§4. Fundamentalgruppe und Überlagerungen

1. **Def** Seien X, Y topologische Räume, sei $A \subseteq X$ Teilmenge. Zwei stetige Abbildungen $f_0, f_1 : X \rightrightarrows Y$ heißen <u>homotop relativ zu A</u>, wenn es eine stetige Abbildung $f : X \times [0,1] \to Y$ gibt mit:

(i) $f(p,0) = f_0(p)$ und $f(p,1) = f_1(p)$ für alle $p \in X$

(ii) $f(a,s) = f(a,0)$ für alle $s \in [0,1]$, $a \in A$

<u>Bem</u> (a) aus (ii) folgt $f_1(a) = f_0(a)$ für alle $a \in A$

(b) ist $A = \emptyset$, so ist die Bedingung (ii) leer und man sagt, f_1 und f_2 sind <u>homotop</u>.

<u>Notation</u>: $f_0 \simeq F_1$ (rel A) $\Leftrightarrow$ f_0 und f_1 homotop relativ zu A.

Schreibe $f(p,s) = f_s(p)$, man nennt $F : X \times [0,1] \to Y$ <u>Homotopie</u> zwischen f_0 und f_1.

<u>Idee</u> Die Abbildung f_0 wird stetig in die Abbildung f_1 deformiert. Wie genau das geschieht, ist nicht wichtig.

Lemma (a) Ist $f_0 \simeq f_1 \ (\mathrm{rel}\, A)$ und ist $f_1 \simeq f_2 \ (\mathrm{rel}\, A)$, so ist $f_0 \simeq f_2 \ (\mathrm{rel}\, A)$

(b) $f_0 \simeq f_0 \ (\mathrm{rel}\, A)$ gilt immer

(c) $f_0 \simeq f_1 \ (\mathrm{rel}\, A) \Rightarrow f_1 \simeq f_0 \ (\mathrm{rel}\, A)$

Homotopie relativ zu A ist eine Äquivalenzrelation auf $C(X,Y)$.

Beweis (a) $f : X \times [0,1] \to Y$ $\quad \tilde{f} : X \times [0,1] \to Y$ stetig

$$f(p,0) = f_0(p) \qquad \tilde{f}(p,0) = f_1(p)$$
$$f(p,1) = f_1(p) \qquad \tilde{f}(p,1) = f_2(p)$$

setze
$$\tilde{\tilde{f}}(p,s) = \begin{cases} f(p, 2 \cdot s) & 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ \tilde{f}(p, 2s-1) & \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases} \quad \text{stetig nach § 1.13}$$

$\square$

(b), (c) klar.

Beobachtung Sind
$$X \overset{f_0}{\underset{f_1}{\rightrightarrows}} Y \xrightarrow{h} Z \quad \text{stetige}$$
Abbildungen mit $f_0 \simeq f_1 \ (\mathrm{rel}\, A)$, so gilt

$$h \circ f_1 \simeq h \circ f_0 \ (\mathrm{rel}\, A).$$

2. Die Fundamentalgruppe

Sei X ein topologischer Raum, sei

$\alpha, \beta : [0,1] \rightrightarrows X$ stetig mit $\alpha(1) = \beta(0)$.

Wir definieren $\alpha * \beta : [0,1] \to X$ durch

$$\alpha * \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{für } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & \text{für } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

Ist $\alpha' \simeq \alpha$ (rel $\{0,1\}$) und $\beta' \simeq \beta$ (rel $\{0,1\}$)

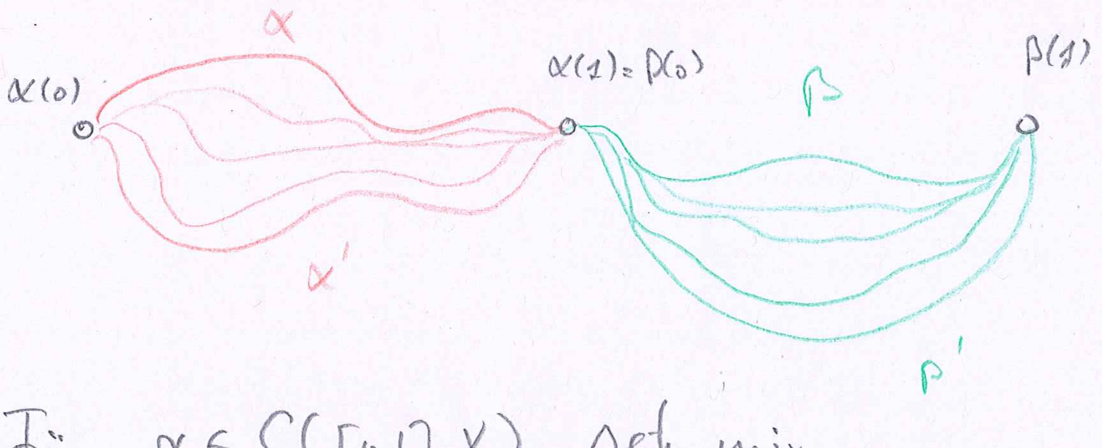
so ist $\alpha' * \beta' \simeq \alpha * \beta$ (rel $\{0,1\}$), denn:

$\hat{\alpha} : [0,1] \times [0,1] \to X$ $\quad \hat{\alpha}_0 = \alpha \quad \hat{\alpha}_1 = \alpha'$

$\hat{\beta} : [0,1] \times [0,1] \to X$ $\quad \hat{\beta}_0 = \beta \quad \hat{\beta}_1 = \beta'$

$\rightsquigarrow (t, s) \longmapsto (\hat{\alpha}_s * \hat{\beta}_s)(t)$ ist Homotopie

zwischen $\alpha * \beta$ und $\alpha' * \beta'$



#

Für $\alpha \in C([0,1], X)$ setzen wir

$$[\alpha] = \{\alpha' \in C([0,1], X) \mid \alpha \simeq \alpha' \text{ rel } \{0,1\}\}$$

Das ist die Äquivalenzklasse von α bzgl der Äquivalenzrelation "homotop relativ zu $\{0,1\}$".

Für $\alpha' \in [\alpha]$ gilt insbesondere $\alpha'(0) = \alpha(0)$
$\alpha'(1) = \alpha(1)$.

Weiter setzen wir $\bar{\alpha}(t) = \alpha(1-t)$ und für $p \in X$

$$\varepsilon_p(t) = p \quad , t \in [0,1].$$

<u>Lemma A</u> Sei $\alpha, \beta, \gamma \in C([0,1], X)$ mit

$\alpha(1) = \beta(0)$, $\beta(1) = \gamma(0)$. Dann gilt:

(i) $[\varepsilon_p * \alpha] = [\alpha]$ $\quad p = \alpha(0)$

(ii) $[\alpha * \varepsilon_q] = [\alpha]$ $\quad q = \alpha(1)$

(iii) $[\alpha * \bar{\alpha}] = [\varepsilon_p]$

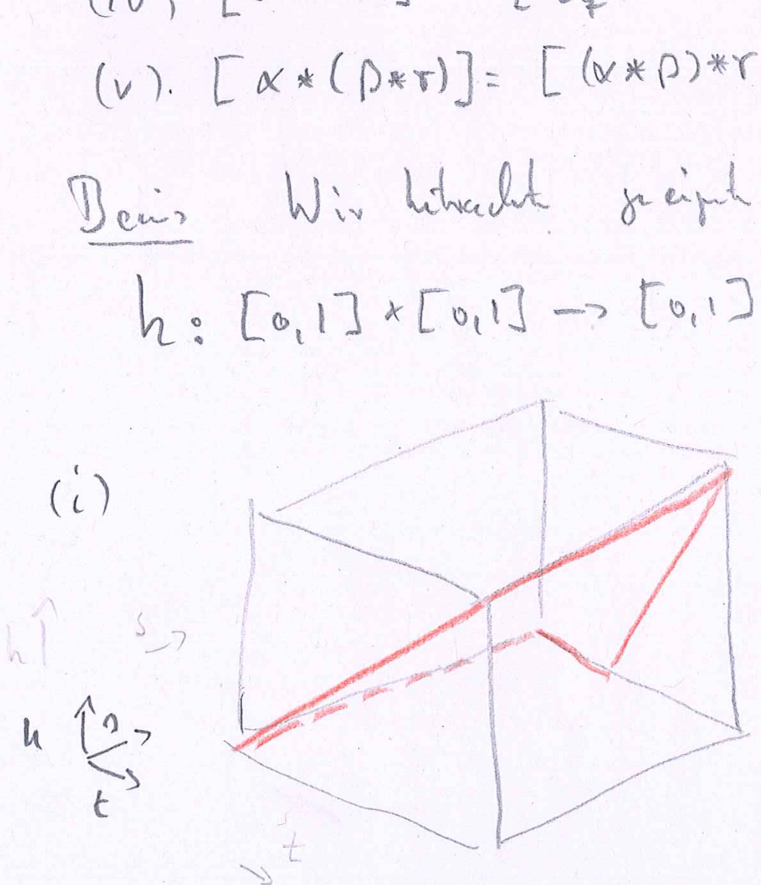
(iv) $[\bar{\alpha} * \alpha] = [\varepsilon_q]$

(v) $[\alpha * (\beta * \gamma)] = [(\alpha * \beta) * \gamma]$

<u>Beweis</u> Wir betrachten geeignete stetige Hilfsfunktionen

$$h : [0,1] \times [0,1] \to [0,1].$$

(i)

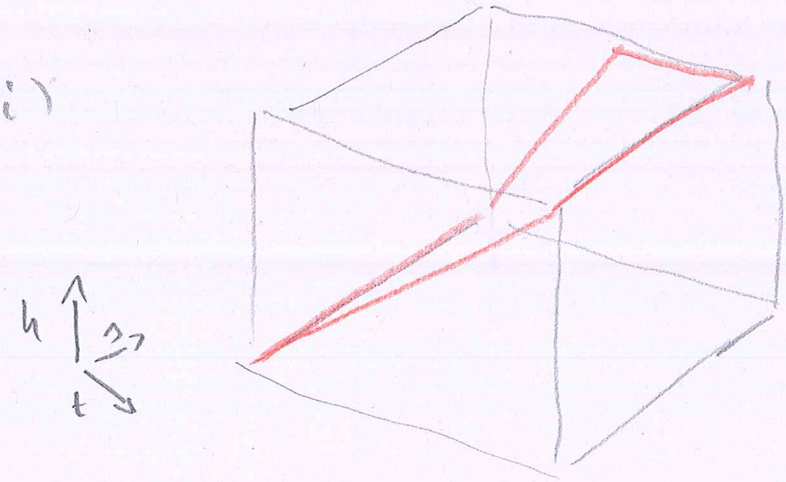


h stetig, auf dem Rand von $[0,1] \times [0,1]$ wie vorgegeben (existiert explizit oder mit Tietze ...)

$\alpha_s(t) = \alpha(h_s(t))$
$\Rightarrow \alpha_0 = \alpha$
$\alpha_1 = \varepsilon_p * \alpha$

$\alpha_s(0) = p \qquad \alpha_s(1) = q$

(ii)

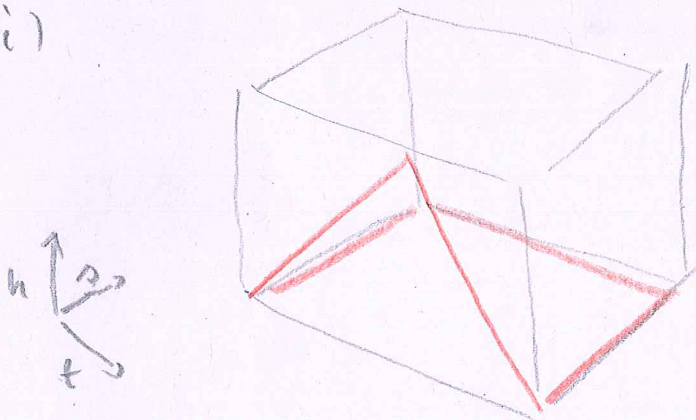


$\alpha_s(t) = \alpha(h_s(t))$

$\alpha_0 = \alpha$

$\alpha_1 = \alpha * \varepsilon_q$

(iii)



$\alpha_s(t) = \alpha(h_s(t))$

$\alpha_0 = \alpha * \bar{\alpha}$

$\alpha_1 = \varepsilon_p$

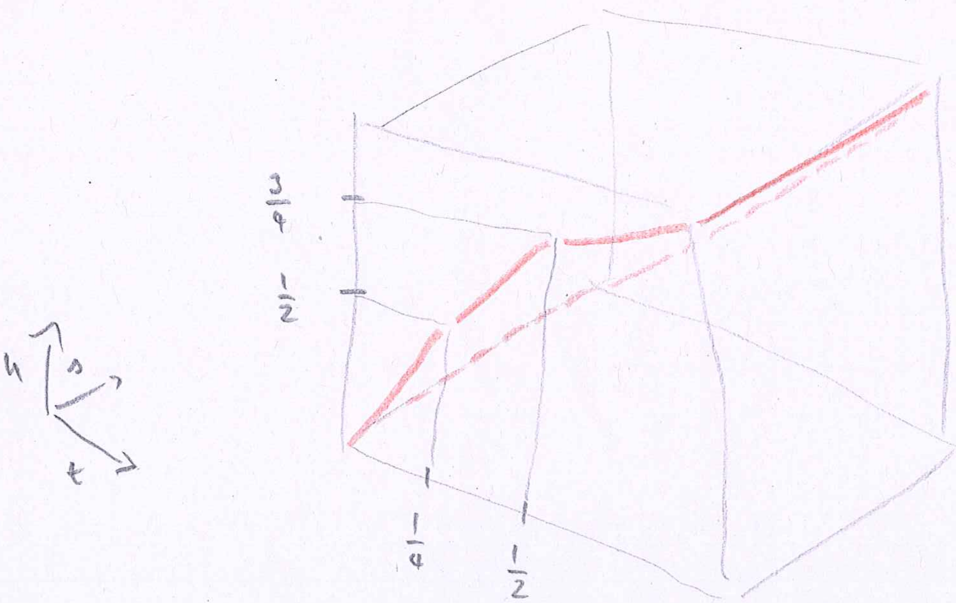
(iv) folgt aus (iii) weil $\bar{\bar{\alpha}} = \alpha$

(v)

$\delta_s(t) = \alpha * (\beta * \gamma)(h_s(t))$

$\delta_0(t) = (\alpha * \beta) * \gamma\,(t)$

$\delta_1(t) = \alpha * (\beta * \gamma)(t)$



$\delta_0(\frac{1}{4}) = \alpha(1)$

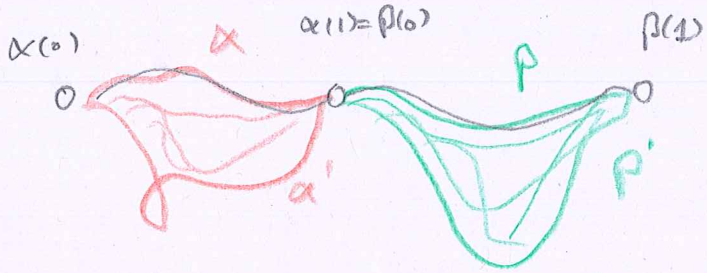
$\delta_0(\frac{1}{2}) = \beta(1)$

$\square$

Lemma B Ist $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \in C([0,1], X)$

mit $\alpha(1) = \beta(0)$ sowie $\alpha \simeq \alpha'$ rel $\{0,1\}$
$\beta \simeq \beta'$ rel $\{0,1\}$

so gilt $\alpha * \beta \simeq \alpha' * \beta'$ rel $\{0,1\}$



Schreibe $[\alpha * \beta] = [\alpha] * [\beta]$.
(Linke Seite hängt nur von $[\alpha]$ und $[\beta]$ ab.)

Beweis Das haben wir vor Lemma A gezeigt. $\square$

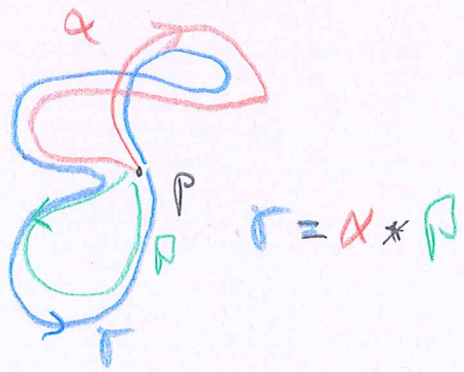
Eine stetige Abbildung $\alpha : [0,1] \to X$ nennt man auch **Weg in X** (von $p = \alpha(0)$ nach $q = \alpha(1)$).

Theorem Sei X ein topologischer Raum, sei $p \in X$.

Sei $\pi_1(X,p) = \{ [\alpha] \mid \alpha : [0,1] \to X$ stetig mit $\alpha(0) = \alpha(1) = p \}$

Dann ist $\pi_1(X,p)$ eine Gruppe mit Verknüpfung

$$[\alpha] * [\beta] = [\alpha * \beta]$$



Das Neutralelement ist

$[\varepsilon_p]$ $\qquad \varepsilon_p(t) = p$ für alle $t \in [0,1]$

Das Inverse zu $[\alpha]$ ist $[\bar{\alpha}]$,

$$\bar{\alpha}(t) = \alpha(1-t)$$

Man nennt $\pi_1(X,p)$ die <u>Fundamentalgruppe von X bezüglich des Grundpunktes p.</u>

<u>Beweis</u> $[\alpha]*[\beta]=[\alpha*\beta]$ ist <u>wohldefiniert</u> nach Lemma B, nach Lemma A ist die Verknüpfung assoziativ und $\pi_1(X,p)$ eine Gruppe. $\square$

Wie weit hängt $\pi_1(X,p)$ von der Wahl des Grundpunkts p ab?

3. <u>Satz</u> Sei X ein topologischer Raum, sei $\lambda:[0,1]\to X$ stetig mit $p=\lambda(0)$, $q=\lambda(1)$. Für $[\alpha]\in\pi_1(X,p)$ setze $f_\lambda([\alpha])=[\bar\lambda*\alpha*\lambda]\in\pi_1(X,q)$.
Dann ist $f_\lambda:\pi_1(X,p)\to\pi_1(X,q)$ ein Isomorphismus.

<u>Beweis</u> Für $[\alpha],[\beta]\in\pi_1(X,p)$ gilt

$$f_\lambda([\alpha])*f_\lambda([\beta])=[\bar\lambda*\alpha*\underbrace{\lambda*\bar\lambda}_{\simeq c_p}*\beta*\lambda]$$
$$=[\bar\lambda*\alpha*c_p*\beta*\lambda]=[\bar\lambda*\alpha*\beta*\lambda]=f_\lambda([\alpha]*[\beta]).$$

Also ist f_λ ein Homomorphismus. Es gilt

$$f_\lambda\circ f_{\bar\lambda}=id_{\pi_1(X,q)}\quad\text{sowie}\quad f_{\bar\lambda}\circ f_\lambda=id_{\pi_1(X,p)}$$

$\square$

$\leadsto f_{\bar\lambda}$ ist Inverse zu f_λ

Ein topologischer Raum $X \neq \emptyset$ heißt <u>wegzusammenhängend</u>, wenn es für alle $p, q \in X$ einen Weg $\lambda : [0,1] \to X$ gibt mit $\lambda(0) = p$, $\lambda(1) = q$.

<u>Korollar</u> Ist $X \neq \emptyset$ wegzusammenhängend, so sind alle Fundamentalgruppen $\pi_1(X, p)$ untereinander isomorph.

4. <u>Bsp</u> $X = \mathbb{R}^m$, $p \in X$ beliebig. Dann gilt

$$\pi_1(X, p) = \{[\varepsilon_p]\},$$ die Fundamentalgruppe von $\mathbb{R}^m$ ist trivial.

<u>Denn</u> Ist $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^m$ stetig, $\alpha(0) = \alpha(1) = p$, setze

$$h_s(t) = s \cdot p + (1-s) \cdot \alpha(t)$$

$$\Rightarrow h_0 = \alpha,\ h_1 = \varepsilon_p,\ h_s(0) = p = h_s(1) \text{ für alle } s \in [0,1].$$

$\square$

5. <u>Satz</u> Seien X, Y, Z topologische Räume, seien $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ stetige Abbildungen, sei $p \in X$.

Für $[\alpha] \in \pi_1(X, p)$ setze

$$f_\#[\alpha] = [f \circ \alpha] \in \pi_1(Y, f(p)).$$

Dann gilt: (i) $f_\# : \pi_1(X, p) \to \pi_1(Y, f(p))$ ist ein Homomorphismus

(ii) $(g \circ f)_\# = g_\# \circ f_\#$

(iii) Ist $f' : X \to Y$ stetig und gilt $f \simeq f'$ rel $\{p\}$,

so ist $f'_\# = f_\#$.

Bew. (i) $f \circ (\alpha * \beta) = (f \circ \alpha) * (f \circ \beta) \Rightarrow f_\#[\alpha] * f_\#[\beta] = f_\#[\alpha * \beta]$.

(ii) $g_\# f_\# [\alpha] = g_\# [f \circ \alpha] = [g \circ f \circ \alpha] = (g \circ f)_\# [\alpha]$

(iii) Ist h Homotopie, $h_0 = f$, $h_1 = f'$, $h_s(p) = p$

für alle $s \in [0,1]$, so folgt $f \circ \alpha \simeq f' \circ \alpha$ rel $\{0,1\}$,

da $h_s(\alpha(t))$ Homotopie zwischen $f \circ \alpha$ und $f' \circ \alpha$ rel $\{0,1\}$ ist $\square$

5. Satz (Kleiner Satz von Seifert - van Kampen).

Sei X ein topologischer Raum, sei $U, V \subseteq X$ offen mit

$X = U \cup V$, sei $p \in U \cap V$. Wenn $U \cap V$ wegzush. ist,

dann wird $\pi_1(X, p)$ erzeugt von den Bildern

$i_\# : \pi_1(U, p) \to \pi_1(X, p)$ und $j_\# : \pi_1(V, p) \to \pi_1(X, p)$

wobei $i : U \hookrightarrow X$ und $j : V \hookrightarrow X$ die Inklusionen sind.

\#

Bew. Sei $\alpha : [0,1] \to X$ stetig, $\alpha(0) = \alpha(1) = p$.

Ist $t \in [0,1]$ und ist $\alpha(t) \in U$, so gibt es $\varepsilon > 0$ so,

dass $\alpha(s) \in U$ für alle s mit $|t - s| \le \varepsilon$.

Entsprechend für $\alpha(t) \in V$. Da $[0,1]$ kompakt ist,

gibt es $s_0 = 0 < s_1 < s_2 < \dots < s_m = 1$

so, dass für jedes $k = 1, \dots, m$ gilt:

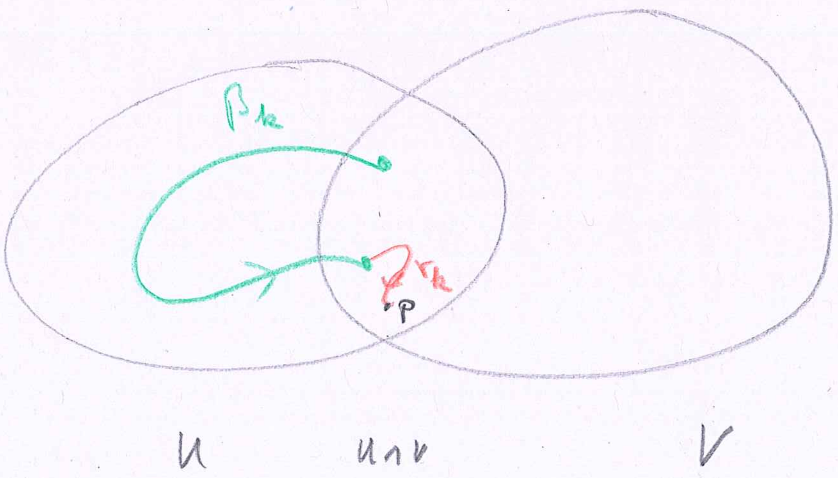
Für jedes $k = 1, \dots, m$ gilt

$$\alpha([s_{k-1}, s_k]) \subseteq U \quad \text{oder} \quad \alpha([s_{k-1}, s_k]) \subseteq V.$$

Ist $\alpha(s_k) \notin U \cap V$, so können wir s_k weglassen,
denn: $\alpha(s_k) \in U - V \Rightarrow \alpha([s_{k-1}, s_k]) \subseteq U$ und
$\alpha([s_k, s_{k+1}]) \subseteq U$, entsprechend für V. Also
dürfen wir OE zusätzlich annehmen, dass
$\alpha(s_k) \in U \cap V$ für $k = 0, \dots, m$.

Sei $\beta_k(t) = \alpha(t \cdot s_k + (1-t) s_{k-1})$ für $k = 1, \dots, m \Rightarrow$
$[\alpha] = [\beta_1] * \dots * [\beta_m]$. Da $U \cap V$ wegzush. ist,
gibt es Wege $\gamma_1, \dots, \gamma_{m-1}$ in $U \cap V$ mit

$$\gamma_k(0) = \beta_k(1), \quad \gamma_k(1) = p.$$



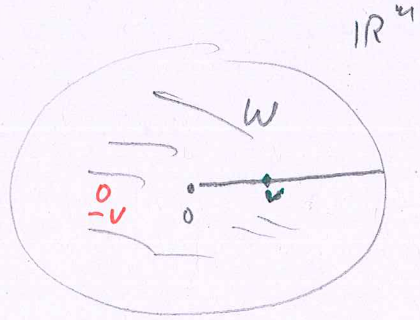
Es folgt

$$[\alpha] = \underbrace{[\beta_1] * [\gamma_1]}_{\substack{\text{Weg in } U \text{ od. } V \\ \text{von } p \text{ nach } q}} * \underbrace{[\bar{\gamma}_1] * [\beta_2] * [\gamma_2]}_{\substack{\text{Weg in } U \text{ od. } V \\ \text{von } p \text{ nach } q}} * \dots * \underbrace{[\bar{\gamma}_{m-1}] * [\beta_m]}_{\substack{\text{Weg in } U \text{ od. } V \\ \text{von } p \text{ nach } q.}}$$

Also ist $[\alpha]$ in der von $i_\#(\pi_1(U,p))$ und $j_\#(\pi_1(V,p))$ erzeugten Gruppe enthalten.

6. <u>Satz</u>: Sei $m \geq 3$, sei $p \in \mathbb{R}^m - \{0\}$. Dann gilt $\pi_1(\mathbb{R}^m - \{0\}, p) = \{[\varepsilon_p]\}$

<u>Beweis</u> <u>1. Schritt</u>: Sei $v \in \mathbb{R}^m - \{0\}$, sei $W = \mathbb{R}^m - \{s\cdot v \mid s \geq 0\}$.



Dann ist $\pi_1(W, -v) = \{[\varepsilon_{-v}]\}$

<u>Denn</u> $\alpha : [0,1] \to W$ stetig,

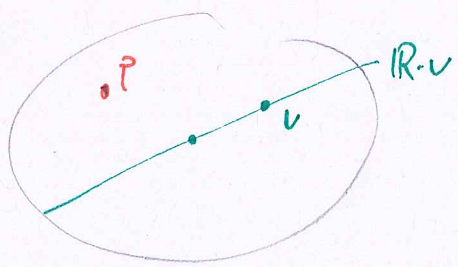
$\alpha(0) = \alpha(1) = -v$, $h_s(t) = s\cdot(-v) + (1-s)\cdot\alpha(t)$

$h_0 = \alpha$, $h_1 = \varepsilon_{-v}$, $h_s(t) \in W$ für alle $s,t \in [0,1]$,

2. <u>Schritt</u> $\pi_1(W,p) = \{[\varepsilon_p]\}$ für jedes $p \in W$

Folgt mit §4.3, da W wegzush. ist (für $m \geq 2$)

3. <u>Schritt</u> Wähle nun $v \in \mathbb{R}^m$ so, dass $p \notin \mathbb{R}\cdot v$ (das geht, weil $m \geq 2$)



$U = \mathbb{R}^m - \{s\cdot v \mid s \geq 0\}$ $\qquad$ $\mathbb{R}^m - \{0\} = U \cup V$

$V = \mathbb{R}^m - \{s\cdot v \mid s \leq 0\}$ $\qquad$ $U \cap V = \mathbb{R}^m - \mathbb{R}\cdot v$ ist

wegzush., weil $\boxed{m \geq 3}$. $\qquad$ Also: $\pi_1(U,p) = \{[\varepsilon_p]\}$

$\pi_1(V,p) = \{[\varepsilon_p]\}$

SvK

$\Rightarrow \pi_1(\mathbb{R}^m - \{0\}, p) = \{[\varepsilon_p]\}$

$\square$

Korollar Sei $\mathbb{S}^m = \{ v \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \sum_{i=1}^{m+1} v_i^2 = 1 \}$ die Einheitssphäre, sei $p \in \mathbb{S}^m$. Für $m \geq 2$ gilt
$\pi_1(\mathbb{S}^m, p) = \{[\varepsilon_p]\}$.

Beweis Betrachte die Retraktion $r: \mathbb{R}^{m+1} - \{0\} \to \mathbb{S}^m$
$v \longmapsto \hat{v} := \frac{1}{\|v\|_2} \cdot v$

$\leadsto$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}^m \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "="'] & \mathbb{R}^{m+1} - \{0\} \arrow[d, "r"] \\ & \mathbb{S}^m \end{tikzcd} \quad \overset{\pi_1}{\curvearrowright} \quad \begin{tikzcd} \pi_1(\mathbb{S}^m, p) \arrow[r, "i_\#"] \arrow[dr, equal] & \pi_1(\mathbb{R}^{m+1} - \{0\}, p) = \{[\varepsilon_p]\} \arrow[d, "r_\#"] \\ & \pi_1(\mathbb{S}^m, p) \end{tikzcd}$$

Es folgt $\pi_1(\mathbb{S}^m, p) = \{[\varepsilon_p]\}$. $\square$

7. Def Ein wegzusammenhängender topologischer Raum X heißt <u>einfach zusammenhängend</u>, wenn für einen (und damit jeden) Punkt $p \in X$ gilt $\pi_1(X, p) = \{[\varepsilon_p]\}$.

Wir haben also bisher gezeigt:

- $\mathbb{R}^m$ ist für alle $m \geq 0$ einfach zush.
- $\mathbb{R}^m - \{0\}$ ist für $m \geq 3$ einfach zush.
- $\mathbb{R} - \{0\}$ ist nicht wegzush., aber für jedes $p \in \mathbb{R} - \{0\}$ ist $\pi_1(\mathbb{R} - \{0\}, p) = \{[\varepsilon_p]\}$, das zeigt man leicht.
- $\mathbb{S}^m$ ist für alle $m \geq 2$ einfach zush.

- $S^0 = \{\pm 1\} \subseteq \mathbb{R}$ ist nicht wegzusammenhängend, aber es gilt $\pi_1(S^0, p) = \{[\varepsilon_p]\}$ für $p = \pm 1$.

Bleibt die Frage: was ist $\pi_1(S^1, p)$ und was ist $\pi_1(\mathbb{R}^2 - \{0\}, p)$? Dazu brauchen wir Überlagerungen.

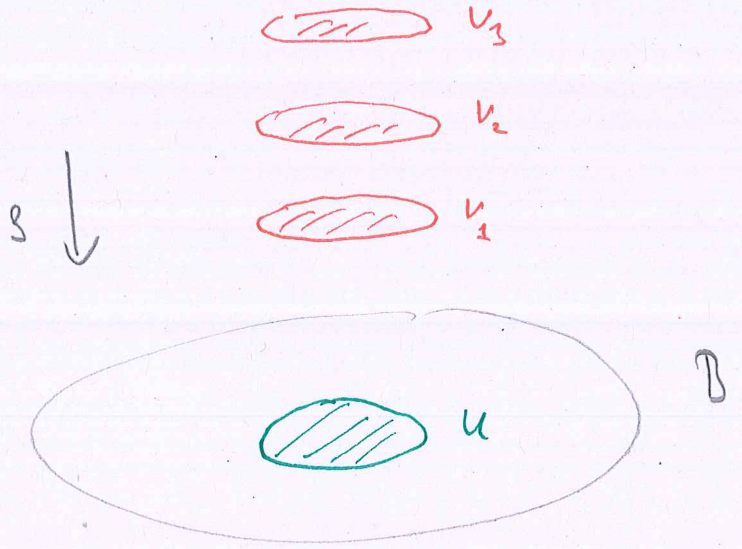
8. <u>Def</u> Sei $\rho : E \to B$ eine stetige surjektive Abbildung, sei $U \subseteq B$ offen. Wir sagen, U hat Eigenschaft (*), wenn gilt:

(*) $\rho^{-1}(U) = \bigcup_{j \in I} V_j$ für eine Indexmenge I, $V_j \subseteq E$ offen, $V_i \cap V_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und für jedes $j \in I$ ist die Einschränkung

$$V_j \xrightarrow{\rho} U$$

ein Homöomorphismus.

Wenn jedes $b \in B$ eine offene Umgebung $U \subseteq B$ mit (*) hat, dann heißt $\rho : E \to B$ <u>Überlagerung</u>.



("Fliegende Pfannkuchen")

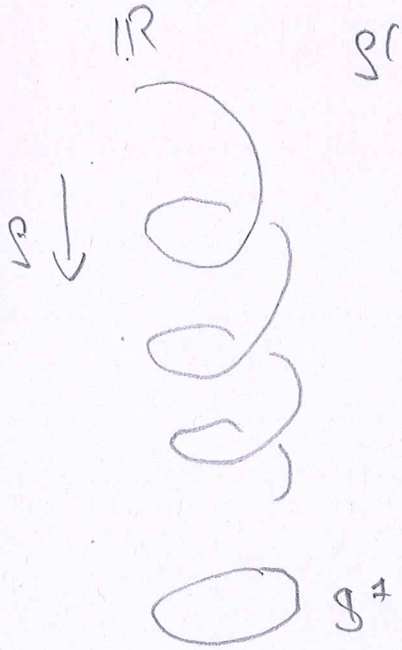
<u>Bsp</u> (a) $E = B$, $s = id$, $U = B$, $I = \{1\}$

ist Überlagerung

(b) $E = B \times I$ I mit diskreter Topologie

$s(b,i) = b$ ist Überlagerung

(c) $E = \mathbb{R}$, $B = S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$



$s(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$

Das ist eine Überlagerung, denn:

$p = (c, s) \in S^1$, $U = S^1 - \{-p\}$

$c = \cos(t_0)$, $s = \sin(t_0)$

$$s^{-1}(U) = \cup \underbrace{(t_0 - \tfrac{3}{2}, t_0 - \tfrac{1}{2})}_{V_{-1}} \cup \underbrace{(t_0 - \tfrac{1}{2}, t_0 + \tfrac{1}{2})}_{V_0} \cup \underbrace{(t_0 + \tfrac{1}{2}, t_0 + \tfrac{3}{2})}_{V_1} \cup \ldots$$

$s|_{V_n} : V_n \to U$ ist Homöomorphismus

Ist $E \xrightarrow{\rho} B$ eine Überlagerung, so heißt B <u>Basisraum</u>, E Totalraum und für $b \in B$ heißt $E_b = \rho^{-1}(b)$ <u>Faser über b</u>.

Sind $f: X \to B$ und $\tilde{f}: X \to E$ stetige Abbildungen, so heißt $\tilde{f}$ <u>Lift</u> oder <u>Anhebung</u> von f, wenn gilt $\rho \circ \tilde{f} = f$.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "\rho"] \\ X \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

9. <u>Theorem</u> Sei $\rho: E \to B$ eine Überlagerung. Sei $h: [0,1]^n \to B$ stetig, $n=1$ oder $n=2$. Sei $e \in E$ mit $\rho(e) = h(0)$ bzw. $\rho(e) = h(0,0)$. Dann gibt es <u>genau ein</u> Lift $\tilde{h}: [0,1]^n \to E$ von h mit $\tilde{h}(0) = e$ bzw. $\tilde{h}(0,0) = e$.

Beweis 1) Existenz und Eindeutigkeit für $n = 1$

Sei $h: [0,1] \to B$ stetig. Da $[0,1]$ kompakt ist, finden wir $U_1, \dots, U_m \subseteq B$ offen mit $(*)$ und $s_0 = 0 < s_1 < \dots < s_m = 1$ so, dass

$$h([s_{k-1}, s_k]) \subseteq U_k \quad \text{gilt.}$$

Wegen $(*)$ existiert $V_1 \subseteq g^{-1}(U_1)$ mit $e \in V_1$ so, dass $V_1 \xrightarrow{g} U_1$ ein Homöomorphismus ist. Wir erhalten ein Lift

$$\begin{tikzcd} & V_1 \arrow[d, "\cong"] & \subseteq & E \arrow[d] \\ {[0,s_1]} \arrow[ur, "h_1"] \arrow[r, "h"'] & U_1 & \subseteq & B \end{tikzcd}$$

Da V_1 offen und abg in $g^{-1}(U)$ ist, gilt für jeden weiteren Lift h_1' von $[0, s_1] \to B$ mit $h_1'(0) = e$, dass $h_1'([0,1]) \subseteq V_1 \Rightarrow h_1' = h_1$.

Jetzt weiter mit

$$\begin{tikzcd} & V_2 \arrow[d] & \subseteq & E \arrow[d] \\ {[s_1, s_2]} \arrow[ur, "h_2"] \arrow[r, "h"'] & U_2 & \subseteq & B \end{tikzcd}$$

mit $h_2(s_1) = h_1(s_1)$ usw. Setze nun

$$\tilde{h}(t) = h_k(t) \quad \text{wenn } t \in [s_{k-1}, s_k]$$

$\Rightarrow$ $\tilde{h}$ ist Lift von h, auf jedem Teilstück

$[s_{k-1}, s_k]$ eindeutig $\Rightarrow$ $\tilde{h}$ ist eindeutiger Lift. $\square$

2) <u>Eindeutigkeit für $n=2$</u>

Angenommen, $\tilde{h}$ und $\tilde{\tilde{h}}$ sind Lifts von

$h: [0,1]^2 \to B$ mit $\tilde{h}(0,0) = \tilde{\tilde{h}}(0,0) = e$. Sei

$(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$. Dann ist

$\alpha(s) = h(sx, sy)$ ein Pfad mit Lifts

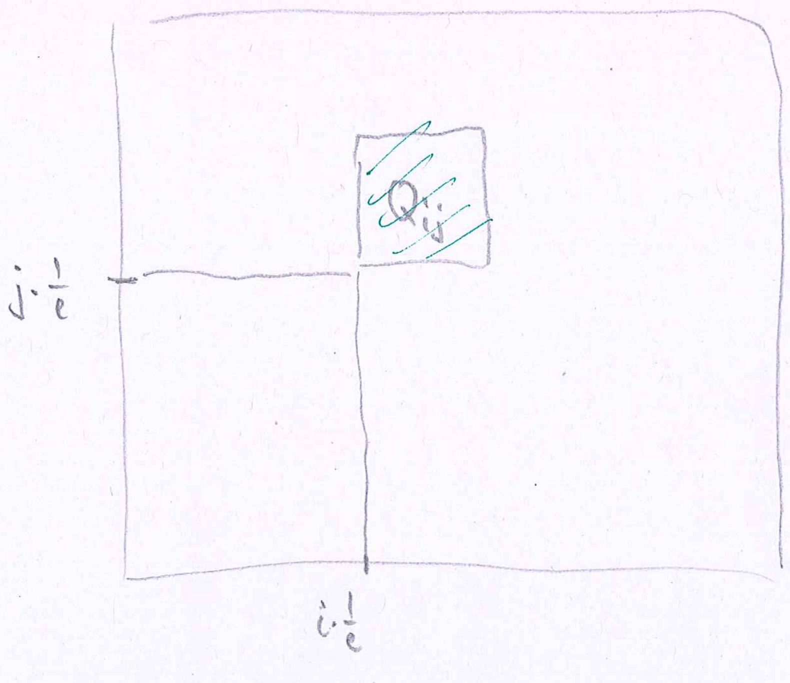
$\tilde{\alpha}(s) = \tilde{h}(sx, sy)$ und $\tilde{\tilde{\alpha}}(s) = \tilde{\tilde{h}}(sx, sy)$

$\Rightarrow \tilde{\alpha} = \tilde{\tilde{\alpha}} \Rightarrow \tilde{h}(x,y) = \tilde{\tilde{h}}(x,y)$ $\square$

3. <u>Existenz für $n=2$</u>

Sei $l \geq 1$. Wir unterteilen $[0,1] \times [0,1]$ in

l^2 Quadrate der Kantenlänge $\frac{1}{l}$, Q_{ij}



Nach Lebesgues Lemma (ÜA 7.2) existiert ein $l \geq 1$ so, dass für alle i,j $h(Q_{ij}) \subseteq U_{ij}$, U_{ij} mit Eigenschaft (*).

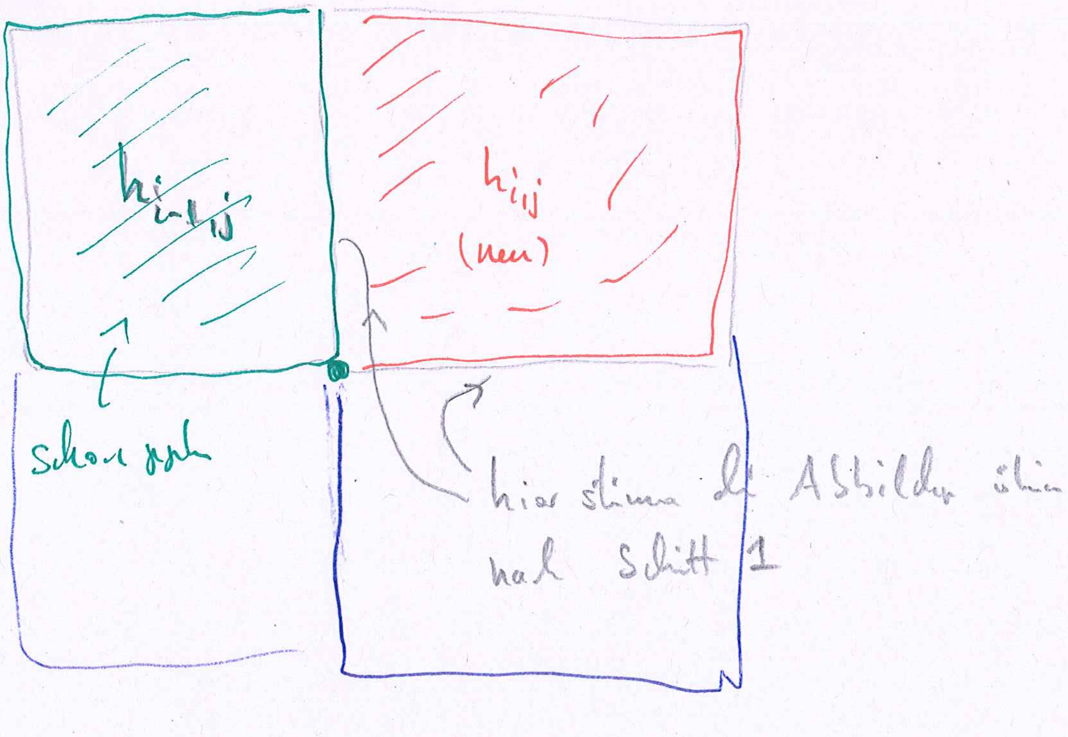
Nun konstruieren wir der Reihe nach Lifts $\tilde{h}_{ij}$ von

$$h_{ij} = h|_{Q_{ij}} \quad \text{für} \quad \begin{array}{l} j=0,\ i=0,\dots,l-1 \\ j=1,\ i=0,\dots,l-1 \end{array}$$

mit
$$\tilde{h}_{ij}\left(i\cdot\tfrac{1}{l}, j\,\tfrac{1}{l}\right) = \tilde{h}_{i-1,j}\left(i\tfrac{1}{l}, j\tfrac{1}{l}\right)$$

$$\tilde{h}_{0j}\left(0, \tfrac{1}{j}\cdot l\right) = \tilde{h}_{0,j-1}\left(0, \tfrac{1}{j}l\right)$$

$$\tilde{h}_{00}(0,0) = c$$



Wir erhalten einen stetigen Lift $\tilde{h}$ durch

$$\tilde{h}|_{Q_{ij}} = \tilde{h}_{ij}$$ $\square$

<u>Bem</u> Der Satz gilt auch für $n = 3, 4, 5, \ldots$ mit dem selben Beweis.

10. <u>Satz</u> Sei $p \in \mathbb{S}^1$. Dann gilt

$$\pi_1(\mathbb{S}^1, p) \cong \mathbb{Z}.$$

<u>Beweis</u> Da $\mathbb{S}^1$ wegzush. ist, dürfen wir OE $p = (0,1) \in \mathbb{R}^2$ annehmen. Wir betrachten die Überlagerung

$$\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1, \quad t \mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)), \text{ vgl. §4.8 (c)}$$

Für $\alpha : [0,1] \to \mathbb{S}^1$ stetig mit $\alpha(0) = p = \alpha(1)$ sei $\tilde{\alpha} : [0,1] \to \mathbb{R}$ der eindeutige Lift mit $\tilde{\alpha}(0) = 0$.

Wir setzen $\Phi([\alpha]) = \tilde{\alpha}(1) \in \mathbb{Z}$

<u>Beh (1)</u> <u>Φ ist wohldefiniert.</u>

Denn: $[\alpha] = [\alpha'] \Rightarrow$ es gibt Homotopie rel $\{0,1\}$

$h : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{S}^1$ mit $h_0 = \alpha$, $h_1 = \alpha'$

$h(t,s) = h_s(t)$

Sei $\tilde{h}$ ein Lift von h mit $\tilde{h}(0,0) = 0$

$\tilde{h} : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$

$\Rightarrow \tilde{h}_0 = \alpha$ und $\tilde{h}_1 = \alpha'$ wegen Eindeutigkeit des Lifts.

Wegen $h_s(0) = p$ für alle $s \in [0,1]$ folgt
$\tilde{h}_s(0) = 0$ für alle $s \in [0,1]$ (Eindeutigkeit des Lifts)
genauso $\tilde{h}_s(1) = \tilde{h}_0(1) = \tilde{\alpha}(1) \Rightarrow \tilde{\alpha}(1) = \tilde{\alpha}'(1)$. $\square$

<u>Beh (2)</u> <u>Φ ist Homomorphismus</u>

Seien $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(S^1, p)$ mit Lifts $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$.

Dann ist $t \mapsto \begin{cases} \tilde{\alpha}(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \tilde{\alpha}(1) + \tilde{\beta}(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$

ein Lift von $\alpha * \beta$, also $\Phi([\alpha * \beta]) = \tilde{\alpha}(1) + \tilde{\beta}(1)$
$= \Phi([\alpha]) + \Phi([\beta])$. $\square$

<u>Beh (3)</u> <u>Φ ist surjektiv</u>

Für $l \in \mathbb{Z}$ betrachte $\alpha(t) = (\cos(2\pi l t), \sin(2\pi l t))$
$\rightsquigarrow [\alpha] \in \pi_1(S^1, p)$, $\tilde{\alpha}(t) = lt \rightsquigarrow \Phi([\alpha]) = l$ $\square$

<u>Beh (4)</u> <u>Φ ist injektiv</u>

Angenommen $[\alpha] \in \ker(\Phi) \rightsquigarrow \tilde{\alpha}(1) = 0$
$\rightsquigarrow \tilde{\alpha} \in \pi_1(\mathbb{R}, 0) = \{[\varepsilon_0]\}$, vgl § 4.4.
$\Rightarrow \tilde{\alpha} \simeq \varepsilon_0$ rel $\{0,1\} \Rightarrow \alpha = \rho \circ \tilde{\alpha} \simeq \rho \circ \varepsilon_0 = \varepsilon_p$ rel $\{0,1\}$
$\Rightarrow [\alpha] = [\varepsilon_p]$ $\square$

11. Def Wir setzen $D^n = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\|_2 \leq 1 \}$ (n-dimensionaler Einheitsball), $S^{n-1} \subseteq D^n$.

Def Sei $A \subseteq X$, X ein top. Raum. Eine stetige Abbildung $f: X \to A$ heißt Retraktion, wenn für alle $a \in A$ gilt $f(a) = a$.

12. Satz Sei $n \leq 2$. Dann gibt es keine Retraktion $r: D^n \to S^{n-1}$.

Beweis $n=1$: $D^1 = [-1,1]$ ist zush. Gäbe es r, dann ist $r(D^1) \subseteq S^0 = \{\pm 1\}$ ~~ist~~ zush $\Rightarrow r(D^1) \neq \{0,1\}$. ↯

$n = 2$ Sei $p \in S^1$, betrachte

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, equal] & D^2 \arrow[d, "r"] \\ & S^1 \end{tikzcd} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} \pi_1(S^1,p) \arrow[r, "i_\#"] \arrow[dr, equal] & \pi_1(D^2,p) \arrow[d, "r_\#"] \\ & \pi_1(S^1,p) \cong \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

aber $\pi_1(D^2,p) = \{[\varepsilon_p]\}$, Beweis wie in Bsp §4.4

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[dr, equal] & \{0\} \arrow[d] \\ & \mathbb{Z} \end{tikzcd} \quad ↯$$

$\square$

<u>Bem</u> Der vorig. Satz gilt auch für alle $n = 3, 4, 5, 6, \dots$, dazu braucht man algebraische Topologie.

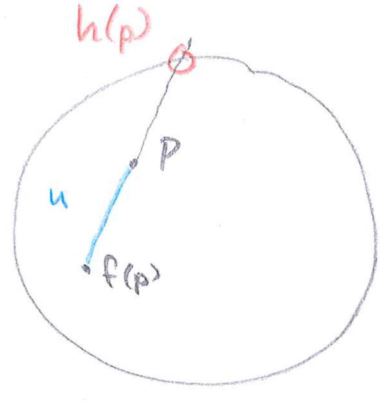
13. <u>Korollar</u> (<u>Brouwers Fixpunktsatz</u>) Sei $n \leq 2$, sei $f : D^n \to D^n$ stetig. Dann gibt es $p \in D^n$ mit $f(p) = p$.

<u>Beweis:</u> Angenommen, das wäre falsch. Betrachte $h(p)$ wie folgt: $u(p) = p - f(p) \neq 0$

$h(p) = p + \lambda \cdot u(p)$ $\quad \lambda \geq 0$ so, dass $\|h(p)\|_2 = 1$

$\lambda \geq 0$ Lösung der quadr. Gleichung

$\lambda^2 \|u\|_2^2 + \lambda \cdot 2 \langle p, u \rangle + \|p\|_2^2 = 1$



$\Rightarrow h : D^n \to S^{n-1}$ Retraktion (für jedes n) ↯

<u>Bem</u> Auch Brouwers Fixpunktsatz gilt für alle $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

14. __Satz__ Sei $(X_j)_{j\in J}$ eine Familie von top. Räumen, sei $p_j \in X_j$ für jedes $j \in J$. Dann gilt

$$\pi_1(\prod X_j, p) = \prod \pi_1(X_j, p_j). \qquad p = (p_j)_{j\in J}$$

__Bew.__ Für jedes $k \in J$ haben wir den Homomorphismus

$$(pr_k)_\# : \pi_1(\prod X_j, p) \to \pi_1(X_k, p_k)$$

daraus ein Homomorphismus

$$\Phi : \pi_1(\prod X_j, p) \to \prod_{k\in J} \pi_1(X_k, p_k)$$

$$[\alpha] \longmapsto ([pr_k \circ \alpha]_{k\in J})$$

__Φ ist surjektiv:__ Sei $[\alpha_k] \in \pi_1(X_k, p_k)$ für alle $k \in J$.

$\alpha_k : [0,1] \to X_k$ stetig $\Rightarrow$ es gibt

$\alpha : [0,1] \to \prod_{k\in J} X_k$ mit $pr_k \circ \alpha = \alpha_k$ stetig

$\alpha_k(0) = \alpha_k(1) = p_k \Rightarrow \alpha(0) = \alpha(1) = p \Rightarrow$

$\Phi([\alpha]) = ([\alpha_k]_{k\in J})$

__Φ ist injektiv:__ Angenommen, $[\alpha] \in \ker(\Phi)$. Zz: $[\alpha] = [\varepsilon_p]$.

Für jedes k ist $[pr_k \circ \alpha] = [\varepsilon_{p_k}]$, d.h. es gibt

Homotopie $h^k : [0,1]\times[0,1] \to X_k$ rel $\{0,1\}$

$h^k_0 = pr_k \circ \alpha \qquad h^k_1 = \varepsilon_{p_k}$

$\leadsto$ es gibt $h: [0,1] \times [0,1] \to \prod_{k \in J} X_k$ mit

$pr_k \circ h = h^k$ für jedes $k \in J$ $\leadsto$ $h_0 = \alpha$, $h_1 = \varepsilon_p$,

$\alpha \simeq \varepsilon_p$ rel $\{0,1\}$. $\square$ #

15. <u>Bsp.</u> (a) $\pi_1(\underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{\ell \text{ Faktoren}}, p) \cong \mathbb{Z}^\ell$

(b) $\mathbb{R}^m - \{0\} \cong S^{m-1} \times \mathbb{R}$ via <u>Polarkoordinaten</u>

$$u \longmapsto (\hat{u}, \log \|u\|_2)$$

$$\hat{u} = \frac{1}{\|u\|_2} u$$

folglich $\pi_1(\mathbb{R}^m - \{0\}, p) \cong \begin{cases} \{[\varepsilon_p]\} & \text{falls } m \neq 2 \\ \mathbb{Z} & \text{falls } m = 2 \end{cases}$

(*)

16. <u>Satz</u> (Dimensionsinvarianz in kleinen Dimensionen)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}$, $V \subseteq \mathbb{R}^2$, $W \subseteq \mathbb{R}^m$, $m \geq 3$ offen und nicht leer. Dann sind U, V, W paarweise nicht homöomorph.

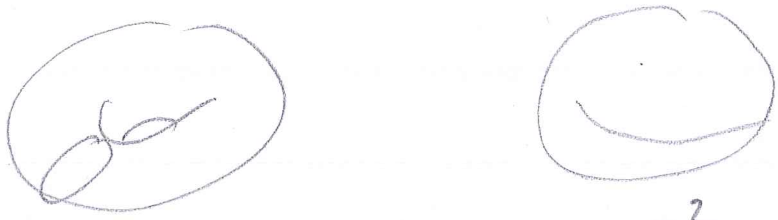
<u>Beweis</u> Sei $u \in U$, $v \in V$, $w \in W$. Wir zeigen:

(a) für <u>jede</u> Umgebung $U' \subseteq U$ von u ist $U' - \{u\}$ unzusammenhängend

(b) v und w haben Umgebungen $V' \subseteq V$ und $W' \subseteq W$, für die $V' - \{v\}$ bzw. $W' - \{w\}$ zush. sind.

(*) (c) "Ein Autoreifen ist kein Fußball":

$\mathbb{S}^2$ und $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ sind nicht homöomorph



$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{S}^2$

denn: $\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, p) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$\pi_1(\mathbb{S}^2, q) \cong \{[\varepsilon_q]\}$.

(c) Für jede Umgebung $V' \subseteq V$ von v ist
$\pi_1(V' - \{v\}, p) \neq \{[\varepsilon_p]\}$

(d) Es gibt Umgebung $W' \subseteq W$ von w mit
$\pi_1(W' - \{w\}, q) = \{[\varepsilon_q]\}$.

Zu (a): $U' - \{u\} = ((-\infty, u) \cap U') \cup ((u, +\infty) \cap U')$
ist nicht zush. $\square$

Zu (b): Wähle $\varepsilon > 0$ so, dass $V' = B_\varepsilon(v) \subseteq V$ gilt.
Dann ist $B_\varepsilon(v) - \{v\} \cong \mathbb{S}^1 \times (0, \varepsilon)$ zush., genauso
$B_\varepsilon(w) - \{w\} \cong \mathbb{S}^{n-1} \times (0, \varepsilon)$ zush. $\square$

Zu (c): Wähle $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(v) \subseteq V'$, betrachte das

Diagramm

$$\begin{tikzcd}
B_\varepsilon(v) - \{v\} \subset V' - \{v\} \subset \mathbb{R}^2 - \{v\} \arrow[d, "\varphi"'] & \mathbb{R}^2 - \{v\} \arrow[d, "\varphi"] \\
\mathbb{S}^1 \arrow[r, equal] & \mathbb{S}^1
\end{tikzcd}$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\|x - v\|_2}(x - v)$$

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(B_\varepsilon(v) - \{v\}, q) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \pi_1(V' - \{v\}, q) \arrow[r] & \pi_1(\mathbb{R}^2 - \{v\}, q) \arrow[d, "\cong"] \\
\pi_1(\mathbb{S}^1, \varphi(q)) \arrow[rr, equal] & & \pi_1(\mathbb{S}^1, \varphi(q))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{matrix} \pi_1(\mathbb{S}^1, \varphi(q)) \\ \cong \\ \mathbb{Z} \end{matrix}$$

Zu (d): Wähle $\varepsilon > 0$ so, dass $W' = B_\varepsilon(w) \subseteq W$ gilt. Dann ist $W' - \{w\} \cong \mathbb{S}^{m-1} \times (0, \varepsilon)$ einfach zush., da $m - 1 \geq 2$. $\square$

Bem Allgemein gilt: ist $\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sind U, V homöomorph, so ist $m = n$ (Satz von der Dimensionsinvarianz) $\rightarrow$ algebraische Topologie.

17. Satz Sei $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ stetig. Dann existiert ein $p \in \mathbb{S}^2$ mit $f(p) = f(-p)$.
Anschaulich: Auf der Erdoberfläche gibt es immer zwei antipodale Punkte $p, -p$, wo Luftdruck und Temperatur gleich sind.

Beweis Angenommen, $f(z) \neq f(-z)$ für alle $z \in \mathbb{S}^2$. Betrachte $h(z) = \dfrac{f(z) - f(-z)}{\| f(z) - f(-z) \|_2} \in \mathbb{S}^1$

$\leadsto h : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^1$ stetig. Für jedes $z \in \mathbb{S}^2$ gilt $h(z) + h(-z) = 0$

Betrachte $\alpha : [0,1] \to S^2$

$$\alpha(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 0) \in S^2$$

$$\beta(t) = h(\alpha(t)) \in S^1$$

$\rightsquigarrow \alpha(0) = \alpha(1)$, $\beta(0) = \beta(1) = (\cos(2\pi r), \sin(2\pi r))$ für ein $r \in [0,1)$

$$\begin{tikzcd} {[0,1]} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & S^2 \arrow[d, "h"] \\ & S^1 \end{tikzcd}$$

Weiter $\beta(t) + \beta(t+\frac{1}{2}) = 0$ (*) für alle $t \in [0,1]$

Betrachte die Überlagerung $g : \mathbb{R} \to S^1$,
$g(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$.

Sei $\tilde{\beta} : [0,1] \to \mathbb{R}$ der eindeutige Lift von β mit $\tilde{\beta}(0) = r$. Für $t \in [0, \frac{1}{2}]$ schreibe
$\tilde{\beta}(t+\frac{1}{2}) = \tilde{\beta}(t) + y_t$. Aus (*) folgt $y_t = \frac{2l_t+1}{2}$ für ein $l_t \in \mathbb{Z}$, insgesamt

$$\tilde{\beta}(t+\tfrac{1}{2}) - \tilde{\beta}(t) = \frac{2l_t+1}{2}.$$

Die linke Seite ist stetig in t, die rechte Seite nimmt Werte in $\frac{1}{2}\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ an. Da $[0,\frac{1}{2}]$ zusammenh. ist, ist die rechte Seite konstant,

$$2\tilde{\beta}(t+\tfrac{1}{2}) - 2\tilde{\beta}(t) = 2l + 1 = \text{const.}$$

Insbesondere ist
$$\tilde{\beta}(1) = \tilde{\beta}(\tfrac{1}{2}) + \frac{2l+1}{2}$$
$$\tilde{\beta}(\tfrac{1}{2}) = \underbrace{\tilde{\beta}(0)}_{=r} + \frac{2l+1}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \tilde{\beta}(1) = r + 2l+1 \neq 0$ (da $0 \leq r < 1$)

Aus §4.10 folgt $[\beta] \neq [\varepsilon_q]$ $q = \beta(0)$.

Das ist ein Widerspruch zu $[\beta] = h_\#[\alpha]$, da

$[\alpha] \in \pi_1(S^2, (1,0,0)) = [\varepsilon_{(1,0,0)}]$ $\square$