§ 5 Mannigfaltigkeiten

1. Def Ein Hausdorffraum M heißt *m-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit* oder *topologische m-Mannigfaltigkeit*, wenn jedes $p \in M$ eine (offene) Umgebung $U \subseteq M$ hat, die homöomorph zu einer offenen Teilmenge $U' \subseteq \mathbb{R}^m$ ist.
Einen derartigen Homöomorphismus $x : U \xrightarrow{\approx} U'$ nennt man *Koordinatensystem* oder *Karte* nahe p.

Beispiele (a) Jede offene Teilmenge $W \subseteq \mathbb{R}^m$ ist eine topologische m-Mannigfaltigkeit.
(b) Ist M eine top. m-Mannigfaltigkeit, so ist auch jede offene Teilmenge $W \subseteq M$ eine top. m-Mannigfaltigkeit.
(c) Sind $M_1, \dots, M_r$ topologische $m_1, \dots, m_r$-Mannigfaltigkeiten, so ist auch das Produkt $M = M_1 \times \dots \times M_r$ eine topologische $m = m_1 + m_2 + \dots + m_r$-Mannigfaltigkeit.

Satz Für jedes $m = 0, 1, 2, \ldots$ ist die Sphäre $S^m = \{ v \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \|v\|_2 = 1 \}$ eine topologische m-Mannigfaltigkeit.

Beweis Sei $p \in S^m$, $p = (p_0, \ldots, p_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$.

Dann gibt es ein j mit $p_j \neq 0$. Angenommen, $p_j > 0$.

$U = \{ v \in S^m \mid v_j > 0 \}$

$U' = \{ w \in \mathbb{R}^m \mid w_1^2 + \ldots + w_m^2 < 1 \} \subseteq \mathbb{R}^m$ offen

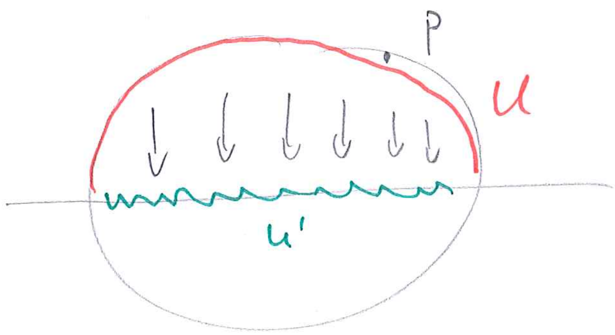
$x : U \to U'$, $(v_0, \ldots, v_m) \longmapsto (v_0, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_m)$

Umkehrabbildung $y : U' \to U$ mit

$$(w_1, \ldots, w_m) \longmapsto (w_1, \ldots, w_j, s, w_{j+1}, \ldots, w_m)$$

$$s = 1 - (w_1^2 + \ldots + w_m^2)$$

Entsprechend mit Vorzeichen andersrum, wenn $p_j < 0$



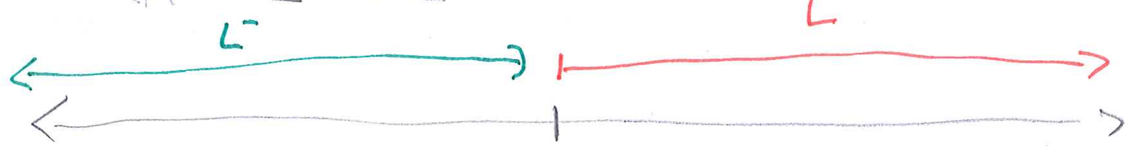
3. Bem (a) Eine topologische 0-Mannigfaltigkeit ist einfach eine Menge M mit diskreter Topologie.

(b) $\mathbb{S}^1$ und $\mathbb{R}$ sind topologische zusammenhängende 1-Mannigfaltigkeiten.

(c) Erinn.: $L = \omega_1 \times [0,1)$ ist Alexandroffs Halbgerade. Dann ist $L' = L - \{(0,0)\}$ eine topologische 1-Mannigfaltigkeit, die nicht metrisierbar ist.

(d) Setze $L^- = L'$ mit umgedrehter Anordnung und

$A = L^- \dot\cup L$



Dann ist M eine topologische 1-Mannigfaltigkeit, Alexandrovs Gerade.

4. Theorem (Kneser 1958) Jede zusammenhängende topologische 1-Mannigfaltigkeit ist homöomorph zu $\mathbb{S}^1$, zu $\mathbb{R}$, zu L' oder zu A.

$\mathbb{S}^1$ ist kompakt, $\mathbb{R}$, L' und A nicht.

$\mathbb{R}$ und $\mathbb{S}^1$ sind metrisierbar, L' und A nicht.

L' und A sind nicht homöomorph.

5. __Lemma__ Sei M eine topologische m-Mannigfaltigkeit, sei $p \in M$ und sei $C(p)$ die Zusammenhangskomponente von p, vgl. §3.2. Dann ist $C(p)$ offen, abg. und wegzush. und insbesondere ist $C(p)$ eine zush. top. m-Mannigfaltigkeit.

__Bew:__ Sei $A(p) = \{ q \in M \mid$ es gibt einen stetigen Weg $\alpha: [0,1] \to M \}$ mit $\alpha(0) = p$ und $\alpha(1) = q \}$. Es folgt $A(p) \subseteq C(p)$. Ist $q \in A$, so hat q eine offene Umgebung U, die zu einem ε-Ball $B_\varepsilon(0) \subseteq \mathbb{R}^m$ homöomorph ist (weil M eine top. m-Mannigfaltigkeit ist). Es folgt $U \subseteq A(p) \Rightarrow A(p)$ ist offen, $A(p) \subseteq C(p)$. Weiter ist $M - A(p) = \bigcup \{ A(q) \mid q \notin A(p) \}$ offen $\Rightarrow A(p)$ abg. $\Rightarrow A(p) = C(p)$ $\square$

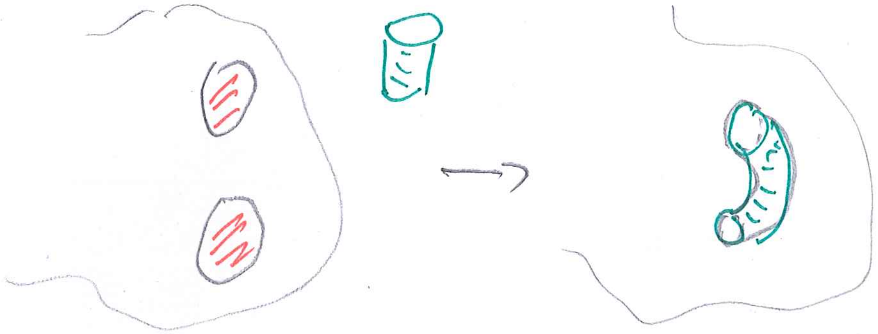
Aus diesem Grund reicht es oft, zusammenhängende Mannigfaltigkeiten zu untersuchen.

Eine 2-Mannigfaltigkeit nennt man __Fläche__.

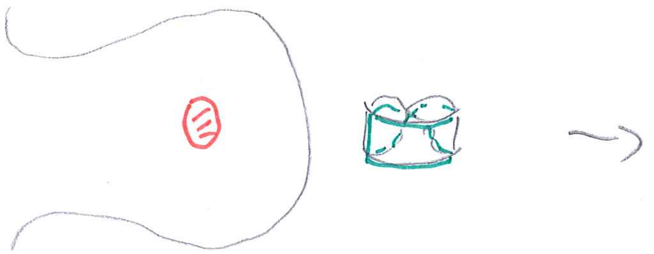
Zusammenhängende Flächen sind (meines Wissens) nicht klassifiziert. Es gibt aber folgendes

6. <u>Theorem</u> Sei M eine kompakte zush. Fläche. Dann lässt sich M wie folgt in endlich vielen Schritten (eindeutig) aus S^2 konstruieren:

<u>Konstruktion (a)</u> entferne 2 Kreisscheiben und klebe einen Zylinder $S^1 \times [0,1]$ ein (*)



<u>Konstruktion (b)</u> entferne 1 Kreisscheibe und klebe ein Möbiusband ein



(kann ich nicht zeichnen)

(Das Theorem wurde im 19 Jhdt von mehreren Mathematikern bewiesen)

(*) Der Henkel  kann ev. auch "verschlungen" eingeklebt sein 

7. Die Poincaré-Vermutung

H. Poincaré ~ 1900: M kompakt zush. 3-Mannigfaltigkeit mit $\pi_1(M,p) = \{[c_p]\} \overset{?}{\Longrightarrow} M \cong S^3$.

Poincarés Vermutung wurde erst 2006 von G. Perelman bewiesen!

Durch die Arbeiten von Perelman, Thurston, Agol uva. gibt es inzwischen eine Klassifikation aller kompakten zush. (top.) 3-Mannigfaltigkeiten.

M. Freedman hat 1986 alle kompakten zush. top. 4-Mannigfaltigkeiten klassifiziert.

In höheren Dimensionen gibt es partielle Klassifikationsergebnisse.

Mit solchen Fragen beschäftigt sich die geometrische Topologie.

8. <u>Def</u> Sei $W \subseteq \mathbb{R}^m$ offen. Wir nennen eine Abbildung $f: W \to \mathbb{R}^n$ <u>glatt</u> oder <u>C^∞-Abbildung</u>, wenn f beliebig oft stetig differenzierbar ist.
Ist $F: W \longrightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ glatt und gibt es $h: V \to W$ glatt mit $h \circ F = id_W$ und $f \circ h = id_V$, so heißt f <u>Diffeomorphismus</u>. Dann ist notwendig $m = n$.

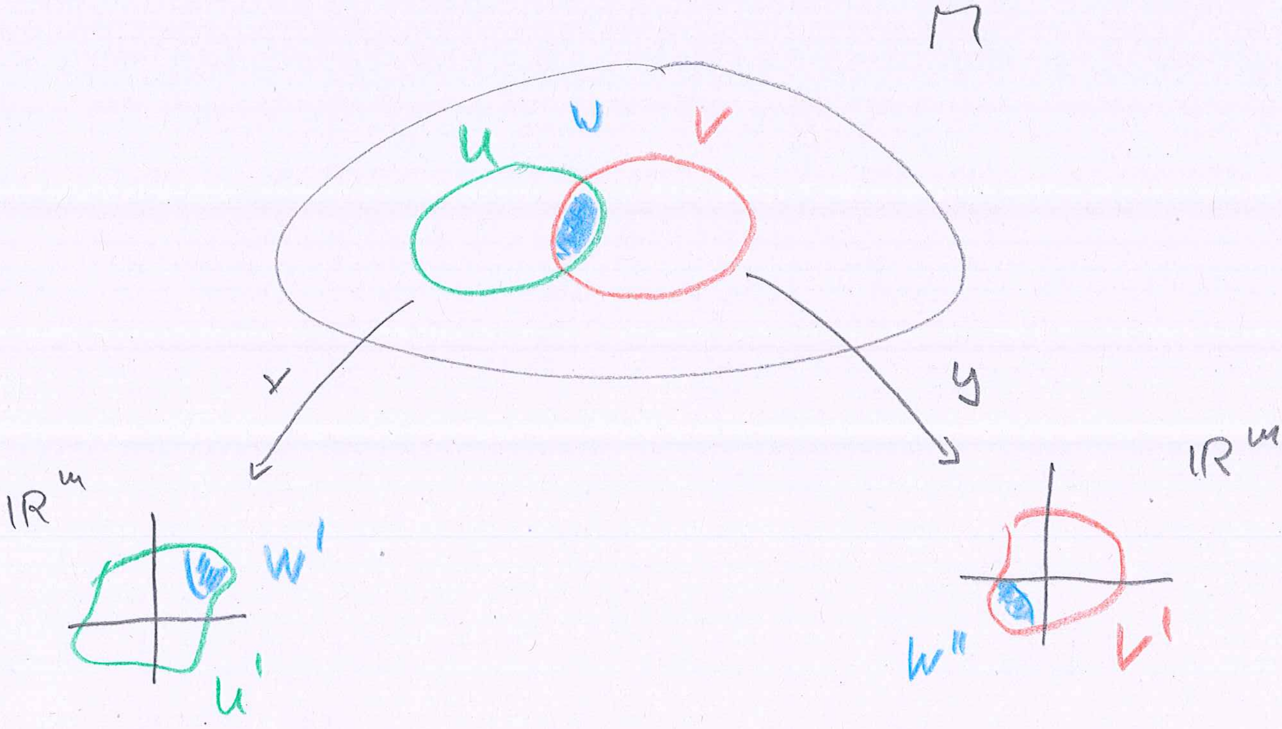
<u>Bsp</u>: $W = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}_{>0} = (0,\infty)$, $f(t) = \exp(t)$ ist Diffeomorphismus mit Inversen $h(s) = \log(s)$.

9. <u>Def</u> Sei M eine topologische m-Mannigfaltigkeit, seien $U, V \subseteq M$ offen und seien $x: U \xrightarrow{\cong} U' \subseteq \mathbb{R}^m$ und $y: V \xrightarrow{\cong} V' \subseteq \mathbb{R}^m$ Karten. Sei $W = U \cap V$, $W' = x(W)$ und $W'' = y(W)$. Wir nennen x und y <u>verträglich</u>, wenn die beiden Abbildungen

$$x \circ y^{-1}\big|_{W''} : W'' \to W'$$

$$y \circ x^{-1}\big|_{W'} : W' \to W''$$

glatt auf den offenen Mengen $W', W'' \subseteq \mathbb{R}^m$ sind.



Ein <u>Atlas</u> $\mathcal{A}$ für M besteht aus einer Menge von paarweise verträglichen Karten so, dass jedes $p \in M$ im Definitionsbereich mindestens einer Karte $x \in \mathcal{A}$ ist.

Ein Atlas $\mathcal{A}$ ist <u>maximal</u> wenn jede Karte z, die mit allen Karten $x \in \mathcal{A}$ verträglich ist, schon in $\mathcal{A}$ enthalten ist.

Jeder Atlas $\mathcal{A}$ ist in genau einem maximalen Atlas $\hat{\mathcal{A}}$ enthalten, nämlich

$$\hat{\mathcal{A}} = \{ z \mid z \text{ ist Karte, die mit allen } x \in \mathcal{A} \text{ verträglich ist} \}.$$

10. Eine <u>differenzierbare Mannigfaltigkeit</u> $(M, \mathcal{A})$ besteht aus einer topologischen Mannigfaltigkeit

M und einem maximalen Atlas $\mathcal{A}$ auf M.

Man nennt $\mathcal{A}$ dann auch <u>differenzierbare</u> <u>Struktur</u> auf M.

11. <u>Bsp</u> (a) $W \subseteq \mathbb{R}^m$ offen,

$$\mathcal{A} = \{ x : V \to V' \mid V \subseteq W,\ V' \subseteq \mathbb{R}^m \text{ offen},\ x \text{ Diffeomorphismus} \}$$

Dann ist $(W, \mathcal{A})$ eine diff'bare Mannigfaltigkeit.

(b) $\mathbb{S}^m \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$. In §5.2 haben wir $2(m+1)$ Karten angegeben, deren Definitionsbereiche $\mathbb{S}^m$ überdecken und die paarweise verträglich sind.

Setze $\mathcal{A} = \{ x : U \to U' \mid x \text{ Karte},\ U \subseteq \mathbb{S}^m \text{ offen},$
$U' \subseteq \mathbb{R}^m \text{ offen},\ x \text{ verträglich mit allen } 2(m+1) \text{ Karten} \}$

Dann ist $(\mathbb{S}^m, \mathcal{A})$ eine diff'bare Mannigfaltigkeit.

(c) Ist $(M, \mathcal{A})$ eine diff'bare Mannigfaltigkeit und ist $W \subseteq M$ offen, so setze

$$\mathcal{A}|_W = \{ x \in \mathcal{A} \mid x : U \to U',\ U \subseteq W \} \subseteq \mathcal{A}.$$

Dann ist $(W, \mathcal{A}|_W)$ eine diff'bare Mannigfaltigkeit.

(d) $(M_1, A_1), \ldots, (M_r, A_r)$ diff'bare Mannigfaltigkeiten, $M = M_1 \times \ldots \times M_r$

$\mathcal{B} = \{ x_1 \times \ldots \times x_r : U_1 \times \ldots \times U_r \to U_1' \times \ldots \times U_r' \mid$
$x_j \in A_j$ für $j = 1, \ldots, r \}$

ist Atlas auf $M_1 \times \ldots \times M_r$. Setze $A =$
$\{ z : W \to W' \mid W \subseteq M$ offen, z Karte, z mit allen $x \in \mathcal{B}$ verträglich $\}$. Dann ist (M, A) eine diff'bare Mannigfaltigkeit.

<u>Bem</u> • In den 1950er Jahren zeigt J. Milnor, dass es topologische Mannigfaltigkeiten gibt, die <u>keine</u> diff'bare Struktur zulassen.

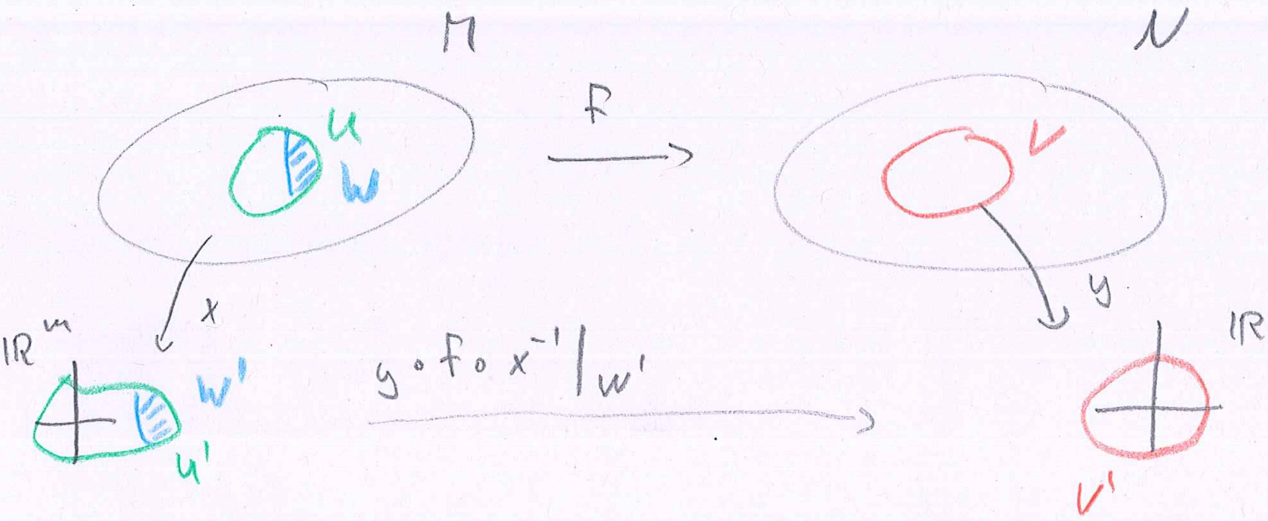
• Alexandrovs $L' = L - \{(0,0)\}$ erlaubt eine diff'bare Struktur

12. <u>Def</u> Seien (M, A) und $(N, \mathcal{B})$ diff'bare Mannigfaltigkeiten der Dimensionen m und n. Eine stetige Abbildung $f: M \to N$ heißt <u>glatt</u> oder <u>C^∞-Abbildung</u>, wenn folgendes gilt:

für jedes $x \in \mathcal{A}$, $y \in \mathcal{B}$, $x: U \to U'$
$y: V \to V'$

$W = f^{-1}(V) \cap U \subseteq M$ offen, $W' = x(W)$ ist

$y \circ f \circ x^{-1}|_{W'} : W' \to \mathbb{R}^n$ glatt



Eine stetige Abbildung $f: M \to \mathbb{R}$ ist demnach glatt, wenn für jedes $x \in \mathcal{A}$, $x: U \to U'$ die Abbildung $f \circ x^{-1}: U' \to \mathbb{R}$ glatt ist. Wir setzen $C^\infty(M, \mathbb{R}) = \{ f: M \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist glatt} \}$.

13. <u>Lemma</u> Seien $(M, \mathcal{A})$ und $(N, \mathcal{B})$ glatte Mannigfaltigkeiten, sei $f: M \to N$ stetig. Dann sind äquivalent:

(i) f ist glatt

(ii) für jedes $p \in M$ gibt es $x \in \mathcal{A}$, $y \in \mathcal{B}$

$x: U \xrightarrow{\cong} U'$, $y: V \xrightarrow{\cong} V'$ mit

$p \in U$, $f(p) \in V$ so, dass

$y \circ f \circ x^{-1}|_{W'} : W' \longrightarrow \mathbb{R}^n$ glatt ist, wobei $W = f^{-1}(V) \cap U$ und $W' = x(W)$.

Beweis (i) => (ii) klar.

(ii) => (i): Sei $\tilde{x} \in A$, $\tilde{y} \in B$ beliebig, sei $\tilde{x} : \tilde{U} \xrightarrow{\cong} \tilde{U}'$ und $\tilde{y} : \tilde{V} \xrightarrow{\cong} \tilde{V}'$. Sei $\tilde{W} = \tilde{U} \cap f^{-1}(\tilde{V})$, sei $p \in \tilde{W}$. Sei $x \in A$ und $y \in B$ wie in (ii). Es gilt nahe p

$$\tilde{y} \circ f \circ \tilde{x}^{-1} = \underbrace{(\tilde{y} \circ y^{-1})}_{\substack{\text{glatt, weil} \\ y,\tilde{y} \in B}} \circ \underbrace{(y \circ f \circ x^{-1})}_{\substack{\text{glatt nach} \\ \text{Voraussetzung}}} \circ \underbrace{(x \circ \tilde{x}^{-1})}_{\substack{\text{glatt, weil} \\ x,\tilde{x} \in A.}}$$

=> $\tilde{y} \circ f \circ \tilde{x}^{-1}$ glatt nahe p. $\square$

14. Erinnerung Sei $W \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und sei $f : W \to \mathbb{R}^n$ glatt, sei $p \in U$. Die (totale) Ableitung von f im Punkt p ist eine lineare Abbildung

$$Df(p) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$w \longmapsto v = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(p)\, w_k$$

$f = (f_1, \dots, f_n)$ $\quad f_j : W \to \mathbb{R}$ glatt

$w = (w_1, \dots, w_m)$ $\quad v = (v_1, \dots, v_n)$

$$V_k = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(p) \cdot W_j$$

Es gilt daher die <u>Kettenregel</u>: Sind $f : \underset{\mathbb{R}^m}{\underset{\cap}{W}} \to \underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{V}}$

sowie $h : \underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{V}} \to \mathbb{R}^\ell$ glatt, so ist

$$D(h \circ f)(p) = Dh(f(p)) \circ Df(p)$$

Verknüpfung von lin. Abbildungen

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^m \arrow[r, "Df(p)"] \arrow[dr, "D(h\circ f)(p)"'] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "Dh(f(p))"] \\
 & \mathbb{R}^\ell
\end{tikzcd}$$

Ist f ein Diffeomorphismus, so ist $Df(p)$ eine invertierbare lineare Abbildung und daher ist $m = n$ ($\to$ lin. Algebra)

—

Für $v, w \in \mathbb{R}^\ell$ ist $\langle v, w \rangle = \sum_{j=1}^{\ell} v_j w_j$ das <u>Standard-Skalarprodukt</u> auf $\mathbb{R}^\ell$

15. Tangentialvektoren in $\mathbb{R}^\ell$

Sei $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^\ell$ glatt (für ein $\varepsilon > 0$).

Die Geschwindigkeit von α zum Zeitpunkt $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ ist $\dot{\alpha}(s) = \frac{d}{dt} \alpha(t) \Big|_{t=s}$, die Beschleunigung von α ist $\ddot{\alpha}(s) = \frac{d^2}{dt^2} \alpha(t) \Big|_{t=s}$.

Sei $S^m_r = \{ v \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \langle v, v \rangle = r^2 \}$, für $r > 0$, die Sphäre vom Radius r. Dann ist S^m_r eine diff'bare Mannigfaltigkeit (Beweis wie bei $S^m = S^m_1$ mit offensichtlichen Modifikationen). $\#$

Eine stetige Abbildung $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S^m_r$ ist glatt genau dann, wenn α als Abbildung $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^{m+1}$ glatt ist (mit §5.13 und den $2(m+1)$ Karten für S^m_r).

Angenommen, $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S^m_r$ ist glatt. Dann ist $\langle \alpha(t), \alpha(t) \rangle = r^2 = \text{const}$, also

$$\underbrace{\langle \dot{\alpha}(s), \alpha(s) \rangle + \langle \alpha(s), \dot{\alpha}(s) \rangle}_{} = 0$$

$$\langle \dot{\alpha}(s), \alpha(s) \rangle = 0 \quad \text{für alle } s, \text{ d.h.}$$

$$\dot{\alpha}(s) \perp \alpha(s) \quad \text{für alle } s.$$

16. Lemma Sei $p \in S_r^m$. Dann gilt

$$p^\perp = \{ \dot\alpha(0) \mid \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S_r^m \text{ glatt mit } \alpha(0) = p \}$$

$$\left[p^\perp = \{ v \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \langle p, v \rangle = 0 \} \right]$$

Beweis: Wir haben schon überlegt, dass "$\supseteq$" gilt.

Sei $v \in p^\perp$, $v \neq 0$. Setze $a = \frac{\|v\|_2}{r}$

$$\alpha(t) = p \cdot \cos(at) + \frac{r}{\|v\|_2} v \cdot \sin(at)$$

$$\Rightarrow \|\alpha(t)\|_2^2 = \|p\|_2^2 \cos^2(at) + \frac{r^2}{\|v\|_2^2} \|v\|_2^2 \sin^2(at) = r^2$$

und $\dot\alpha(0) = \frac{r}{\|v\|_2} \cdot v \cdot a = v$ $\square$

Man nennt $\{ \dot\alpha(0) \mid \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S_r^m \text{ glatt mit } \alpha(0) = p \}$

$$= T_p S_r^m$$

den Tangentialraum von S_r^m im Punkt p.

Ist (M, A) eine diff'bare Mannigfaltigkeit, so kann man für jedes $p \in M$ einen Vektorraum $T_p M$ definieren, den Tangentialraum im Punkt p. Die allgemeine Konstruktion sehen wir hier aber nicht an, da sie etwas technisch ist.

17. <u>Def</u> Seien $U \subseteq \mathbb{R}^m$, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, sei $f: U \to V$ glatt. Wir nennen f eine <u>Immersion</u>, wenn für jedes $p \in U$ die Abbildung $Df(p): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ <u>injektiv</u> ist, und eine <u>Submersion</u>, wenn für jedes $p \in U$ die Abbildung $Df(p): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ <u>surjektiv</u> ist.

18. <u>Def</u> Sei $M \subseteq \mathbb{R}^\ell$ bezüglich der Teilraumtopologie eine topologische m-Mannigfaltigkeit, sei $\mathcal{A}$ eine diff'bare Struktur auf M, sei $i: M \hookrightarrow \mathbb{R}^\ell$ die Inklusionsabbildung. Wir nennen $(M, \mathcal{A})$ eine <u>Untermannigfaltigkeit</u> von $\mathbb{R}^\ell$, wenn für jedes $x \in \mathcal{A}$, $x: U \to U' \subseteq \mathbb{R}^m$ die Abbildung

$$x^{-1} = i \circ x^{-1}: U' \to \mathbb{R}^\ell$$

eine Immersion ist.

<u>Beispiele</u> (a) $W \subseteq \mathbb{R}^\ell$ offen mit $\mathcal{A}$ wie in §5.11(a)

$\Rightarrow (W, \mathcal{A})$ ist Untermannigfaltigkeit

(b) $S^m_r \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ ist Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^{m+1}$

20. __Def__ Sei $(M, \mathcal{A})$ eine Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^\ell$, sei $p \in M$. Der __Tangentialraum__ von M in p ist der Vektorraum

$$T_pM = \{ \dot{\alpha}(0) \mid \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \text{ glatt mit } \alpha(0) = p \}$$

__Beweis__, dass T_pM ein Vektorraum ist:

Sei $x \in \mathcal{A}$, $x : U \to U' \subseteq \mathbb{R}^m$ mit $p \in U$.

Ist $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ glatt mit $\alpha(0) = p$, so gibt es $\delta > 0$ und $\gamma : (-\delta, \delta) \to U'$ glatt mit

$\gamma(t) = (x \circ \alpha)(t)$. Es folgt

$$D(x^{-1})(x(p))\,\dot{\gamma}(0) = \dot{\alpha}(0)$$

$\leadsto$ $T_pM = \underbrace{D(x^{-1})(x(p))}_{\text{lin. Abbildung}}(\mathbb{R}^m)$ ist Untervektorraum. $\square$

21. **Def** Sei $(M, \mathcal{A})$ eine Untermannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^\ell$. Eine glatte Kurve $\alpha : (a,b) \to M$ heißt Geodäte, wenn in jedem $s \in (a,b)$ gilt $\ddot{\alpha}(s) \perp T_{\alpha(s)} M$, d.h. wenn die Beschleunigung von α zu keinem Zeitpunkt einen tangentialen Anteil hat. Insbesondere gilt

$$\langle \dot{\alpha}(s), \ddot{\alpha}(s) \rangle = 0, \quad \text{damit}$$

$$\langle \dot{\alpha}(s), \dot{\alpha}(s) \rangle = \text{const}$$

d.h. Geodäten haben konstante Geschwindigkeit.

Bsp (a) $M = W \subseteq \mathbb{R}^\ell$ offen, α Geodäte. Da $T_p M = \mathbb{R}^\ell$ für alle $p \in W$ gilt, folgt $\ddot{\alpha}(s) = 0$ für alle s, also $\dot{\alpha}(s) = v = \text{const}$

$\Rightarrow \alpha(s) = u + s \cdot v$ für ein geeignetes $u \in \mathbb{R}^\ell$.

Geodäten in W sind gerade Linien.

(b) $M = S^m_r \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$, α Geodät.

$\Rightarrow \ddot{\alpha}(s) = \lambda(s) \cdot \alpha(s)$ λ reelle Funktion

Aus $0 = \langle \alpha(s), \dot{\alpha}(s) \rangle$ folgt mit Ableiten

$$0 = \underbrace{\langle \dot{\alpha}(s), \dot{\alpha}(s) \rangle}_{= \text{const}} + \langle \alpha(s), \ddot{\alpha}(s) \rangle$$

$$= \text{const} + \lambda(s) \cdot \text{const} \Rightarrow \lambda(s) = \lambda = \text{const}$$

$\Rightarrow \ddot{\alpha}(s) = \lambda \cdot \alpha(s)$. Das ist eine Differentialgleichung, die zu jeden vorgegeben $v = \dot{\alpha}(s)$, $p = \alpha(s)$ genau eine Lösung hat, nämlich

$$\alpha(t) = p \cdot \cos(\omega(t-s)) + \frac{r}{\|v\|_2} v \cdot \sin(\omega(t-s))$$

$$\omega = \frac{\|v\|_2}{r} \quad \text{für } v \neq 0.$$

bzw $\alpha(t) = p = \text{const}$ für $v = 0$ $\square$

Ist (M, A) eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^{m+1}$, so nennt man M eine <u>Hyperfläche</u>. In jeden $p \in M$ gibt es dann ein (bis auf Vorzeichen) eindeutig Vektor $\nu(p) \in \mathbb{R}^{m+1}$ mit $\|\nu(p)\|_2 = 1$ und $\nu(p) \perp T_pM$.

In einer kleinen Umgebung W von p kann man $\nu : W \to \mathbb{R}^e$ so wählen, dass ν glatt ist (über Koordinaten und Gram-Schmidt-Verfahren).

Ist $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ glatt, $\alpha(0) = p \in M$, so

ist $\frac{d}{dt} \nu(\alpha(t)) = D\nu(p)\dot{\alpha}(0)$. Den tangentialen Anteil davon bezeichnen wir mit $A(\dot{\alpha}(0))$.

$\Rightarrow A : T_pM \to T_pM$ ist eine lineare Abbildung.

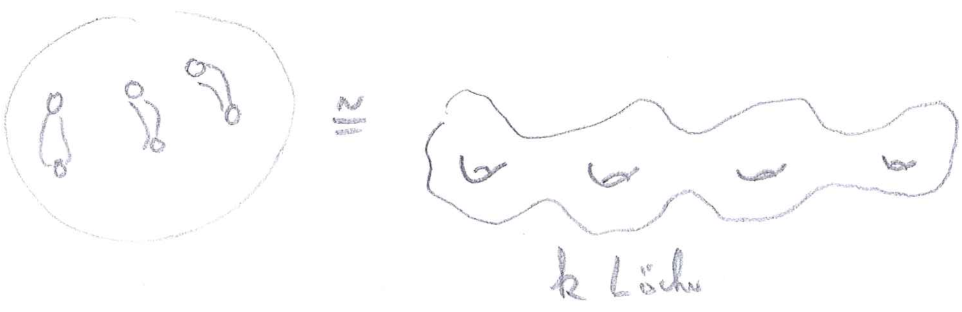
Man kann zeigen: A ist symmetrisch, d.h. für alle $v, w \in T_pM$ gilt:

$$\langle Av, w \rangle = \langle v, Aw \rangle$$

Folglich hat A reelle Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, die Hauptkrümmungen von M im Punkt p.

Ist $m = 2$, so ist $\varkappa = \det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$ die Gaußkrümmung der Fläche M im Punkt p.

Ist (M, A) eine kompakte Fläche im $\mathbb{R}^3$, so ist M homöomorph zu einer Sphäre S^2 mit k eingeklebten Henkeln, $k \geq 0$, vgl. §5.6

$M \cong$ 

k Löcher

Der Satz von Gauß-Bonnet besagt nun:

$$\int_M \varkappa(p)\,dp = 4\pi(1-k)$$

Solche Gleichungen sind sehr interessant: links steht eine analytische Größe, rechts eine topologische Invariante. Zum Beispiel folgt sofort: wenn $k \geq 1$ ist, so gibt es Punkte $p \in M$ mit $\varkappa(p) \leq 0$. Die Vorlesung Differentialgeometrie I (und II) behandelt solche Fragen.