10. Übungszettel zur Vorlesung
„Grundlagen der Analysis, Topologie und Geometrie“

SS 2019	Prof. Dr. Linus Kramer
WWU Münster	Lara Beßmann

Aufgabe 10.1 (4 Punkte)

> **Definition:** Ein wegzusammenhängender Raum X heißt *einfach zusammenhängend*, wenn $\pi_1(X, p)$ für jedes $p \in X$ die triviale Gruppe ist.

Zeigen Sie, dass Alexandrovs Halbgerade einfach zusammenhängend ist.

Aufgabe 10.2 (4 Punkte)

> **Definition:** Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *sternförmig*, wenn es einen Punkt $a_0 \in A$ gibt, sodass für alle $a \in A$ gilt $\{at + a_0(1-t) \mid t \in [0,1]\} \subseteq A$.

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann sternförmig, wenn sie konvex ist.

(ii) Wenn $A \subseteq \mathbb{R}^n$ sternförmig ist, dann ist A einfach zusammenhängend.

Aufgabe 10.3 (4 Punkte)
Sei X wegzusammenhängend, seien $p, q \in X$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) $\pi_1(X, p)$ ist abelsch.

(ii) Für jedes Paar von Wegen $\lambda, \gamma\colon [0,1] \to X$ mit $\lambda(0) = \gamma(0) = p$ und $\lambda(1) = \gamma(1) = q$ gilt $f_\lambda = f_\gamma$.

Aufgabe 10.4 (4 Punkte)

(i) Sei X ein regulärer topologischer Raum. Zeigen Sie, dass es für alle $p, q \in X, p \neq q$ Umgebungen $U, V \subseteq X$ mit $p \in U, q \in V$ und $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$ gibt.

(ii) Sei X ein regulärer topologischer Raum mit abzählbarer Basis und sei $U \subseteq X$ eine offene Menge. Zeigen Sie, dass U als abzählbare Vereinigung von abgeschlossenen Mengen geschrieben werden kann.

Abgabe bis: Freitag, den 21.6.2019, 8 Uhr.