1. Übungszettel zur Vorlesung
„Grundlagen der Analysis, Topologie und Geometrie“

SS 2019 | Prof. Dr. Linus Kramer
WWU Münster | Lara Beßmann

Aufgabe 1.1 (4 Punkte)
Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass der Grenzwert einer konvergenten Folge eindeutig ist.

Aufgabe 1.2 (1+1+1+1 Punkte)
Sei X ein metrischer Raum und $A, B \subseteq X$ zwei Teilmengen. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(i) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

(ii) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(iii) $\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)$

(iv) $\mathrm{Int}(A \cup B) = \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B)$

Aufgabe 1.3 (4 Punkte)
Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen (X, d_X) und (Y, d_Y). Zeigen Sie, dass f genau dann stetig ist, wenn für jede Teilmenge $Z \subseteq X$ gilt $f(\overline{Z}) \subseteq \overline{f(Z)}$.

Aufgabe 1.4 (2+2 Punkte)
Sei (X, d) ein metrischer Raum und $Y \subseteq X$ eine nichtleere Teilmenge. Für $x \in X$ definiere $d(x, Y) = \inf\{d(x, y) \mid y \in Y\}$. Zeigen Sie:

(i) $f : X \to \mathbb{R}, x \mapsto d(x, Y)$ ist stetig.

(ii) Es gilt $d(x, Y) = 0$ genau dann, wenn $x \in \overline{Y}$.

***-Aufgabe** (4 Punkte)
Ein metrischer Raum (X, d) heißt *folgenkompakt*, wenn jede Folge in X eine konvergente Teilfolge hat. Zeigen Sie: ein folgenkompakter Raum ist vollständig.

Abgabe bis: Donnerstag, den 11.4.2019, 8 Uhr.

Wenn Sie den QR-Code scannen gelangen Sie direkt zu dem Learnweb-Kurs zur Vorlesung. Dort findet die Anmeldung zu den einzelnen Übungsgruppen statt.