2. Übungszettel zur Vorlesung „Grundlagen der Analysis, Topologie und Geometrie“

SS 2019 — Prof. Dr. Linus Kramer
WWU Münster — Lara Beßmann

Aufgabe 2.1 (2+2 Punkte)
Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei

$$d'(x,y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}.$$

Zeigen Sie:

(i) d' ist eine Metrik.

(ii) d und d' sind topologisch äquivalent.

Aufgabe 2.2 (1+1+2 Punkte)
Sei $(X_k, d_k)_{k=1}^{\infty}$ eine Familie metrischer Räume. Sei $X = \prod_{k=1}^{\infty} X_k$ versehen mit der Metrik

$$d(u,v) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \bar{d}_k(u_k, v_k),$$

wobei $\bar{d}_k = min\{1, d_k\}$. Zeigen Sie:

(i) (X, d) ist ein metrischer Raum.

(ii) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist die Projektion $pr_k : X \to X_k$ stetig.

(iii) Eine Abbildung $f : Y \to X$ von einem metrischen Raum (Y, d_Y) ist stetig genau dann, wenn für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Komposition $f_k = pr_k \circ f : Y \to X_k$ stetig ist.

Aufgabe 2.3 (4 Punkte)
Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und sei $Y \subseteq X$ eine Teilmenge. Zeigen Sie:

$$\overline{Y} = Y \cup \{v \in X \mid v \text{ ist Häufungspunkt von } Y\}.$$

Dabei ist $\overline{Y} = \bigcap\{A \subseteq X \mid A \text{ abgeschlossen und } Y \subseteq A\}$.

Aufgabe 2.4 (2+2 Punkte)

(i) Sei $\{\mathcal{T}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine Familie von Topolgien auf X. Zeigen Sie, dass $\bigcap \mathcal{T}_\alpha$ eine Topolgie auf X ist. Ist $\bigcup \mathcal{T}_\alpha$ auch eine Topolgie auf X?

(ii) Sei $X = \{x, y, z\}$ und seien $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X, \{x\}, \{x, y\}\}$ und $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X, \{x\}, \{y, z\}\}$ zwei Topologien auf X. Finden Sie die kleinste Topologie die $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ enthält und die größte, die in beiden Topolgien enthalten ist.

***-Aufgabe** (2+2 Punkte)
Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_L}, \mathcal{T}_{\tilde{\mathcal{B}}_L}, \mathcal{T}_{\mathcal{B}_d}, \mathcal{T}_{\tilde{\mathcal{B}}_d}$ die von folgenden Basen auf $\mathbb{R}$ erzeugten Topologien.

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_L &= \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \\
\tilde{\mathcal{B}_L} &= \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \\
\mathcal{B}_d &= \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \\
\tilde{\mathcal{B}_d} &= \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}\}
\end{aligned}$$

Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Es gilt $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_L} = \mathcal{T}_{\tilde{\mathcal{B}}_L}$.

(ii) Es gilt $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_d} = \mathcal{T}_{\tilde{\mathcal{B}}_d}$.

Abgabe bis: Donnerstag, den 18.4.2019, 8 Uhr.