§3 Zusammenhang, Quotienten, Funktionenräume

1. **Def** Ein top. Raum X heißt zusammenhängend, wenn $\emptyset$ und X die einzigen offenen und abgeschlossenen Teilmengen sind.
   Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ heißt zusammenhängend, wenn Y in der Teilraumtopologie zush. ist.

Bsp
- $\{0,1\}$ in der diskreten Topologie oder allg. jeder diskrete top. Raum, der mindestens 2 Elemente hat, ist nicht zush.
- In der Klumpentopologie ist jede Menge zush.
- $\mathbb{Q}$ ist nicht zush, z.B.
  $A = (-\infty, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q} = (-\infty, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$ ist offen und abg. in $\mathbb{Q}$.

2. **Satz** Sei X ein top. Raum. Dann sind äquivalent: (i) X ist zush.

(ii) sind U, V disjunkt und offen mit $X = U \cup V$, so ist $U = \emptyset$ oder $V = \emptyset$

(iii) jede stetige Abb $\varphi: X \to \{0,1\}$ ist konstant.

<u>Bew.</u> $\neg(i) \Rightarrow \neg(ii)$:

Sei $A \subseteq X$ offen und abg., $A \neq \emptyset, X$. Setze $U = A$, $V = X - A$ $\leadsto$ $U, V \neq \emptyset$ und $X = U \cup V$. $U \cap V = \emptyset$

$\neg(ii) \Rightarrow \neg(iii)$: Sei $U, V \subseteq X$ disjunkt und offen $U, V \neq \emptyset$, $X = U \cup V$. Definiere $\varphi: X \to \{0,1\}$

$$\varphi(p) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } p \in U \\ 0 & \text{wenn } p \notin U \end{cases}$$

$\Rightarrow \varphi$ stetig nach §1.3 und nicht konstant.

$\neg(iii) \Rightarrow \neg(i)$: Sei $\varphi: X \to \{0,1\}$ nicht konstant und stetig, $A = \varphi^{-1}(0) \leadsto A$ offen und abg. und $X \neq A$. □

<u>Korollar A</u> Ist X zush., $f: X \to Y$ stetig, so ist $f(X) \subseteq Y$ zush. Teilmenge

<u>Bew.</u> Sei $\varphi: f(X) \to \{0,1\}$ stetig $\Rightarrow$ $\varphi \circ f: X \to \{0,1\}$ konstant $\Rightarrow \varphi$ konstant auf $f(X)$. □

Korollar B Sei X top. Raum und sei $Y \subseteq X$ zush. Dann ist auch $\overline{Y}$ zush.

Beweis Sei $\varphi : \overline{Y} \to \{0,1\}$ stetig. Dann ist $\varphi|_Y$ konstant und $\varphi(\overline{Y}) \subseteq \overline{\varphi(Y)} = \varphi(Y)$. $\square$

Korollar C Sei X ein top. Raum und sei $p \in X$. Sei $C(p) = \bigcup \{ Y \subseteq X \mid p \in Y \text{ und } Y \text{ ist zush} \}$.

Dann ist $p \in C(p)$, $C(p)$ ist zush und abgeschlossen. Man nennt $C(p)$ die Zusammenhangskomponente von p

Beweis $\{p\}$ ist zush $\Rightarrow p \in C(p)$. Sei $\varphi : C(p) \to \{0,1\}$ stetig. Für jedes $q \in C(p)$ gibt es $Y \subseteq X$ zush mit $p, q \in Y \Rightarrow \varphi(p) = \varphi(q) \Rightarrow \varphi$ ist konstant. Also ist $C(p)$ zush. Insbesondere gilt

$\overline{C(p)} \subseteq C(p)$. $\square$

Korollar D Jedes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ ist zush. Insbesondere sind $[0,1]$ und $\mathbb{R}$ zush.

Beweis Sei $p, q \in I$ OE $p < q$, sei $\varphi : I \to \{0,1\}$ stetig. Wenn $\varphi(p) \neq \varphi(q)$, gibt es laut Zwischenwertsatz, angewandt auf $\varphi|_{[p,q]} \to [0,1]$ ein $u \in [p,q]$

mit $\varphi(u) = \frac{1}{2}$ ↯ $\square$

Achtung: Teilräume von zush. Räumen sind nicht notwendig zush, z.B. $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.
nicht zush. ↑ ↑ zush

3. Satz Sei $(X_j)_{j\in J}$ eine Familie von top. Räumen, $J \neq \emptyset$, alle $X_j \neq \emptyset$. Dann sind äquivalent: (i) $X = \prod_{j\in J} X_j$ ist zush.
(ii) alle X_j sind zush.

Bew. (i) ⇒ (ii): $X_k = pr_k(X)$, da $X \neq \emptyset$.

(ii) ⇒ (i): Fall 1 J endlich. mit Induktion.
$\# J = 1$ klar, $\# J = 2$: $p = (p_1, p_2) \in X_1 \times X_2$
$q = (q_1, q_2) \in X_1 \times X_2$

$$p \in \underbrace{\{p_1\} \times X_2}_{\text{zush}} \ni (p_1, q_2) \in \underbrace{X_1 \times \{q_2\}}_{\text{zush}} \ni q$$

$\varphi : X_1 \times X_2 \to \{0,1\}$ stetig $\leadsto \varphi(p) = \varphi(q) = \varphi = \text{const}$

$$\# J \geq 3 \leadsto X = \underbrace{X_1}_{\text{zush}} \times \underbrace{\prod_{j=2}^{m} X_j}_{\text{zush}} \text{ zush.}$$

<u>Fall 2</u> J unendlich. Sei $p \in X = \prod_{j\in J} X_j$, $p = (p_j)_{j\in J}$. Für $K \subseteq J$ endlich ist

$$Y_K = \{ (x_j)_{j\in J} \mid x_j = p_j \text{ für alle } j \in J - K \} \cong \prod_{k\in K} X_k$$

zush. nach <u>Fall 1</u>

$$\Rightarrow C(p) \supseteq Y_K \rightsquigarrow C(p) \supseteq \bigcup \{ Y_K \mid K \subseteq J \text{ endlich} \}$$

$$\Rightarrow C(p) \supseteq \overline{\bigcup \{ Y_K \mid K \subseteq J \text{ endlich} \}} \overset{*}{=} \prod_{j\in J} X_j$$

$*$ $q \in \prod_{j\in J} X_j$, Umgebung von q ist $\prod_{k\in K} U_k \times \prod_{j\in J-K} X_j = W$, K endlich

$$\Rightarrow W \cap Y_K \neq \emptyset$$ $\square$

4. <u>Def</u> Sei X ein top. Raum, sei Z eine Menge und sei $q: X \to Z$ eine Abbildung. Sei

$$\mathcal{T}_q = \{ U \subseteq Z \mid q^{-1}(U) \subseteq X \text{ ist offen} \}.$$

Dann ist $\mathcal{T}_q$ eine Topologie auf Z und bezüglich dieser Topologie ist q eine stetige Abbildung. Man nennt q eine <u>Quotientenabbildung</u> und Z <u>Quotientenraum</u> (bzgl q) und $\mathcal{T}_q$ <u>Quotiententopologie</u>

<u>Beweis</u> $q^{-1}(\emptyset)=\emptyset$, $q^{-1}(Z)=X$ ⇝ $\emptyset, Z \in \mathcal{T}_q$. Ist $\mathcal{C}$ eine beliebige Menge von Teilmengen von Z, so gilt

$$q^{-1}\left(\bigcup\mathcal{C}\right) = \bigcup\{q^{-1}(C) \mid C \in \mathcal{C}\}$$

$$q^{-1}\left(\bigcap\mathcal{C}\right) = \bigcap\{q^{-1}(C) \mid C \in \mathcal{C}\}$$

Damit folgt (Top2) und (Top3), also ist $\mathcal{T}_q$ eine Topologie (und q ist stetig). □

<u>Satz</u> Seien X, Y top. Räume, Z eine Menge, $f: X \to Y$ stetig, $q: X \to Z$ eine Abbildung. Wenn $h: Z \to Y$ eine Abbildung ist mit $h \circ q = f$,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f", "\text{stetig}"'] \arrow[d, "q"'] & Y \\ Z \arrow[ur, "h"', "\text{auch stetig!}"] & \end{tikzcd}$$

dann ist h stetig bezüglich der Quotiententopologie auf Z.

Beweis Sei $W \subseteq Y$ offen. Dann ist

$q^{-1}(h^{-1}(W)) = (h \circ q)^{-1}(W) = f^{-1}(W)$ offen,

also ist $h^{-1}(W) \subseteq Z$ offen. $\square$

5. Def Eine Abbildung $f: X \to Y$ zwischen top. Räumen X, Y heißt offen (bzw. abgeschlossen), wenn das Bild $f(M)$ jeder offenen (abgeschl.) Teilmenge $M \subseteq X$ offen (abg.) ist.

Satz Wenn $f: X \to Y$ stetig und offen ist (bzw. stetig und abg. ist) und surjektiv, so ist die Topologie auf Y die Quotiententopologie bzgl. f.

Beweis Sei $U \subseteq Y$ und sei $f^{-1}(U) \subseteq X$ offen.

Zz: U ist offen.

Da f surjektiv ist, gilt $f(f^{-1}(U)) = U$.

Wenn f offen ist, so ist also U auch offen.

Wenn f abg. ist, betrachte $A = X \setminus f^{-1}(U)$

$\Rightarrow f(A) \subseteq Y$ abg und $Y = U \,\dot\cup\, f(A)$

$\Rightarrow U$ offen. $\square$

Korollar: Sei $f: X \to Y$ stetig und surjektiv. Wenn X kompakt ist und Y Hausdorff'sch, dann trägt Y die Quotiententopologie. (ÜA)

[Beweis: Sei $A \subseteq X$ abg. Dann ist A kompakt, also ist auch $f(A) \subseteq Y$ kompakt, also ist $f(A) \subseteq Y$ abg.
$\Rightarrow$ f ist abgeschlossen. $\square$]

Wir betrachten jetzt reelle Funktionen auf top. Räumen.

6. Def Sei $X \neq \emptyset$ ein topologischer Raum, sei

$$C_b(X,\mathbb{R}) = \{ \varphi : X \to \mathbb{R} \mid \varphi \text{ ist stetig und beschränkt} \}.$$

Wir definieren eine Norm $\|\cdot\|_\infty$ auf dem Vektorraum $C_b(X,\mathbb{R})$ durch

$$\|\varphi\|_\infty = \sup \{ |\varphi(p)| \mid p \in X \}$$

Klar: Das ist eine Norm, denn:

$$\|\varphi\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \varphi \text{ Nullfunktion}$$

$$|\varphi(p) + \psi(p)| \leq |\varphi(p)| + |\psi(p)| \quad \text{für } \varphi, \psi \in C_b(X,\mathbb{R})$$

$$\Rightarrow |\varphi(p) + \psi(p)| \leq \|\varphi\|_\infty + \|\psi\|_\infty$$

$$\Rightarrow \|\varphi + \psi\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty + \|\psi\|_\infty$$

Für $a \in \mathbb{R}$ ist $|a\varphi(p)| = |a| \cdot |\varphi(p)|$

$\Rightarrow \|a\varphi\|_\infty = |a| \cdot \|\varphi\|_\infty$. □

Damit erhalten wir eine Metrik auf $C_b(X,\mathbb{R})$ durch

$d(\varphi,\psi) = \|\varphi-\psi\|_\infty$.

7. Satz Ist $X \neq \emptyset$ ein top. Raum, so ist $(C_b(X,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ ein $\underbrace{\text{Banachraum}}_{\text{normierter Vektorraum}}$, d.h. jede Cauchy-Folge in diesem Raum konvergiert.

Beweis Sei $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ eine Cauchy-Folge in $C_b(X,\mathbb{R})$. Für jedes $p \in X$ gilt

$|\varphi_k(p) - \varphi_l(p)| \leq \|\varphi_k - \varphi_l\|_\infty$, also ist

$(\varphi_k(p))_{k\geq 0}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$. Definiere

$\varphi(p) = \lim_k \varphi_k(p)$.

Beh: φ ist beschränkt und stetig (d.h. $\varphi \in C_b(X,\mathbb{R})$) und $\lim_k \|\varphi - \varphi_k\|_\infty = 0$.

Denn Es gibt $n \geq 0$ so, dass $\|\varphi_k - \varphi_n\|_\infty \leq 1$ für alle $k \geq n \Rightarrow \|\varphi_k\|_\infty \leq \|\varphi_n\|_\infty + 1$ für alle $k \geq n$

$\Rightarrow |\varphi_k(p)| \leq \|\varphi_n\|_\infty + 1$ für alle $k \geq n \Rightarrow \varphi$ beschränkt.

Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $m \geq 0$ so, dass

$\|\varphi_k - \varphi_l\|_\infty \leq \varepsilon/3$ für alle $k, l \geq m$.

Da φ_m stetig ist, gibt es eine Umgebung U von $p \in X$ so, dass $|\varphi_m(q) - \varphi_m(p)| \leq \varepsilon/3$ für alle $q \in U$.

Es folgt

$$|\varphi_k(q) - \varphi_k(p)| \leq |\underbrace{\varphi_k(q) - \varphi_n(q)} + \varphi_n(q) - \varphi_n(p) + \varphi_n(p) - \varphi_k(p)|$$

$$\leq \|\varphi_k - \varphi_n\|_\infty + \frac{\varepsilon}{3} + \|\varphi_k - \varphi_n\|_\infty \leq \varepsilon \Rightarrow$$

$|\varphi(q) - \varphi(p)| \leq \varepsilon \Rightarrow \varphi$ stetig in p, $\varphi \in C_b(X, \mathbb{R})$

Weiter ist $|\varphi(p) - \varphi_n(p)| = \lim\limits_k |\varphi_k(p) - \varphi_n(p)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$

unabhängig von p, also $\|\varphi - \varphi_n\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}$ $\square$

8. <u>Def</u> Sei X ein top. Raum. Eine Teilmenge $\Phi \subseteq C_b(X, \mathbb{R})$ heißt <u>gleichgradig</u> stetig in $p \in X$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Umgebung U von p gibt, so dass für alle $\varphi \in \Phi$ und alle $q \in U$ gilt

$$|\varphi(p) - \varphi(q)| \leq \varepsilon$$

"Das gleiche δ für alle $\varphi \in \Phi$"

Wenn Φ in jedem $p \in X$ gleichgradig stetig ist, so heißt Φ gleichgradig stetig.

Theorem (Satz von Arzelà-Ascoli) Sei X ein kompakter topologischer Raum, sei $\Phi \subseteq C_b(X,\mathbb{R}) = C(X,\mathbb{R})$.

X kompakt, $\varphi: X \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow \varphi(X) \subseteq \mathbb{R}$ kompakt, also beschränkt.

Dann sind äquivalent:

(i) $\overline{\Phi}$ ist kompakte Teilmenge des Banachraumes $(C(X,\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$

(ii) Φ ist gleichgradig stetig und für jedes $p \in X$ ist $\{\varphi(p) \mid \varphi \in \Phi\}$ beschränkt.

Beweis (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in \Phi$ mit $\Phi \subseteq \overline{\Phi} \subseteq B_\varepsilon(\varphi_1) \cup \dots \cup B_\varepsilon(\varphi_m)$.

Für jedes $p \in X$ ist also

$$\{\varphi(p) \mid \varphi \in \Phi\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} \underbrace{B_\varepsilon(\varphi_j(p))}_{\text{beschränkt}} \quad \text{beschränkt}$$

Weiter gibt es zu jedem $p \in X$ eine Umgebung N so, dass für alle $j = 1, \dots, m$ und jedes $q \in N$ gilt

$$|\varphi_j(p) - \varphi_j(q)| \leq \varepsilon.$$

Ist $\|\psi - \varphi_j\|_\infty \leq \varepsilon$, so folgt

$$|\psi(p) - \psi(q)| \leq |\psi(p) - \varphi_j(p)| + |\varphi_j(p) - \varphi_j(q)| + |\varphi_j(q) - \psi(q)|$$

$$\leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3 \cdot \varepsilon.$$

Folglich ist Φ gleichgradig stetig in p.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Nach ÜA 7.4 reicht es zu zeigen:

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in \Phi$ so, dass $\overline{\Phi} \subseteq B_\varepsilon(\varphi_1) \cup \dots \cup B_\varepsilon(\varphi_m)$ gilt.

Für jedes $p \in X$ gibt es eine offene Umgebung $U_p \subseteq X$ von p so, dass

$$\psi(U_p) \subseteq B_\varepsilon(\psi(p)) \quad \text{für alle } \psi \in \Phi$$

(gleichgradige Stetigkeit). Da X kompakt ist, gibt es $p_1, \dots, p_n \in X$ mit

$$X = U_{p_1} \cup \dots \cup U_{p_n}.$$

Sei $L = \overline{\bigcup \{ \psi(p_j) \mid \psi \in \Phi, j = 1, \dots, n \}} \subseteq \mathbb{R}$

$\leadsto$ L beschränkt, also kompakt

$\leadsto$ $L \subseteq B_\varepsilon(t_1) \cup \dots \cup B_\varepsilon(t_l)$ $\quad t_1, \dots, t_l \in \mathbb{R}$.

Ist $\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, l\}$ eine Abbildung, so sei $\Phi_\sigma = \{ \psi \in \overline{\Phi} \mid \psi(p_j) \in B_\varepsilon(t_{\sigma(j)}) \}$

Es gibt l^n solche σ, und

$\overline{\Phi} = \bigcup \{ \Phi_\sigma \mid \sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, l\} \}$

Ist $\psi, \varphi \in \Phi_\sigma$ und $q \in U_{p_j}$, so folgt

$$|\psi(q) - \varphi(q)| \leq |\psi(q) - \psi(p_j)| + |\psi(p_j) - t_{\sigma(j)}|$$
$$+ |t_{\sigma(j)} - \varphi(p_j)| + |\varphi(p_j) - \varphi(p)| \leq 4\varepsilon$$

also $\|\psi - \varphi\|_\infty \leq 4\varepsilon$ für alle $\psi, \varphi \in \Phi_\sigma$

Also wird $\overline{\Phi}$ durch höchstens l^n Bälle vom Radius 4ε überdeckt $\Rightarrow$ $\overline{\Phi}$ kompakt nach ÜA 7.4 $\square$

9. Eine Anwendung: Peanos Satz

<u>Theorem</u> (Peano) Sei $F: [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt, und $c \in \mathbb{R}$. Dann existiert $\gamma: [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf $(0,1)$ mit

$\gamma(0) = c$ und $\underbrace{F(t, \gamma(t)) = \gamma'(t)}_{\text{DGL}}$ für alle $t \in (0,1)$.

<u>Beweis</u> Umschreiben in eine Integralgleichung:

$$\gamma(t) = c + \int_0^t F(s, \gamma(s))\, ds$$

Definiere $\gamma_n : (-\infty, 1] \to \mathbb{R}$ durch

$$\gamma_n(t) = \begin{cases} c & t \le 0 \\ c + \int_0^t F(s, \gamma_n(s - 2^{-n}))\, ds & 0 \le t \le 1 \end{cases}$$

↑ wohldefiniert wegen "Zeitverzögerung".

Da $|F(s,p)| \le K$ für eine Konstante K

folgt $|\gamma_n(u) - \gamma_n(v)| \overset{(*)}{\le} K \cdot |u - v|$ (MWS für Integrale)

insbesondere $|\gamma_n(t) - \gamma_n(0)| \le K^{(**)}$ für $0 \le t \le 1$.

Die Familie $\{ \gamma_n|_{[0,1]} \mid n = 1,2,3,\dots \}$ ist

gleichgradig stetig wegen (*) und $\{ \gamma_n(t) \mid n \ge 1 \}$

ist beschränkt für jedes $t \in [0,1]$ wegen (**)

Nach Arzelà-Ascoli gibt es eine konvergente Teilfolge $(\gamma_{n_k})_{k\geq 1}$ mit Grenzwert $\gamma \in C([0,1],\mathbb{R})$ und $\gamma(t) = c + \int_0^t F(s,\gamma(s))\,ds$ $\square$

10. <u>Lemma</u> (Satz von Dini) Sei X ein kompakter top. Raum und sei $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $C(X,\mathbb{R})$. Wenn für jedes $p \in X$ die Folge $(\varphi_n(p))_{n\geq 1}$ monoton wächst und wenn die Folge der φ_n punktweise gegen $\varphi \in C(X,\mathbb{R})$ konvergiert, so gilt $\lim_n \|\varphi - \varphi_n\|_\infty = 0$.

(Punktweise Konvergenz $\Rightarrow$ glm. Konvergenz)

<u>Beweis</u> Sei $\varepsilon > 0$. Für jedes $p \in X$ gibt es $N_p \in \mathbb{N}$ so, dass $\varphi(p) - \varepsilon < \varphi_n(p) \leq \varphi(p)$ für alle $n \geq N_p$.

Setze $U_p = \{ q \in X \mid \varphi(q) - \varepsilon < \varphi_{N_p}(q) \}$

$\Rightarrow$ U_p ist Umgebung von p $\Rightarrow$ $X = U_{p_1} \cup \dots \cup U_{p_m}$ für $p_1, \dots, p_m$, weil X kompakt.

Es folgt für $n \geq N_{p_1}, \dots, N_{p_m}$, dass

$$0 \leq \varphi(q) - \varphi_n(q) \leq \varepsilon \qquad \text{für alle } q \in X$$ □

Korollar Sei $p_0(t) = 0$ und rekursiv

$$p_{n+1}(t) = \frac{1}{2}\left(p_n(t)^2 + t\right) \qquad , t \in [0,1].$$

Dann konvergiert die Folge $(p_n)_{n \geq 0}$ in $C([0,1], \mathbb{R})$ gleichmäßig gegen $f(t) = 1 - \sqrt{1-t}$.

Beweis Mit Induktion folgt $0 \leq p_n \leq 1$.

Weiter gilt $p_{n+2} - p_{n+1} = \frac{1}{2}\left(p_{n+1}^2 - p_n^2\right)$ (einsetzen)

und damit aus $p_1 = \frac{1}{2} t \geq p_0 = 0$, dass

$p_{n+1} \geq p_n$. Damit existiert $f(t) = \lim_n p_n(t) \in [0,1]$

und $f(t) = \frac{1}{2}\left(f(t)^2 + t\right) \Rightarrow f(t)^2 - 2 f(t) + t = 0$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{2 - \sqrt{4 - 4t}}{2} = 1 - \sqrt{1-t} \quad \text{stetig}$$ □

11. Der Satz von Stone-Weierstraß.

Sei X ein kompakter topologischer Raum.

Dann ist $C(X,\mathbb{R})$ ein kommutativer Ring

mit $(\varphi+\psi)(p) = \varphi(p)+\psi(p)$

$(\varphi\cdot\psi)(p) = \varphi(p)\cdot\psi(p)$

Wir fassen $\mathbb{R}$ als Teilring der konstanten Funktionen in $C(X,\mathbb{R})$ auf.

__Lemma A__ Sei $R \subseteq C(X,\mathbb{R})$ ein Teilring.

Dann ist der Abschluss $\overline{R}$ in $C(X,\mathbb{R})$ (bzgl $\|.\|_\infty$) ein Teilring.

__Bew.__ Sind $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ und $(\psi_n)_{n\geq 1}$ konvergente Folgen in R mit Grenzwerten $\varphi, \psi \in \overline{R}$, so

konvergieren
$$\left.\begin{array}{lll} \varphi_n+\psi_n & \text{gegen} & \varphi+\psi \\ \varphi_n\cdot\psi_n & \text{gegen} & \varphi\cdot\psi \\ -\varphi_n & \text{gegen} & -\varphi \end{array}\right\} \text{ in } \|.\|_\infty\text{-Norm.}$$

$\Rightarrow$ $\overline{R}$ ist ein Ring.

#

Lemma B Sei $R \subseteq C(X,\mathbb{R})$ ein abg. Teilring $(R = \overline{R})$ mit $\mathbb{R} \subseteq R$
↖ konstante Funktion.

Für jedes $\varphi \in R$ ist dann auch $|\varphi| = [p \mapsto |\varphi(p)|]$ in R. Für $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in R$ ist

$$\min\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\} \in R \quad \text{sowie} \quad \max\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\} \in R.$$

Beweis Angenommen, $\varphi \in R$ mit $\|\varphi\|_\infty \leq 1$. Setze $\psi_0 = 0$ und rekursiv $\psi_{n+1}(p) = \frac{1}{2}\left(\psi_n(p)^2 - (1-\varphi(p)^2)\right)$

Es folgt Induktion, dass $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_m \in R$. Nach Dinis Satz §3.10 und dem Korollar konvergiert die Folge $(\psi_n)_{n \geq 0}$ in R gleichmäßig gegen

$$1 - \sqrt{1-(1-\varphi^2)} = 1 - |\varphi|,$$ es folgt $|\varphi| \in R$.

Ist $\|\varphi\| = c > 1$, betrachte $\tilde{\varphi} = \frac{1}{c}\varphi \Rightarrow |\tilde{\varphi}| \in R$

$\Rightarrow |\varphi| = c \cdot |\tilde{\varphi}| \in R$.

Nun folgt $\max\{\varphi_1, \varphi_2\} = \frac{1}{2}\left(\varphi_1 + \varphi_2 + |\varphi_1 - \varphi_2|\right)$

$\min\{\varphi_1, \varphi_2\} = \frac{1}{2}\left(\varphi_1 + \varphi_2 - |\varphi_1 - \varphi_2|\right)$

also $\varphi_1, \varphi_2 \in R \Rightarrow \min\{\varphi_1, \varphi_1\}, \max\{\varphi_1, \varphi_2\} \in R$

Rest mit Induktion. $\square$

Theorem (Stone-Weierstraß)

Sei $X \neq \emptyset$ ein kompakter topologischer Raum und sei $R \leq C_b(X,\mathbb{R}) = C(X,\mathbb{R})$ ein Teilring mit $\mathbb{R} \in R$ ← konstante Funktion.

Wenn es für alle $p,q \in X$ mit $p \neq q$ ein $\varphi \in R$ gibt mit $\varphi(p) \neq \varphi(q)$, so ist $\overline{R} = C(X,\mathbb{R})$ in der durch $\|.\|_\infty$ gegebenen Topologie.

Beweis 0. Schritt Wir ersetzen R durch $\overline{R}$ (mit Lemma A). Zu zeigen ist dann: $R = C(X,\mathbb{R})$.

1. Schritt Ist $p \neq q$, $u,v \in \mathbb{R}$, so gibt es $\varphi \in R$ mit $\varphi(p) = u$, $\varphi(q) = v$.

Denn: Es gibt $\psi \in R$ mit $\psi(p) \neq \psi(q)$. Setze

$$\varphi(x) = u + \frac{v-u}{\psi(q)-\psi(p)}\left(\psi(x)-\psi(p)\right) \rightsquigarrow \varphi \in R \text{ und}$$

$\varphi(p) = u$, $\varphi(q) = v$.

2. Schritt Sei $\varepsilon > 0$ und $\psi \in C(X,\mathbb{R})$ sowie $p \in X$.

Dann gibt es eine Umgebung U von p und $\varphi \in R$

mit: $|\psi(q) - \varphi(q)| \leq \varepsilon$ für alle $q \in U$

sowie $\varphi(q) \leq \psi(q) + \varepsilon$ für alle $q \in X$.

<u>Denn:</u> Wähle zu jedem $z \in X$ ein $\alpha_z \in R$ mit $\alpha_z(z) = \psi(z)$ und $\alpha_z(p) = \psi(p)$ (das geht nach Schritt 1). Dann hat z eine Umgebung $V_z \subseteq X$ mit $\alpha_z(q) \leq \psi(q) + \varepsilon$ für alle $q \in V_z$.
Da X kompakt ist, gibt es $z_1, \dots, z_m \in X$ mit $X = V_{z_1} \cup \dots \cup V_{z_m}$. Setze $\varphi = \min\{\alpha_{z_1}, \dots, \alpha_{z_m}\}$
$\Rightarrow \varphi \in R$ nach Lemma B, $\varphi \leq \psi + \varepsilon$.
Sei nun $U = \{q \in X \mid \varphi(q) \geq \psi - \varepsilon\}$.

3. <u>Schritt</u> Sei $\varepsilon > 0$, $\psi \in C(X, \mathbb{R})$. Dann gibt es $\varphi \in R$ mit $\|\varphi - \psi\|_\infty \leq \varepsilon$.

<u>Denn</u> Zu jedem $p \in X$ wähle $U = U_p$ sowie $\varphi = \varphi_p$ wie in Schritt 2. Da X kompakt ist, gibt es $p_1, \dots, p_n \in X$ mit $X \subseteq U_{p_1} \cup \dots \cup U_{p_n}$. Setze nun $\varphi = \max\{\varphi_{p_1}, \dots, \varphi_{p_n}\} \in R$. Es folgt $\|\varphi - \psi\|_\infty \leq \varepsilon$. $\square$

<u>Korollar</u> (Weierstraß Approximationssatz)

Sei $\varphi \in C([a,b], \mathbb{R})$, $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, sei $\varepsilon > 0$

Dann gibt es ein Polynom $p \in \mathbb{R}[t]$,
$p = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$ mit

$$\|p - \varphi\|_\infty \leq \varepsilon$$

$\square$