§1. Topologische Räume

1. <u>Def</u> Sei X eine Menge, sei $\mathcal{T}$ eine Menge von Teilmengen von X. Wir nennen $\mathcal{T}$ eine <u>Topologie</u> auf X, wenn gilt:

(Top1) $\emptyset \in \mathcal{T}$ und $X \in \mathcal{T}$

(Top2) Ist $U_1, \ldots, U_m \in \mathcal{T}$, so ist auch

$$U_1 \cap \ldots \cap U_m \in \mathcal{T}$$

(Top3) Ist $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{T}$ eine Teilmenge, so ist

$$\bigcup \mathcal{O} = \{x \in X \mid \text{es gibt } U \in \mathcal{O} \text{ mit } x \in U\} \in \mathcal{T}$$

Die Elemente von $\mathcal{T}$ nennen wir <u>offene Mengen</u>. Das Paar $(X, \mathcal{T})$ heißt <u>topologischer Raum</u>.

<u>Beispiele</u> (a) X beliebig, $\mathcal{T}_{\text{Klump}} = \{\emptyset, X\}$

Dann ist $\mathcal{T}_{\text{Klump}}$ eine Topologie, die <u>Klumpen-Topologie</u>

(b) X beliebig, $\mathcal{T}_{\text{disk}} = \underset{\text{Potenzmenge von } X}{\mathcal{P}(X)} = \{U \mid \underset{\text{Teilmenge}}{U \subseteq X}\}$

Dann ist $\mathcal{T}_{\text{disk}}$ eine Topologie, die

<u>diskrete Topologie</u>.

(c) X beliebig, $\mathcal{T}_{kof} = \{ U \subseteq X \mid X - U \text{ endlich} \} \cup \{\emptyset\}$.

Dann ist $\mathcal{T}_{kof}$ eine Topologie auf X, die kofinite (koendliche) Topologie.

(d) (X, d) metrischer Raum, $\mathcal{T}_d = \{ U \subseteq X \mid U \text{ offen bzgl. } d \}$ ist Topologie nach §0.3.

Es gilt stets

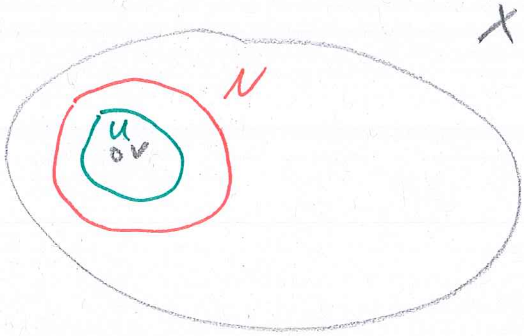
$$\mathcal{T}_{klump} \subseteq \mathcal{T}_{kof} \subseteq \mathcal{T}_d \subseteq \mathcal{T}_{disk}.$$

Die Topologien (a) – (c) sind hauptsächlich für Gegenbeispiele gut.

2. Def Sei $\mathcal{T}$ eine Topologie auf einer Menge X. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt abgeschlossen (bezüglich der Topologie $\mathcal{T}$) wenn $X - A = U$ offen ist, d.h. wenn $X - A \in \mathcal{T}$ gilt.

Wie in §0.6 folgt rein formal: $\emptyset, X$ sind stets abg., endliche Vereinigungen und beliebige Durchschnitte abg. Mengen sind wieder abg.

3. **Def** Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, sei $v \in X$. Eine Teilmenge $N \subseteq X$ heißt Umgebung von v, wenn es eine offene Menge $U \subseteq X$ gibt mit $v \in U \subseteq N$.



Bsp. In der normalen Topologie von $\mathbb{R}$ ist $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \subseteq \mathbb{R}$ eine Umgebung von 0, denn $0 \in (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \subseteq [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$.

Sei $Y \subseteq X$ eine Teilmenge. Wir nennen $v \in X$ einen Häufungspunkt von Y, falls es in jeder Umgebung N von v einen Punkt $y \in Y$ gibt mit $y \neq v$.

Bsp $Y = \{\frac{1}{n} \mid n \geq 1\}$. Dann ist $\frac{1}{10} \in Y$ kein H.P. von Y, denn: $(\frac{1}{11}, \frac{1}{9}) \cap Y = \{\frac{1}{10}\}$.
Dagegen ist 0 ein Häufungspunkt von Y. #

ÜA: $\overline{Y} = Y \cup \{v \in X \mid v \text{ ist H.P. von } Y\}$

Der Abschluss einer Teilmenge $Y \subseteq X$ ist $\overline{Y} = \bigcap \{A \subseteq X \mid A \text{ abg. und } A \supseteq Y\}$, damit ist $\overline{Y}$ die kleinste abg. Menge, die Y enthält.

4. <u>Def</u> Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ in X <u>konvergiert gegen $v \in X$</u>, falls für jede Umgebung N von v ein $m \geq 1$ existiert, so dass für alle $k \geq m$ gilt

$$x_k \in N \qquad \text{(vgl. } \varepsilon\text{-}\delta\text{- Definition von Konvergenz)}$$

<u>Bsp</u> (a) (X, d) metrischer Raum. Dann ist der Konvergenzbegriff genau der übliche.

(b) $X = \mathbb{N}$ in der kofiniten Topologie $\mathcal{T}_{kof}$, $x_n = n$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$. Die Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert bezüglich $\mathcal{T}_{kof}$ gegen <u>jede</u> Zahl $l \in \mathbb{N}$, denn: $N \subseteq \mathbb{N}$ Umgebung von l bzgl $\mathcal{T}_{kof}$

$\Leftrightarrow$ $l \in N$ und $\mathbb{N} - N$ <u>endlich</u>

$\Rightarrow$ $x_n \in N$ für alle genügend großen n

Fazit: Folgen in topologischen Räumen verhalten sich manchmal problematisch.

5. <u>Def</u> Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ heißt <u>Basis</u> der Topologie $\mathcal{T}$, wenn für jede offene Menge $V \in \mathcal{T}$ gilt

$$V = \bigcup \{ U \in \mathcal{B} \mid U \subseteq V \}$$

d.h. wenn es zu jedem $v \in V$ ein $U \in \mathcal{B}$ gibt mit $v \in U \subseteq V$.

<u>Bsp</u> (a) $\mathcal{B} = \mathcal{T}$ ist Basis.

(b) (X, d) metrischer Raum, $\mathcal{B} = \{ B_\varepsilon(v) \mid \varepsilon > 0$ und $v \in X \} \subseteq \mathcal{T}_d$ ist Basis

(c) $\mathbb{R}$ mit üblicher Topologie, $\mathcal{B} = \{ (r-\varepsilon, r+\varepsilon) \mid r, \varepsilon \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0 \}$ ist eine Basis (!).

<u>Satz</u> Sei X eine Menge, sei $\mathcal{B}$ eine Menge von Teilmengen mit folgenden beiden Eigenschaften:

(B1) $X = \bigcup \mathcal{B}$, zu jedem $v \in X$ gibt es $V \in \mathcal{B}$ mit $v \in V$

(B2) Ist $U, V \in \mathcal{B}$ und $w \in U \cap V$, so gibt es $W \in \mathcal{B}$ mit $w \in W \subseteq U \cap V$.

Wir nennen $U \subseteq \mathcal{B}$ eine <u>$\mathcal{B}$-offene Menge</u>, falls gilt $U = \bigcup \{ V \in \mathcal{B} \mid V \subseteq U \}$

Dann bilden die $\mathcal{B}$-offenen Mengen eine Topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ mit Basis $\mathcal{B}$.

<u>Bew.</u> Es gilt: $\emptyset, X$ sind $\mathcal{B}$ offen (wegen (B1)). Ist $U_1, \dots, U_m \in \mathcal{B}$ und $w \in U_1 \cap \dots \cap U_m$, so folgt aus (B2) mit Induktion: es gibt $W \in \mathcal{B}$ mit $w \in W \subseteq U_1 \cap \dots \cap U_m$. (*)

An genommen, $V_1, \dots, V_m$ sind $\mathcal{B}$-offen und $w \in V_1 \cap \dots \cap V_m$. Dann gibt es $U_1, \dots, U_m \in \mathcal{B}$ mit $w \in U_j \subseteq V_j$ für $j = 1, \dots, m$ $\Rightarrow$ $w \in U_1 \cap \dots \cap U_m \overset{(*)}{\Rightarrow}$ es gibt $W \in \mathcal{B}$ mit $w \in W \subseteq U_1 \cap \dots \cap U_m \subseteq V_1 \cap \dots \cap V_m$ $\Rightarrow$ $V_1 \cap \dots \cap V_m$ ist $\mathcal{B}$-offen. Also gilt (Top 2).

Ist $\mathcal{C}$ eine Menge von $\mathcal{B}$ offen Mengen und ist $v \in \bigcup \mathcal{C}$, so gibt es $V \in \mathcal{C}$ mit $v \in V$ $\Rightarrow$ es gibt $U \in \mathcal{B}$ mit $v \in U \subseteq V$ $\Rightarrow$ $\bigcup \mathcal{C}$ ist $\mathcal{B}$-offen. Also gilt (Top3), damit bilden die $\mathcal{B}$-offen Mengen eine Topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.

Nach Konstruktion ist $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.

Beispiel $X = \mathbb{R}$,

$\mathcal{L} = \{ [a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}, a < b \}$ erfüllt

die Bedingungen (B1) und (B2). Die

Topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ heißt die Sorgenfrey-Topologie

auf $\mathbb{R}$. Wegen

$$(a,b) = \bigcup \{ [c,b) \mid a < c < b \}$$

gilt $\mathcal{T}_d \subsetneq \mathcal{T}_{\mathcal{L}}$. Die Sorgenfrey-Topologie

ist für Gegenbeispiele gut.

6. Die Ordnungstopologie

Erinnerung: Sei $(X,<)$ eine geordnete Menge,

d.h. für alle $u,v,w \in X$ gilt

(O1) $u < v < w \Rightarrow u < w$

(O2) $u < v \Rightarrow u \neq v$

(O3) $u \neq v \Rightarrow u < v$ oder $v < u$.

Für $u,v \in X$ schreibe

$$(u,w) = \{ v \in X \mid u < v < w \}$$

$$(-\infty, u) = \{ v \in X \mid v < u \}$$

$$(u, \infty) = \{ v \in X \mid u < v \}.$$

Dann ist $\mathcal{O} = \{ (u,v) \mid u,v \in X,\ u<v \}$
$\cup \{ (-\infty,u), (u,\infty) \mid u \in X \} \cup \{X\}$

Basis einer Topologie $\mathcal{T}_<$, der <u>Ordnungstopologie</u>.

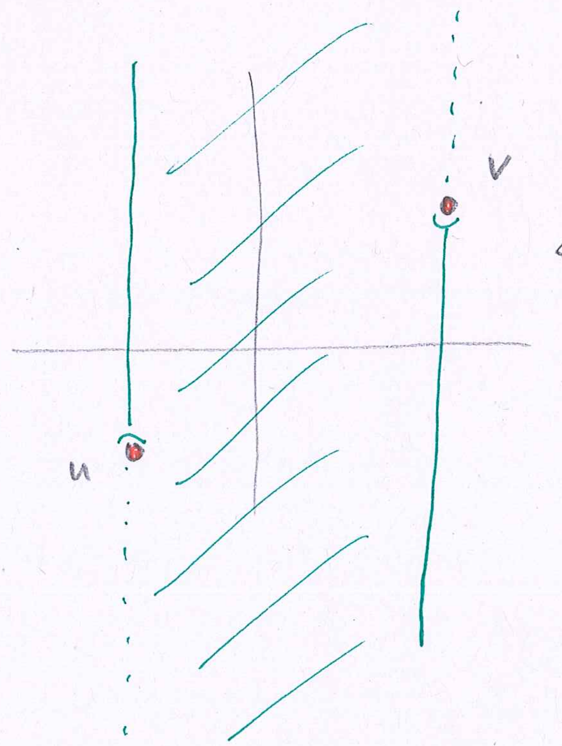
(Nachrechnen: $(u_1, v_1) \cap (u_2, v_2) = \begin{cases} (u_3, v_3) \\ \emptyset \end{cases}$ mit einiger Fallunterscheidungen ...)

<u>Beispiel</u> (a) $(\mathbb{R}, <)$ hier stimmt die Ordnungstopologie mit der metrischen Topologie überein,

$$\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_<$$

(b) $(\mathbb{R}^2, <)$ mit lexikographischer Anordnung:

$$u = (u_1, u_2) < v = (v_1, v_2) \iff \begin{cases} u_1 < v_1 \text{ oder} \\ u_1 = v_1,\ u_2 < v_2 \end{cases}$$



Das Intervall (u,v)

Die Ordnungstopologie auf $\mathbb{R}^2$ stimmt <u>nicht</u> mit der üblichen Topologie überein.

7. <u>Wohlgeordnete Mengen</u> Eine geordnete Menge $(X,<)$ heißt <u>wohlgeordnet</u>, wenn jede nicht leere Teilmenge $Y \subseteq X$ ein kleinstes Element enthält. <u>Bsp</u>
- $(\mathbb{N}, <)$ ist wohlgeordnet
- $(\mathbb{Z}, <)$ ist <u>nicht</u> wohlgeordnet ($\mathbb{Z}$ hat kein kleinstes Element)
- $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ ist nicht wohlgeordnet, $Y = \{\frac{1}{n} \mid n \geq 1\}$ hat kein kleinstes Element.

Wenn $(X,<)$ wohlgeordnet ist und wenn $\alpha \in X$ kein maximales Element ist, so existiert

$$\min \{\xi \in X \mid \alpha < \xi\} = \alpha^+$$

Man nennt α^+ den <u>Nachfolger</u> von α. Bsp: in $(\mathbb{N}, <)$ ist $n^+ = n+1$ #

Schreibe $X_\alpha = \{\xi \in X \mid \xi < \alpha\}$, dann gilt:

$\alpha \in X$ ist ein Nachfolger $\Leftrightarrow$ X_α enthält ein maximales Element.

Wir konstruieren nun einen exotischen topologischen Raum, <u>Alexandrovs Halbgerade</u> L.

8. Der Wohlordnungssatz besagt: auf jeder Menge M existiert mindestens eine Wohlordnung "<". (Mit Zornschem Lemma) Insbesondere folgt: es gibt überabzählbare (= nicht abzählbare) wohlgeordnete Mengen.

Sei $(X,<)$ eine überabzählbare wohlgeordnete Menge.

Sei $\omega_0 = \{\xi \in X \mid X_\xi \text{ endlich}\}$ $\qquad X_\xi = \{\alpha \in X \mid \alpha < \xi\}$

$\omega_1 = \{\xi \in X \mid X_\xi \text{ abzählbar}\}$

Lemma A $(\omega_0, <)$ ist ordnungsisomorph zu $(\mathbb{N}, <)$, d.h. es gibt eine bijektive ordnungserhaltende Abbildung $j : \omega_0 \to \mathbb{N}$.

Beweis Setze $j(\xi) = \# X_\xi$ (Anzahl der Elemente).

Ist $\xi < \eta$, so ist $j(\xi) < j(\eta)$ $\Rightarrow$ j ist injektiv und ordnungserhaltend. Für $\alpha_0 = \min \omega_0$ gilt $X_{\alpha_0} = \emptyset \Rightarrow j(\alpha_0) = 0$. Für $\alpha \in \omega_0$ mit Nachfolger α^+ gilt $X_{\alpha^+} = X_\alpha \cup \{\alpha\} \Rightarrow j(\alpha^+) = j(\alpha) + 1$

es folgt mit Induktion, dass $j(\omega_0) = \mathbb{N}$, also ist j bijektiv. $\square$

<u>Lemma B</u> Es gilt $\omega_1 = \bigcup\{X_\xi \mid \xi \in \omega_1\}$.

<u>Beweis</u> Ist $\alpha < \xi \in \omega_1$, so ist $X_\alpha \subseteq X_\xi \Rightarrow X_\alpha$ abzählbar $\Rightarrow \alpha \in \omega_1 \Rightarrow X_\xi \subseteq \omega_1$, also "$\supseteq$".

Ist $\xi \in \omega_1$, so ist $\xi^+ \in \omega_1$, da $X_{\xi^+} = X_\xi \cup \{\xi\}$ abzählbar ist, und $\xi \in X_{\xi^+} \Rightarrow$ "$\subseteq$" $\square$

<u>Lemma C</u> ω_1 ist überabzählbar.

<u>Beweis</u> Angenommen, ω_1 wäre abzählbar. Dann wäre $X - \omega_1 \neq \emptyset$. Sei $\alpha = \min(X - \omega_1)$. Für alle $\xi < \alpha$ folgt $\xi \in \omega_1 \Rightarrow X_\alpha \subseteq \omega_1$ abzählbar $\Rightarrow \alpha \in \omega_1$ $\lightning$ $\square$

[Mit etwas mehr Arbeit kann man zeigen: $(\omega_1, <)$ ist bis auf Ordnungsisomorphie eindeutig bestimmt.
Die Kontinuumshypothese sagt: $\#\omega_1 = \#\mathbb{R}$.]

8. Alexandrovs Halbgerade L

Motivation: Wenn wir $\mathbb{N} \times [0,1)$ mit der lexikographischen Ordnung "$<$" versehen, so ist $(\mathbb{N} \times [0,1), <)$ ordnungsisomorph zu $[0,\infty) \subseteq \mathbb{R}$

via $h: \mathbb{N} \times [0,1) \to \mathbb{R}$, $(n,s) \mapsto n+s$

n: Vorkomma, s: Nachkomma

Def Alexandrovs Halbgerade ist

$$L = \omega_1 \times [0,1)$$

versehen mit der lexikographischen Ordnung $<$ und der zugehörigen Ordnungstopologie $\mathcal{T}_<$ auf L.

Satz Für jedes $\alpha \in \omega_1$ ist die Menge

$$L_\alpha = \{ (\xi,t) \mid (\xi,t) < (\alpha,0) \} \subseteq L$$

ordnungsisomorph zu einem halboffenen Intervall $[0,r) \subseteq \mathbb{R}$ (oder leer, wenn $\alpha = \min \omega_1$)

Bew 1. Schritt: Das ist wahr für alle $\alpha \in \omega_0$.

Denn $\alpha \in \omega_0$, $j(\alpha) = \# \{ \xi \in \omega_1 \mid \xi < \alpha \}$

$j(\alpha) = 0 \Rightarrow L_\alpha = \emptyset$ (v).

$j(\alpha) = n+1 > 0 \Rightarrow L_\alpha$ Ordgs isomph zu $[0, n+1)$ via $(\xi, t) \mapsto j(\xi) + t$ (✓)

2. Schritt: Das ist wahr für alle $\alpha \in \omega_1$

Denn wenn nicht, gibt es ein kleinstes Gegenbeispiel $\alpha \in \omega_1$ wo das nicht gilt, und $\alpha \notin \omega_0$.
Wir betrachten dieses α genauer.

Fall a: α ist Nachfolger, $\alpha = \beta^+$

Dann gibt es ein Ordgs isomorphismus
$$h : L_\beta \longrightarrow [0, r)$$
Wir setzen h fort zu $\hat{h} : L_\alpha \longrightarrow [0, r+1)$
durch
$$\hat{h}(\xi, t) = \begin{cases} h(\xi, t) & \text{wenn } (\xi, t) < (\beta, 0) \\ r+s & \text{wenn } (\xi, t) = (\beta, s) \end{cases}$$

↯

Fall b: α ist kein Nachfolger

Die Menge $B = \{ \xi \in \omega_1 \mid \xi < \alpha \} \subseteq \omega_1$ ist abzählbar, vgl. Lemma B §1.7. Schreibe also $B = \{ \beta_k \mid k = 0, 1, 2, \ldots \}$ und setze $\gamma_k = \max\{\beta_0, \ldots, \beta_k\}$

Dann ist die Folge $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$ in B monoton und zu jedem $\beta \in B$ gibt es ein k mit $\gamma_k > \beta$.

Durch Übergang auf eine Teilfolge erhalten wir eine streng monotone Folge $(\xi_k)_{k=0}^{\infty}$ in B, und für jedes $\beta \in B$ gibt es ein k mit $\beta < \xi_k$.

Damit konstruieren wir einen Ordnungsisomorphismus

$$f : L_\alpha \longrightarrow [0,\infty) \quad \text{mit}$$

$$f(\xi_k, t) = k+t$$

Aber $[0,\infty) \subseteq \mathbb{R}$ ist ordnungsisomorph zu $[0,1)$, etwa durch $h(x) = \frac{x}{x+1}$ ↯ $\square$

Korollar In L hat jede Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ eine konvergente Teilfolge. Aber L ist nicht kompakt.

Beweis Schreibe $x_n = (\xi_n, t_n)$. Da ω_1 überabzählbar ist, gibt es $\alpha \in \omega_1$ so, dass $\xi_n < \alpha$ für alle n. Es folgt: $x_n \in \underbrace{L_\alpha \cup \{(\alpha,0)\}}$ ordnungsisomorph zu $[0,1]$ $\overset{\text{Ana I}}{\Rightarrow}$ es gibt eine konvergente Teilfolge.

Die offene Überdeckung $\{ L_\alpha \mid \alpha \in \omega_1 \}$ von L hat keine endliche Teilüberdeckung. $\square$

9. Def Sei $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ top. Räume.
Eine Abbildung $f: X \to Y$ heißt stetig, wenn für jede offene Teilmenge $V \subseteq Y$ das Urbild $f^{-1}(V) \subseteq X$ offen ist. #

Satz A Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ top. Räume, sei $f: X \to Y$ eine Abbildung.
Dann sind äquivalent:

(i) f ist stetig.

(ii) für jede abg. Teilmenge $A \subseteq Y$ ist $f^{-1}(A) \subseteq X$ abg.

(iii) für jede Teilmenge $S \subseteq X$ ist $f(\bar{S}) \subseteq \overline{f(S)}$.

Bew: (i) $\Leftrightarrow$ (ii): $A \subseteq Y$ abg $\Leftrightarrow$ $V = Y - A$ offen
und
$$f^{-1}(A) = X - f^{-1}(V)$$
$$f^{-1}(V) = X - f^{-1}(A)$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii): es gilt $S \subseteq f^{-1}(f(S))$ $\rightsquigarrow$
$$S \subseteq \underbrace{f^{-1}(\overline{f(S)})}_{\text{abg}} \rightsquigarrow \bar{S} \subseteq f^{-1}(\overline{f(S)})$$
$$\rightsquigarrow f(\bar{S}) \subseteq \overline{f(S)}$$

(iii) $\Rightarrow$ (ii): sei $A \subseteq Y$ abg., $S = f^{-1}(A)$.

Dann gilt $f(S) \subseteq A \Rightarrow \overline{f(S)} \subseteq \bar{A} = A$.
Da $\overline{f(S)} \supseteq f(\bar{S})$ folgt $f(\bar{S}) \subseteq A$, d.h. $\bar{S} \subseteq S$,
also $\bar{S} = S$. $\square$

<u>Satz B</u> Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ top. Räume, sei $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathcal{T}_Y$ (z.B. $\mathcal{B} = \mathcal{T}_Y$). Sei $f: X \to Y$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent: (i) f ist stetig.
(ii) für jedes $V \in \mathcal{B}$ ist $f^{-1}(V)$ offen
(iii) Für jedes $x \in X$ und jede Umgebung N von $f(x)$ gibt es eine Umgebung M von x mit $f(M) \subseteq N$ ("ε-δ-Kriterium").

<u>Beweis</u> (i) $\Rightarrow$ (ii): klar, denn $V \in \mathcal{B} \Rightarrow V$ offen.
(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sei N Umgebung von $f(x)$. Dann gibt es $V \in \mathcal{B}$ mit $f(x) \in V \subseteq N$ und $M = f^{-1}(V)$ ist offen, $x \in M$, $f(M) \subseteq V \subseteq N$.
(iii) $\Rightarrow$ (i): Sei $V \subseteq Y$ offen, $U = f^{-1}(V)$.
Sei $u \in U$. Dann ist V Umgebung von $f(u)$, also gibt es eine Umgebung M von u mit $f(M) \subseteq V \Rightarrow M \subseteq U$, es gibt $W_u \subseteq X$ offen mit $u \in W_u \subseteq M \subseteq U$

Damit ist $U = \bigcup \{ \underbrace{W_u}_{\text{off}} \mid u \in U \}$ offen. $\square$

<u>Beispiele</u> (a) $f: X \to Y$ konstante Abbildung.

Für $V \subseteq Y$ gilt $f^{-1}(V) = \emptyset$ oder $f^{-1}(V) = X$

$\Rightarrow$ f ist stetig.

(b) $f = id_X$ $\quad f^{-1}(V) = V \rightsquigarrow id_X$ stetig

$(X, \mathcal{T}_X) = (Y, \mathcal{T}_Y)$

(c) $(X, \mathcal{T}_X)$ beliebig, $\mathcal{T}_Y = \mathcal{T}_{Klump} = \{\emptyset, Y\}$

Dann ist <u>jede</u> $f: X \to Y$ stetig

(d) $(Y, \mathcal{T}_Y)$ beliebig, $\mathcal{T}_X = \mathcal{T}_{disc} = \mathcal{P}(X)$.

Dann ist <u>jede</u> $f: X \to Y$ stetig.

(e) (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Dann ist f stetig im Sinne von §1.9 gdw.

f stetig ist im Sinne von §0.9 / §0.10.

<u>Satz 6</u> Sind $f: X \to Y$ und $g: Y \to Z$ stetige Abbildungen (bzgl. Topologien $\mathcal{T}_X, \mathcal{T}_Y, \mathcal{T}_Z$), so ist die Hintereinanderausführung

$$g \circ f : X \to Z \quad \text{stetig.}$$

<u>Beweis</u> Sei $W \subseteq Z$ offen. Dann ist

$$(g\circ f)^{-1}(W) = \underbrace{f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(W)}_{\text{offen}})}_{\text{offen}} = U \text{ offen.} \quad \square$$

10. __Def__ Es seien X, Y topologische Räume. (*)
Wir setzen

$$C(X,Y) = \{ f : X \to Y \mid f \text{ ist stetig} \}$$

Dann ist $C(X,X) = \{ f : X \to X \mid f \text{ stetig} \}$ ein __Monoid__ bzgl der Verknüpfung
$\circ : (f,g) \longmapsto f\circ g$ mit Neutralelement id_X [d.h. $(f\circ g)\circ h = f\circ(g\circ h)$ und $\mathrm{id}_X \circ f = f = f\circ \mathrm{id}_X$ für alle $f,g,h \in C(X,X)$]

Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ heißt __Homöomorphismus__, wenn es $h : Y \to X$ stetig gibt mit

$$f\circ h = \mathrm{id}_Y \ \underline{\text{und}} \ h\circ f = \mathrm{id}_X .$$

(*) __Konvention:__ ab jetzt schreiben wir: "sei X ein top. Raum" statt "sei $(X, \mathcal{T}_X)$ ein top. Raum", wenn nur eine Topologie auf X betrachtet wird.

Mit anderen Worten: f ist ein Homöomorphismus, wenn f stetig und bijektiv ist <u>und</u> wenn die Umkehrabbildung von f stetig ist.

<u>Beispiel</u> $X = \mathbb{R} = Y$ $\quad \mathcal{T}_X$ diskrete Topologie

$\mathcal{T}_Y$ normale Topologie auf $\mathbb{R}$

Dann ist $f(t) = t$ stetig als Abbildung $X \to Y$, denn: $V \subseteq \mathbb{R}$ offen in normaler Topologie $\Rightarrow$ $V \subseteq \mathbb{R}$ offen in diskreter Topologie. Weiter ist f bijektiv. Aber die Umkehrabbildung h von f ($h(t) = t$) ist <u>nicht</u> stetig. Z.B. ist $\{0\} \subseteq \mathbb{R}$ offen in der diskreten Topologie, aber $h^{-1}(\{0\}) = \{0\} \subseteq \mathbb{R}$ ist <u>nicht</u> offen in der normalen Topologie.

11. <u>Def</u> Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, sei $Y \subseteq X$ eine beliebige Teilmenge. Wir definieren

$$\mathcal{T}|Y = \{ U \cap Y \mid U \subseteq X \text{ offen} \}$$

Dann ist $(Y, \mathcal{T}|Y)$ ein topologischer Raum. Man nennt $\mathcal{T}|Y$ die <u>Teilraumtopologie</u> auf Y. Die Inklusionsabbildung $j : Y \to X$, $y \mapsto y$ ist stetig.

Beweis, dass $\mathcal{T}|Y$ eine Topologie ist:

$X \cap Y = Y \quad \emptyset \cap Y = \emptyset \Rightarrow \emptyset, Y \in \mathcal{T}|Y$

Sei $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$ eine Teilmenge. Dann gilt

$$\bigcup \{ U \cap Y \mid U \in \mathcal{C} \} = (\bigcup \mathcal{C}) \cap Y$$

$$\bigcap \{ U \cap Y \mid U \in \mathcal{C} \} = (\bigcap \mathcal{C}) \cap Y$$

Es folgt: $V_1, \dots, V_m \in \mathcal{T}|Y \Rightarrow V_1 \cap \dots \cap V_m \in \mathcal{T}|Y$

$\mathcal{D} \subseteq \mathcal{T}|Y$ Teilmenge $\Rightarrow \bigcup \mathcal{D} \in \mathcal{T}|Y$, d.h. $\mathcal{T}|Y$ ist eine Topologie. $\square$

Beweis, dass $j: Y \hookrightarrow X$ stetig ist:

Sei $V \subseteq X$ offen. Dann ist $j^{-1}(V) = V \cap Y$ offen in $Y \Rightarrow j$ ist stetig. $\square$

Vorsicht: Ist $Z \subseteq Y$ offen (abg.) in der Teilraumtopologie von Y, so folgt nicht unbedingt, dass $Z \subseteq X$ offen (abg.) in X ist.

Bsp $X = \mathbb{R}$ $Y = \{0\} \leadsto \{0\}$ offen in Y, aber nicht offen in X.

12. <u>Satz</u> Sei $(X, \mathcal{T})$ top. Raum, sei $Y \subseteq X$ ein Teilraum. Dann gilt:

(a) $A \subseteq Y$ ist abg in $Y \Leftrightarrow$ es gibt $B \subseteq X$ abg. mit $A = B \cap Y$

(b) Ist Y abg. in X und ist $A \subseteq Y$ abg. in Y, so ist A abg. in X

(c) Ist Y offen in X und ist $W \subseteq Y$ offen in Y, so ist W offen in X

(d) Ist $S \subseteq Y$, so ist $\overline{S} \cap Y$ der Abschluss von S in Y. #

<u>Beweis</u> (a) $A \subseteq Y$ abg $\Leftrightarrow$ es gibt $U \subseteq X$ offen mit $Y - A = U \cap Y \Leftrightarrow$ es gibt $U \subseteq X$ offen mit $A = Y - U = Y - (Y \cap U) \Leftrightarrow$ es gibt $B \subseteq X$ abg mit $A = B \cap Y$.

(b) $A = B \cap Y$, $B \subseteq X$ abg, Y abg $\Rightarrow$ A abg in X

(c) $W = U \cap Y$, $U \subseteq X$ offen, Y offen $\Rightarrow$ W offen in X

(d) $\overline{S} \cap Y$ ist abg. in Y und $S \subseteq \overline{S} \cap Y$.
Ist $A \subseteq Y$ abg in Y mit $S \subseteq A$, so gibt es $B \subseteq X$ abg. mit $S \subseteq B$ und $A = B \cap Y$
$\Rightarrow \overline{S} \subseteq B \Rightarrow \overline{S} \cap Y \subseteq A$ $\square$

Bem Ist $f: X \longrightarrow Z$ eine stetige Funktion zwischen top. Räumen X, Z und ist $Y \subseteq X$ eine Teilmenge, dann ist auch die Einschränkung $f|_Y : Y \to Z$ stetig in der Teilraumtopologie. (ÜA)

Das folgende Kriterium ist nützlich um zu zeigen, dass eine durch Fallunterscheidungen definierte Funktion stetig ist.

13. <u>Satz</u> Seien X, Y topologische Räume, seien $A_1, \dots, A_m \subseteq X$ abg. Teilmengen mit $X = A_1 \cup \dots \cup A_m$. Sei $f: X \to Y$ eine Abbildung. Wenn für jedes j die Einschränkung $f|_{A_j}: A_j \to Y$ stetig ist, so ist f stetig.

<u>Beweis</u> Sei $B \subseteq Y$ abg. Setze $f_j := f|_{A_j}: A_j \to Y$. Dann gilt $f_j^{-1}(B) = f^{-1}(B) \cap A_j$ und damit ist

$$f^{-1}(B) = \bigcup_{j=1}^{m} \left(f_j^{-1}(B) \right) = \bigcup_{j=1}^{m} \Big(\underbrace{f^{-1}(B) \cap A_j}_{\substack{\text{abg in } A_j, \\ \text{also abg. in } X}} \Big) \quad \text{abg.} \quad \square$$

<u>Bsp</u>: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \begin{cases} x & \text{wenn } x \geq 0 \\ -\frac{1}{2}x & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$

ist stetig, denn f ist stetig auf $[0, \infty)$ und stetig auf $(-\infty, 0]$, $\quad \mathbb{R} = \underbrace{(-\infty, 0] \cup [0, \infty)}_{\text{abg}}$

Nun kommen wir zu <u>Produkten</u> topologischer Räume.

<u>Vorüberlegung</u> Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ top. Räume.

Sei $Z = X \times Y$. Wie definieren wir offene Mengen in Z?

<u>Versuch:</u> $W \subseteq Z$ offen, wenn $W = U \times V$ $\quad U \subseteq X$ offen

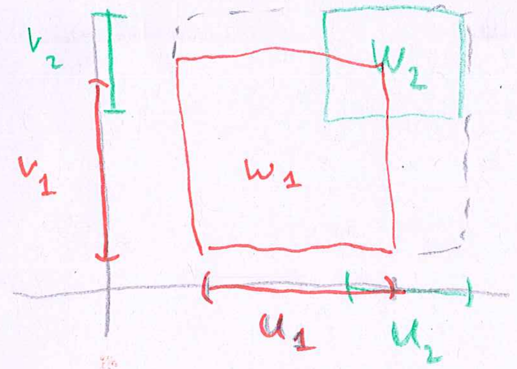
$V \subseteq Y$ offen.

Dann sind $\emptyset, Z$ offen ⇝ (TOP1)

$U_1, \dots, U_m \subseteq X$ offen, $V_1, \dots, V_m \subseteq Y$ offen

$$\Rightarrow (U_1 \times V_1) \cap \dots \cap (U_m \times V_m) = \left(\bigcap_{j=1}^{m} U_j\right) \times \left(\bigcap_{j=1}^{m} V_j\right) \rightsquigarrow \text{(TOP2)}$$

<u>Aber</u>



$W_1 \times W_2 \neq (U_1 \cup U_2) \times (V_1 \times V_2)$

(TOP3) gilt <u>nicht</u>.

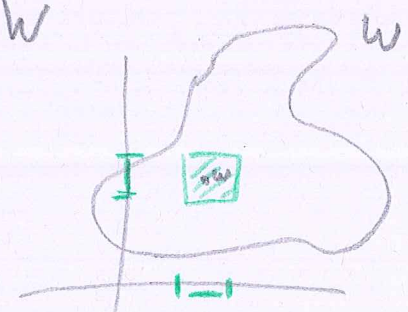
14. <u>Def</u> Seien $(X_1, \mathcal{T}_1), \dots, (X_m, \mathcal{T}_m)$ top. Räume. Wir setzen $\mathcal{B} = \{ U_1 \times \dots \times U_m \subseteq X_1 \times \dots \times X_m \mid U_j \subseteq X_j \text{ offen} \}$. Dann erfüllt $\mathcal{B}$ die Axiome (B1) und (B2) aus §1.5 und ist Basis einer Topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ auf $X = X_1 \times \dots \times X_m$. Man nennt $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ die <u>Produkttopologie</u> auf X.

<u>Denn:</u> $(U_1 \times \dots \times U_m) \cap (V_1 \times \dots \times V_m)$ $\quad U_j, V_j \subseteq X$ offen

$= (U_1 \cap V_1) \times \dots \times (U_m \cap V_m) \in \mathcal{B}$ ⇝ (B2) gilt.

(B1) gilt, da $X \in \mathcal{B}$.

In $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ liefert das die korrekte Topologie:
$W \subseteq \mathbb{R}^2$ offen $\Leftrightarrow$ für jedes $w = (x,y) \in W$ gibt es offene Intervalle $U \subseteq \mathbb{R}$, $V \subseteq \mathbb{R}$ mit $w \in U \times V \subseteq W$



Wir erweitern das gleich auf unendliche Produkte, die in der Topologie oft auftauchen.

15. Def Sei J eine Indexmenge (endlich oder unendlich) und sei $(X_j, \mathcal{T}_j)_{j\in J}$ eine Familie von top. Räumen. Wir definieren auf $X = \prod_{j\in J} X_j$ zwei Topologien über zwei Basen.

$$\mathcal{B}_{Box} = \{ \prod_{j\in J} U_j \mid U_j \subseteq X_j \text{ offen} \}$$

$$\mathcal{B} = \{ \prod_{j\in J} U_j \mid U_j \subseteq X_j \text{ offen und } U_j = X_j \text{ für fast alle } j \}$$

nur endlich viele Ausnahmen erlaubt

Klar: $X \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}_{Box}$, sowohl $\mathcal{B}$ als auch $\mathcal{B}_{Box}$ erfüllen (B2), denn

$$\left(\prod_{j\in J} U_j\right) \cap \left(\prod_{j\in J} V_j\right) = \prod_{j\in J} (U_j \cap V_j) \quad \text{für } U_j, V_j \subseteq X_j$$

beliebig.

Wir definieren $pr_k : \prod_{j \in J} X_j \to X_k$ durch $pr_k((p_j)_{j\in J}) = p_k$, für $k \in J$. In beiden Topologien $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_{Box}}$ sind diese Abbildungen pr_k stetig, denn: $V \subseteq X_k$ offen $\Rightarrow pr_k^{-1}(V_k) = V_k \times \prod_{j \neq k} X_j$.

16. <u>Satz</u> Sei $(X_j, \mathcal{T}_j)_{j \in J}$ eine Familie von top. Räumen, sei $X = \prod_{j \in J} X_j$ versehen mit der <u>Produkttopologie</u>, $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ wie in §1,15, sei $pr_k : X \to X_k$ wie oben, für $k \in J$. Dann hat $(X, \mathcal{T}, (pr_j)_{j\in J})$ folgende <u>universelle Eigenschaft</u>: ist Y ein top. Raum, $(f_j : Y \to X_j)_{j \in J}$ eine Familie von stetigen Abbildungen, so gibt es <u>genau eine</u> stetige Abbildung $f : Y \to X$ so, dass für <u>alle</u> k gilt

$$f_k = pr_k \circ f$$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f_k"'] & X \arrow[d, "pr_k"] \\ & X_k \end{tikzcd}$$

Diese universelle Eigenschaft von X und den Abbildungen pr_k charakterisieren $(X, \mathfrak{T}, (pr_j)_{j\in J})$ eindeutig bis auf Homöomorphie.

<u>Beweis</u> Für $p \in Y$ setze $f(p) = (f_j(p))_{j\in J} \in X$ $\Rightarrow$ $pr_k \circ f = f_k$. Die Abbildung f ist stetig, denn: ist $W \in \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}$ Basis der Produkttopologie, so

$W = \prod_{j\in J} U_j$, es gibt $\emptyset \neq J_0 \subseteq J$ endlich mit:

$U_j = X_j$ für alle $j \in J - J_0$, $U_j \subseteq X_j$ offen für $j \in J_0$.

Es gilt
$$f^{-1}(W) = \bigcap_{j\in J} f_j^{-1}(U_j) = \underbrace{\bigcap_{j\in J_0} \underbrace{f_j^{-1}(U_j)}_{\text{offen}}}_{\text{offen, weil } J_0 \text{ endlich}} \subseteq Y$$

denn $f_j^{-1}(X_j) = Y$. Nach §1.9 Satz B ist f stetig.

Ist $h : Y \to X$ eine weitere Abbildung mit $pr_k \circ h = f_k$, so folgt: $h(p) = (q_j)_{j\in J}$ $\Rightarrow$ $q_j = f_j(p)$ für alle j

$\Rightarrow$ $\underline{h = f}$.

Zum Nachsatz. Angenommen, P ist ein top. Raum mit Abbildungen $\beta_j : P \to X_j$, die die gleiche universelle Eigenschaft hat. Wir erhalten damit

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\exists!\,\beta"] \arrow[dr, "\beta_j"'] & X \arrow[d, "pr_j"] \\ & X_j \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\exists!\,\alpha"] \arrow[dr, "pr_j"'] & P \arrow[d, "\beta_j"] \\ & X_j \end{tikzcd}$$

Betrachte $\alpha \circ \beta : P \to P$

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\exists!\, \alpha\circ\beta"] \arrow[dr, "\beta_j"'] & P \arrow[d, "\beta_j"] \\ & X_j \end{tikzcd} \quad \Rightarrow \alpha \circ \beta = id_P \quad \text{(wegen Eindeutigkeit)}$$

genauso $\beta \circ \alpha = id_X \Rightarrow \alpha, \beta$ sind zueinander inverse stetige Abbildungen $\Rightarrow \alpha, \beta$ Homöomorphismen. $\square$

Mit der Box-Topologie klappt das alles <u>nicht</u>.

<u>Bsp</u> $J = \mathbb{N}$, $X_j = [0,1] = I$

$f(t) = (t, t, t \ldots) \in \prod_{j=0}^{\infty} [0,1]$ konstante Folge.

$U_j = [0, 2^{-j}) \subseteq [0,1]$ offen in X_j

$\Rightarrow W = \prod_{j=0}^{\infty} [0, 2^{-j})$ offen in Box-Topologie

$f^{-1}(W) = \{0\}$ <u>nicht</u> offen in $[0,1] \Rightarrow f$ nicht stetig !

Die Box-Topologie ist nur für Gegenbeispiele gut.

17. <u>Def</u> Ist J eine Menge, X ein top. Raum, so ist $X^J = \prod_{j \in J} X$. In diesem Falle sind die Elemente von X^J also Funktionen $p : J \to X$ ("Folgen") $p(j) = p_j$ $\quad p \leftrightarrow (p_j)_{j \in J}$

Die Produkttopologie auf X^J ist dann die <u>Topologie der punktweisen Konvergenz</u>.

<u>Bsp</u> $X = \{0,1\}$ mit der diskreten Topologie.

Dann ist $\mathrm{Cant} = X^{\mathbb{N}} = \{(p_j)_{j\in\mathbb{N}} \mid p_j = 0 \text{ oder } p_j = 1\}$ die <u>Cantormenge</u>. Die Produkttopologie auf Cant ist <u>nicht</u> diskret (zum Beispiel konvergiert die Folge $p_k = (0,0,0,\dots,0,\underset{k}{1},0,\dots,0) \in \mathrm{Cant}$ gegen $(0,0,0,0,\dots) \in \mathrm{Cant}$) und interessant, obwohl die Topologie auf jedem einzelnen $X_j = \{0,1\}$ trivial ist.