *heißt zufälliger gerichteter Zahlungsstrom, wenn er P-f.s. Pfade in der Menge der gerichteten Zahlungsströmen besitzt. Er heißt zufälliger Zahlungsstrom, wenn er P-f.s nur aus Pfaden besteht, die Zahlungsströme sind.*

Ein zufälliger Zahlungsstrom ist eine Differenz von zufälligen gerichteten Zahlungsström und kann als zufäliges signiertes Maß auf $[0,\infty)$ aufgefaßt werden. Er wird durch

$$V(A) = \int_0^\infty v(t) dA_t \tag{7.9}$$

bewertet, welche also eine $\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ wertige Zufallsvariable definiert. Existiert deren Erwarungswert $EV(A)$, so wird dieser Barwert des zufälligen Zahlungsstromes genannt.

Wir wollen zwei für die Personenversicherung wichtige Beispiele betrachten

7.3.6 Beispiel

Zu einem Markovschen Sprungprozeß X und einem Zustand $i \in E$ definieren wir die Verweildauer in i bis t durch

$$O_i(t) = \int_0^t 1_{\{X_s=i\}} ds = \int_0^t 1_{\{\tau_{i,0}>s\}} ds \quad .$$

Wir können dies als gerichteten Zahlungsstrom interpretieren, wenn immer dann, wenn der Prozeß sich im Zustand i befindet, eine Einheit gezahlt wird. O_i definiert ein zufälliges Maß mit Lebesgue-Dichte $s \mapsto 1_{\{X_s=i\}}$.

Für Zustände $i,j \in E$ mit $i \neq j$ definieren wir die Anzahl der Sprünge von i nach j bis t durch

$$N_{i,j}(t) = \sum_{s\leq t} \Delta N_{i,j}(s) = \#\{s \in (0,t] : X_{s-} = i, X_s = j\}$$

mit $\Delta N_{i,j}(s) = 1_{\{X_{s-}=i, X_s=j\}}$. $N_{i,j}$ kann als Zahlungsstrom aufgefaßt werden, wenn beim Sprung von i nach j eine Geldeinheit gezahlt wird. Es definiert punktweise in Ω diskrete Maße, die Zählmaße auf den Sprungzeitpunkten, welche orthogonal sind zum Lebesgue-Maß.

7.4 Modellbildung

Die Vorbereitungen wollen wir nutzen, um zeitstetige Modelle für Personenversicherngen einzuführen. Wie im diskreten betrachten wir zunächst nur den Standpunkt, daß Leistungen in eine Richtung vom Versicherungsunternehmen an den Versicherungsnehmer oder umgekehrt gehen.

7.4.1 Definition: *Eine gerichtete Personenversicherung ist ein Tripel*

$$((X_t)_{t\geq 0}, (a_i)_{i\in E}, (\alpha_{i,j})_{i\neq j})$$

bestehend aus

- *einem Markovschen Sprungprozeß* (X_t) *auf einem endlichen Zustandsraum* E,

- *einer Familie* $(a_i)_{i\in E}$ *von gerichteten zeitstetigen Zahlungsströmen,*
- *einer Familie* $(\alpha_{i,j})_{i\neq j}$ *von nicht negativen meßbaren Funktionen* $\alpha_{i,j} : [0,\infty) \to [0,\infty)$.

Die Funktionen $(a_i), \alpha_{i,j}$ werden auch als Versicherungsleistungsfunktionen bezeichnet und bestimmen die Leistung bei Sprung bzw. Verweilen in einem Zustand. Verweilen im Zustand i führt zum zufälligen Zahlungsstrom A_i definiert durch das zufällige Maß

$$dA_i(t) = 1_{\{X_t=i\}} da_i(t) \quad .$$

Solange man im Zustand i befindet, werden also Zahlungen entsprechend des Zahlungsstromes a_i getätigt. Die Sprünge von i nach j induzieren den zuälligen Zahlungsstrom $A_{i,j}$, definiert durch

$$A_{i,j}(t) = \int_{[0,t]} \alpha_{i,j}(t) dN_{i,j}(t) \qquad \text{f.a. } t \geq 0.$$

Bei einem Sprung in t wird also die Leistung $\alpha_{i,j}(t)$ gezahlt. Als Gesamtzahlungsstrom der gerichteten Personenversicherung erhalten wir die Summe der Teilzahlungsströme

$$A = \sum_{i\in E} A_i + \sum_{i\neq j} A_{i,j} \quad .$$

Bewertet wird die Versicherung mittels des Zahlungsstromes der Gesamtleistungen. Wir erhalten

$$V(A) = \int_0^\infty v(t) dA_t$$

als zufällige Bewertung und $EV(A)$ als Barwert, der ein Element aus $[0,\infty]$ ist.

Wollen wir neben den Ausgaben auch noch die Prämieneinnahmen in einem Versicherungsvertrag beschreiben, kommen wir zum Begriff

7.4.2 Definition: *Ein Tripel*

$$((X_t)_{t\geq 0}, (a_i)_{i\in E}, (\alpha_{i,j})_{i\neq j})$$

bestehend aus

- *einem Markovschen Sprungprozeß* X *mit endlichem Zustandsraum* E,
- *einer Familie von Zahlungsströmen* $(a_i)_{i\in E}$,
- *einer Familie von Funktionen* $(\alpha_{i,j})_{i\neq j}$

heißt allgemeine Personenversicherung, wenn es gerichtete Personenversicherungen

$$\left((X_t^{(1)})_{t\geq 0}, (a_i^{(1)})_{i\in E}, (\alpha_{i,j}^{(1)})_{i\neq j}\right) \quad , \quad \left((X_t^{(2)})_{t\geq 0}, (a_i^{(2)})_{i\in E}, (\alpha_{i,j}^{(2)})_{i\neq j}\right)$$

gibt mit

(i) $a_i = a_i^{(1)} - a_i^{(2)}$ *f.a.* $i \in E$,

(ii) $\alpha_{i,j} = \alpha_{i,j}^{(1)} - \alpha_{i,j}^{(2)}$ *f.a.* $i \neq j$,

(iii) eine der beiden durch die gerichteten Versicherungen induzierten Gesamtzahlungsströme $A^{(1)}, A^{(2)}$ ist P-f.s. endlich.

Die Bedingung (iii) liefert, daß der induzierte Gesamtzahlungsstrom $A = A^{(1)} - A^{(2)}$ der Versicherung durch

$$V(A) = \int_0^\infty v(t)dA(t) = \int_0^\infty v(t)dA_t^{(1)} - \int_0^\infty v(t)dA_t^{(2)}$$

bewertet werden kann, was der zufälligen Gesamtzahlungsbilanz an abdiskontierten Zahlungen entspricht, denn eine der beiden Terme auf der rechten Seite ist endlich. Die Bewertung $V(A)$ ist eine $[-\infty, +\infty]$ wertige Zufallsvariable mit der wir den Barwert durch $EV(A)$ definieren können, sofern letzterer existiert.

Wir wollen einige Beispiele betrachten.

7.4.3 Todesfallversicherung auf ein Leben

In (7.2.9) ist der zu einer unter einem Risiko stehendem Leben gehörige Markovsche Sprungprozeß $X_t = 1_{\{T>t\}}$, $t \geq 0$ eingeführt worden. Im Sinne einer Markov Modellierung leiten sich die unterschiedlichen Versicherungstypen durch Ausgestaltung der Leistungsfunktionen wie im diskreten ab. Wir wollen die lebenslängliche Todesfallversicherung mit Prämienzahlung betrachten, die durch die nichttrivialen Leistungsfunktionen $\alpha_{1,0}$, a_1 beschrieben wird. Die nichtnegative meßbare Funktion $\alpha_{1,0}$ gibt dabei die Todesfalleistung an. Wir nehmen an, daß die durch a_1 definierte Prämienzahlung ein Maß mit Lebesgue-Dichte p definiert. Kontinuierlich wird also entsprechend der Dichte $t \mapsto p(t)$ Prämien eingezahlt. Die übrigen Leistungsfunktionen verschwinden und das so definierte Modell

$$((X_t)_{t\geq 0}, (a_i)_{i\in E}, (\alpha_{i,j})_{i\neq j})$$

hat einen zufäligen Gesamtzahlungsstrom $A = A_1 + A_{1,0}$ mit

$$dA_1(t) = -p(t)1_{\{X_t=1\}}dt \quad , \quad dA_{1,0}(t) = \alpha_{1,0}(t)dN_{1,0}(t) \quad .$$

Dieser wird also bewertet durch

$$V(A) = \int_{[0,\infty)} \alpha_{1,0}(s)v(s)dN_{1,0}(s) - \int_0^\infty v(s)p(s)1_{\{X_s=1\}}ds \quad .$$

Da $N_{1,0}$ das Einpunktmaß im zufälligen Todeszeitpunkt T ist, gilt

$$V(A) = \alpha_{1,0}(T)v(T) - \int_0^\infty v(s)p(s)1_{\{T>s\}}ds \quad .$$

und wir erhalten als Barwert

$$EV(A) = \int_0^\infty v(s)\alpha_{1,0}(s)f(s)ds - \int_0^\infty v(s)p(s)P(T > s)ds,$$

welcher analog zum einführenden Beispiel durch die Übergangsintensität $\mu_{1,0}(t)$ ausgedrückt werden kann.