# §0 Metrische Räume

1. **Erinnerung.** Sei $X$ eine Menge. Eine Abbildung $d: X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt **Metrik**, wenn für alle $u, v, w \in X$ gilt:

(M1) $d(u,v) = d(v,u) \geq 0$

(M2) $d(u,v) = 0 \iff u = v$

(M3) $d(u,w) \leq d(u,v) + d(v,w)$ **Dreiecksungleichung**

**Beispiele** (a) $X \subseteq \mathbb{R}$, $d(u,v) = |u - v|$

(b) $X \subseteq \mathbb{R}^m$, $d(u,v) = \left( \sum_{j=1}^{m} (u_j - v_j)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

**euklidische Metrik**

(c) $X$ beliebig, $d(u,v) = \begin{cases} 0 & u = v \\ 1 & u \neq v \end{cases}$

**diskrete Metrik.**

Man nennt $(X, d)$ einen **metrischen Raum**.

Klar: Wenn $A \subseteq X$ Teilmenge ist, so ist $(A, d|_{A \times A})$ wieder ein metrischer Raum.

1. **Def** Sei $(X,d)$ ein metrischer Raum.

Für $u \in X$, $\varepsilon > 0$ setzen wir

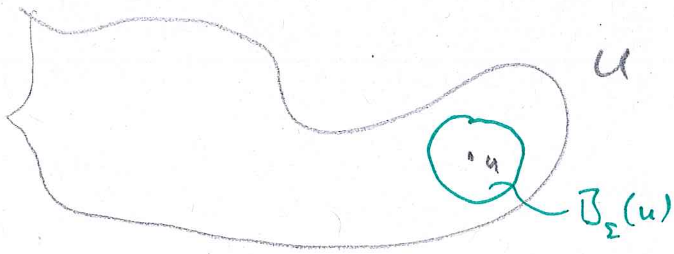
$B_\varepsilon(u) = \{ v \in X \mid d(u,v) < \varepsilon \}$, das ist der

offene $\varepsilon$-Ball um $u$.

Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt offen, wenn

es zu jedem $u \in U$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass gilt

$B_\varepsilon(u) \subseteq U$




**Bsp** • $\emptyset$, $X$ sind offen

• $B_\varepsilon(u)$ ist offen, denn: $v \in B_\varepsilon(u)$ mit $d(u,v) = r < \varepsilon$

Für $\delta = \varepsilon - r$ gilt $B_\delta(v) \subseteq B_\varepsilon(u)$ nach

Dreiecksungleichung: $w \in B_\delta(v) \Rightarrow d(u,w) \leq d(u,v) + d(v,w)$

$< \delta + r < \varepsilon$

• offene Intervalle in $\mathbb{R}$ sind offen

• $[0,1) \subseteq \mathbb{R}$ ist nicht offen, denn für $u = 0$

gibt es kein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(u) \subseteq [0,1)$.

3. **Lemma** Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum, sei $\mathcal{O}$ eine Menge von (beliebig vielen) offenen Teilmengen von $X$. Dann ist auch

$$\bigcup \mathcal{O} = \{ x \in X \mid \text{es gibt } U \in \mathcal{O} \text{ mit } x \in U \} \text{ offen.}$$

Sind $U_1, \dots, U_m \subseteq X$ offen, so ist auch

$$U_1 \cap \dots \cap U_m \subseteq X \text{ offen.}$$

Kurz: Beliebige Vereinigungen und endliche Schnitte von offenen Mengen sind offen.

Beweis Sei $x \in \bigcup \mathcal{O}$. Dann gibt es $U \subseteq X$ offen mit $x \in U \in \mathcal{O}$. Also gibt es $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq U \subseteq \bigcup \mathcal{O} \Rightarrow \bigcup \mathcal{O}$ ist offen.

Sei $x \in U_1 \cap \dots \cap U_m$. Für jedes $j = 1, \dots, m$ gibt es $\varepsilon_j > 0$ mit $B_{\varepsilon_j}(x) \subseteq U_j$. Setze $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m\}$. Dann ist $\varepsilon > 0$ und

$$B_\varepsilon(x) \subseteq U_j \text{ für } j = 1, \dots, m \Rightarrow$$

$$B_\varepsilon(x) \subseteq U_1 \cap \dots \cap U_m \qquad \square$$

Bem Ein Schnitt von unendlich vielen offenen Mengen ist nicht unbedingt offen.

Zum Beispiel ist

$$[0,1) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(-\frac{1}{k}, 1\right)}_{\text{offen}} \quad \text{nicht offen.}$$

4. <u>Def</u> Sei $(X,d)$ ein metrischer Raum. Eine Folge $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ in $X$ <u>konvergiert gegen $a \in X$</u>, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n \geq 1$ gibt, so dass für alle $k \geq n$ gilt $a_k \in B_\varepsilon(a)$ $[\Leftrightarrow d(a_k, a) < \varepsilon]$.

Man schreibt dann $a = \lim_k a_k$ und nennt $a$ den <u>Grenzwert</u> der Folge $(a_k)_{k\geq 1}$.

Wenn der Grenzwert existiert, so ist er eindeutig bestimmt: (Ü 4).

Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt <u>abgeschlossen</u>, wenn gilt: für <u>jede</u> konvergente Folge $(a_k)_{k\geq 1}$ in $A$ mit Grenzwert $\lim_k a_k = a$ gilt $a \in A$.

5. **Lemma** Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum, sei $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Dann sind äquivalent:

(i) $A$ ist abgeschlossen in $X$.

(ii) $U = X - A$ ist offen in $X$.

**Beweis** (ii) $\Rightarrow$ (i): Sei $(a_k)_{k \geq 1}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert $\lim_k a_k = a$, mit $a_k \in A$ für alle $k \geq 1$. Wäre $a \in U = X - A$, so gäbe es $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(a) \subseteq U \Rightarrow d(a, a_k) \geq \varepsilon$ für alle $k \geq 1$ ↯. Also ist $a \in A$. □

$\neg$(ii) $\Rightarrow$ $\neg$(i): angenommen, $U = X - A$ ist nicht offen. Dann gibt es $u \in U$ so, dass für jedes $k \geq 1$ $B_{1/k}(u) \not\subseteq U$ gilt, also $B_{\frac{1}{k}}(u) \cap A \neq \emptyset$. Wähle $a_k \in B_{\frac{1}{k}}(u) \cap A$. Es folgt $\lim_k a_k = u$, $a_k \in A$, $u \notin A \Rightarrow A$ nicht abgeschlossen. □

**6. Satz** Sei $(X,d)$ ein metrischer Raum, sei $\mathcal{C}$ eine (beliebige) Menge von abgeschlossenen Teilmengen von $X$. Dann ist der Schnitt $\bigcap \mathcal{C} = \{ x \in X \mid \text{für jedes } A \in \mathcal{C} \text{ gilt } x \in A \}$ abgeschlossen. Sind $A_1, \dots, A_m$ abgeschlossen, so ist auch $A_1 \cup \dots \cup A_m$ abgeschlossen.

Kurz: Beliebige Schnitte und endliche Vereinigungen abg. Teilmengen sind wieder abg. #

Beweis Sei $\mathcal{O} = \{ X - A \mid A \in \mathcal{C} \}$. Dann gilt $\bigcap \mathcal{C} = X - \bigcup \mathcal{O}$ [denn: $x \in \bigcap \mathcal{C} \Leftrightarrow$ für alle $A \in \mathcal{C}$ ist $x \in A \Leftrightarrow$ für kein $U \in \mathcal{O}$ ist $x \in U \Leftrightarrow x \in X - \bigcup \mathcal{O}$]. Da $\bigcup \mathcal{O}$ offen ist nach §0.3 ist $X - \bigcup \mathcal{O}$ abg. nach §0.5.

Zweite Beh. genauso: setze $U_j := X - A_j$, dann ist $X - (A_1 \cup \dots \cup A_m) = U_1 \cap \dots \cap U_m$ offen nach §0.3, also $A_1 \cup \dots \cup A_m$ abg nach §0.5. □

**Bem** Vereinigungen von unendlich vielen abg Mengen sind nicht unbedingt abg., etwa

$$[0,1) = \bigcup_{k\geq 1} \underbrace{[0, 1-\tfrac{1}{k}]}_{\text{abg}} \quad \text{nicht abg.}$$

**Beobachtung** • In jedem metrischen Raum $(X,d)$ sind die Teilmengen $X$ und $\emptyset$ sowohl offen als auch abg. (!)

• Im allgemeinen gibt es Teilmengen $Y \subseteq X$, die weder offen noch abg. sind, z B ist $[0,1) \subseteq \mathbb{R}$ weder offen noch abg.

7. **Def** Sei $(X,d)$ ein metrischer Raum, sei $Y \subseteq X$ eine Teilmenge. Der Abschluss von $Y$ ist die Menge

$$\overline{Y} = \bigcap \{A \subseteq X \mid A \text{ abg und } Y \subseteq A\}$$

Das Innere von $Y$ ist die Menge

$$\mathrm{Int}(Y) = \bigcup \{U \subseteq X \mid U \text{ offen und } U \subseteq Y\}$$

Es gilt also $\mathrm{Int}(Y) \subseteq Y \subseteq \overline{Y}$ und $\mathrm{Int}(Y)$ ist offen nach §0.3 und $\overline{Y}$ ist abg. nach §0.6

Bsp $Y = \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. Dann ist

$\operatorname{Int}(Y) = \emptyset$ ($\mathbb{Q}$ enthält keinen $\varepsilon$-Ball)

und $\overline{Y} = \mathbb{R}$, denn jede reelle Zahl ist Grenzwert einer Folge in $\mathbb{Q}$.

Bem Es gilt $X - \overline{Y} = \operatorname{Int}(X - Y)$

$X - \operatorname{Int}(Y) = \overline{X - Y}$

denn: $\underbrace{X - \overline{Y}}_{\text{offen}} \subseteq X - Y \Rightarrow X - \overline{Y} \subseteq \operatorname{Int}(X - Y)$

$U \subseteq X - Y$ offen $\Rightarrow A = X - U \supseteq Y$ abg $\Rightarrow \overline{Y} \subseteq A$

$\Rightarrow U \subseteq X - \overline{Y}$.

Zweite Beh. entsprechend.

8. Lemma Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum, sei $Y \subseteq X$ Teilmenge, sei $x \in X$. Dann sind äquivalent: (i) $x \in \overline{Y}$

(ii) für jedes $\varepsilon > 0$ ist $B_\varepsilon(x) \cap Y \neq \emptyset$.

Bew: $\neg(i) \Rightarrow \neg(ii)$ $x \in \underbrace{X - \overline{Y}}_{\text{offen}} \Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ mit

$B_\varepsilon(x) \subseteq X - \overline{Y}$

$\neg(ii) \Rightarrow \neg(i)$ Wenn es $\varepsilon > 0$ gibt mit $B_\varepsilon(x) \cap Y = \emptyset$, so ist $A = X - B_\varepsilon(x)$ abg, $A \supseteq Y$ und $x \notin A \Rightarrow x \notin \overline{Y}$ □

9. Erinnerung: Seien $(X, d_X)$ und $(Y, d_Y)$ metrische Räume. Eine Abbildung $f: X \to Y$ heißt stetig im Punkt $x \in X$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit $f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x))$.

$d_X(y,x) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$

Die Abbildung $f$ heißt stetig, wenn $f$ in jedem Punkt $x \in X$ stetig ist.

10. Satz: Seien $(X, d_X)$ und $(Y, d_Y)$ metrische Räume, sei $f: X \to Y$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:

(i) $f$ ist stetig

(ii) für jede offene Teilmenge $V \subseteq Y$ ist $f^{-1}(V) \subseteq X$ offen

(iii) Für jede abg. Teilmenge $A \subseteq Y$ ist $f^{-1}(A) \subseteq X$ abg.

(iv) Für jede Teilmenge $S \subseteq X$ gilt $f(\overline{S}) \subseteq \overline{f(S)}$

Beweis (i) $\Rightarrow$ (ii): Angenommen, $f$ ist stetig und $V \subseteq Y$ offen, $U = f^{-1}(V)$. Zz: $U$ ist offen.

Sei $u \in U$. Da $f(u) \in V$ und $V$ offen ist, gibt es $\varepsilon > 0$ so, dass $B_\varepsilon(f(u)) \subseteq V$ gilt. Wähle $\delta > 0$ so, dass $f(B_\delta(u)) \subseteq B_\varepsilon(f(u))$.
Dann gilt $B_\delta(u) \subseteq U$, also ist $U$ offen.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sei $A \subseteq Y$ abg., $V = Y - A$.

Dann ist $V$ offen nach § 0.5, also ist nach (ii) auch $U = f^{-1}(V)$ offen. Nun gilt allgemein

$$\underset{(\text{üA})}{f^{-1}}(\underbrace{Y-V}_{=A}) = X - \underbrace{f^{-1}(V)}_{\text{offen}} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(A) \text{ ist abg.}$$

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Es gilt $\underbrace{f^{-1}(\overline{f(S)})}_{\text{abg.}} \supseteq S$, also

$$f^{-1}(\overline{f(S)}) \supseteq \overline{S} \Rightarrow \overline{f(S)} \supseteq f(\overline{S}).$$

(iv) $\Leftrightarrow$ (i) ist üA! $\square$

Die Bedingung (ii) spricht nur über offene Mengen, nicht über Folgen.

<u>Folgerg.</u> Sind $f: X \to Y$ und $g: Y \to Z$ stetig, so auch $g \circ f: X \to Z$. Denn: $W \subseteq Z$ offen $\Rightarrow$

$$g^{-1}(W) \subseteq Y \text{ offen} \Rightarrow f^{-1}(g^{-1}(W)) = (g \circ f)^{-1}(W) \subseteq X \text{ offen.}$$

11. <u>Def</u> Sei $X$ eine Menge. Zwei Metriken $d_1, d_2$ auf $X$ heißen <u>topologisch äquivalent</u>, falls beide Metriken die gleichen offenen Mengen in $X$ liefern.

Topologisch äquivalente Metriken liefern also nach §0.10 den gleichen Begriff von Stetigkeit.

<u>Lemma</u> Seien $d_1, d_2$ Metriken auf $X$.
Angenommen, es gibt eine Zahl $L \in \mathbb{R}$, $L > 0$, so dass $d_1 \leq L \cdot d_2$ gilt. Dann ist jede $d_1$-offene Menge auch $d_2$-offen.
[Man nennt $L$ dann eine <u>Lipschitz-Konstante</u> ]

<u>Beweis</u> Sei $U \subseteq X$ $d_1$-offen, sei $u \in U$.
Dann gibt es $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon^{d_1}(u) \subseteq U$. Nun gilt: $v \in B^{d_2}_{\frac{1}{L}\varepsilon}(u) \Rightarrow d_2(u,v) < \frac{1}{L} \cdot \varepsilon$

$\Rightarrow d_1(u,v) < \varepsilon \Rightarrow v \in B_\varepsilon^{d_1}(u)$, also

$B^{d_2}_{\frac{1}{L}\varepsilon}(u) \subseteq B^{d_1}_\varepsilon(u) \subseteq U \Rightarrow U$ ist $d_2$-offen $\square$

<u>Beispiel</u> Ist $X \subseteq \mathbb{R}^m$, so sind die drei folgenden Metriken topologisch äquivalent:

(i) $d_1(u,v) = \sum_{j=1}^{m} |u_j - v_j|$

(ii) $d_2(u,v) = \left(\sum_{j=1}^{m} (u_j - v_j)^2\right)^{1/2}$

(iii) $d_\infty(u,v) = \max_j |u_j - v_j|$

Denn: $\left(\sum_{j=1}^{m} |u_j - v_j|\right)^2 \geq \sum_{j=1}^{m} |u_j - v_j|^2 \Rightarrow d_1^2 \geq d_2^2$

$\Rightarrow d_1 \geq d_2$

$\sum_{j=1}^{m} |u_j - v_j|^2 \geq \max_j |u_j - v_j|^2 \overset{(!)}{=} (\max_j |u_j - v_j|)^2$

$\Rightarrow d_2^2 \geq d_\infty^2 \Rightarrow d_2 \geq d_\infty$

$m \cdot \max_j |u_j - v_j| \geq \sum_{j=1}^{m} |u_j - v_j| \Rightarrow m \cdot d_\infty \geq d_1$

Insgesamt $d_\infty \leq d_2 \leq d_1 \leq m \cdot d_\infty$

$\square$

$\#$

Die folgende Beobachtung ist nützlich.

12. <u>Lemma</u> Sei $(X,d)$ ein metrischer Raum. Sei $\bar{d}(u,v) = \min\{d(u,v), 1\}$. Dann sind $d$ und $\bar{d}$ topologisch äquivalente Metriken.

<u>Beweis</u> <u>$\bar{d}$ ist Metrik, denn:</u> $\bar{d} \geq 0$, $\bar{d}(u,v) = \bar{d}(v,u)$, $\bar{d}(u,v) = 0 \iff d(u,v) = 0 \iff u = v$

$$\underbrace{\bar{d}(u,w)}_{\leq 1} \leq d(u,w) \leq d(u,v) + d(v,w)$$

Ist $d(u,v) > 1$, so $\bar{d}(u,v) = 1$ ✓

ist $d(v,w) > 1$, so $\bar{d}(v,w) = 1$ ✓

Wegen $\bar{d} \leq d$ ist jede $\bar{d}$-offene Menge $d$-offen.

Ist $U \subseteq X$ $d$-offen, $u \in U$, so gibt es $\varepsilon > 0$ mit $B^d_\varepsilon(u) \subseteq X$. Setze $\delta = \min\{\frac{1}{2}, \varepsilon\} \Rightarrow B^d_\delta(u) \subseteq X$ und $B^d_\delta(u) = B^{\bar{d}}_\delta(u) \Rightarrow U$ ist $\bar{d}$-offen □

13. <u>Def</u> Seien $(X_1, d_1), \dots, (X_m, d_m)$ metrische Räume. Setze $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m$ und

$$d(u,v) = \sum_{j=1}^{m} d_j(u_j, v_j) \qquad u,v \in X.$$

Dann ist $(X,d)$ ein metrischer Raum, denn:

$d(u,v) = d(v,u) \geq 0$ (✓)

$d(u,v) = 0 \Leftrightarrow d_j(u_j,v_j) = 0$ für alle $j \Leftrightarrow u = v$ (✓)

$$d(u,w) = \sum_{j=1}^{m} d_j(u_j,w_j) \leq \sum_{j=1}^{m} \left(d_j(u_j,v_j) + d_j(v_j,w_j)\right)$$

$= d(u,v) + d(v,w)$ für $u,v,w \in X$ (✓)

Weiter ist für jedes $j = 1, \dots, m$ die Abbildung

$pr_j : X \to X_j \quad (u_1, \dots, u_m) \mapsto u_j$ <u>stetig</u>, denn:

Ist $U \subseteq X_j$ offen, so ist $pr_j^{-1}(U) = X_1 \times \dots \times X_{j-1} \times U \times X_{j+1} \times \dots \times X_m =: W$

Für $u \in W$, $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon^{d_j}(u_j) \subseteq U$ folgt

$B_\varepsilon^{d}(u) \subseteq W$, denn $d(u,v) < \varepsilon \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} d_i(u_i,v_i) < \varepsilon$

$\Rightarrow d_j(u_j,v_j) < \varepsilon$. Also ist $W = pr_j^{-1}(U) \subseteq X$

offen, damit ist $pr_j$ stetig nach §0.10. □

**14. Satz** Seien $(Y, d_Y)$ sowie $(X_1, d_1), \dots, (X_m, d_m)$ metrische Räume, sei $X = X_1 \times \dots \times X_m$ und

$$d(u,v) = \sum_{j=1}^{m} d_j(u_j, v_j)$$

wie in §0.13. Sei $f: Y \to X$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:

(i) $f$ ist stetig

(ii) Für jedes $j = 1, \dots, m$ ist die Abbildung

$$f_j = pr_j \circ f : Y \to X_j \quad \text{stetig}$$

**Beweis** (i) $\Rightarrow$ (ii) $f$ stetig. Die $pr_j$ sind nach §0.13 stetig, also auch $f_j = pr_j \circ f$ (Verknüpfung stetiger Abbildungen sind stetig)

(ii) $\Rightarrow$ (i) Angenommen, $f_1, \dots, f_m$ sind stetig. Sei $W \subseteq X$ offen. Zz: $f^{-1}(W) \subseteq Y$ ist offen. Sei $w \in W$, $\varepsilon > 0$ mit $B^d_\varepsilon(w) \subseteq W$. Es gilt $pr_j(W) \supseteq B^{d_j}_\varepsilon(w_j)$ nach Konstruktion von $d$, also

$$f^{-1}(W) \supseteq \underbrace{f_j^{-1}(B^{d_j}_\varepsilon(w_j))}_{\text{offen}}.$$

Ist $f(y) = w$, so folgt

$$y \in f_j^{-1}(B^{d_j}_\varepsilon(w_j)) \subseteq f^{-1}(W) \Rightarrow$$

$$y \in \underbrace{\bigcap_{j=1}^{m} f_j^{-1}(B^{d_j}_\varepsilon(w_j))}_{\text{offen nach §0.3}} \subseteq f^{-1}(W) \Rightarrow f^{-1}(W) \text{ offen} \quad \square$$

In Satz §0.14 wird eine <u>universelle Eigenschaft</u> formuliert: eine Abbildung $Y \xrightarrow{f} X = X_1 \times \dots \times X_m$ ist genau dann stetig, wenn alle Kompositionen

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f_j"'] & X \arrow[d, "pr_j"] \\ & X_j \end{tikzcd}$$

stetig sind. Solche universellen Eigenschaften sind in der Topologie wichtig und werden immer wieder auftauchen. Hier besagt sie, dass die Definition der Metrik $d$ auf $X_1 \times \dots \times X_m$ die "korrekte" Definition ist.