3. Übungszettel zur Vorlesung
„Grundlagen der Analysis, Topologie und Geometrie“

SS 2019 — Prof. Dr. Linus Kramer
WWU Münster — Lara Beßmann

Aufgabe 3.1 (1+1+1+1 Punkte)

> **Definition:** Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $x \in X$. Man sagt, X hat eine *abzählbare Basis in* x, wenn eine Menge
>
> $$\mathcal{B}_x = \{B_i \mid i \in \mathbb{N} \text{ und } B_i \text{ ist eine offene Umgebung von } x\}$$
>
> existiert, die die folgende Eigenschaft erfüllt: für jede offene Umgebung U von x existiert $B_i \in \mathcal{B}_x$ mit $B_i \subseteq U$.
>
> $(X, \mathcal{T})$ erfüllt das *erste Abzählbarkeitsaxiom*, wenn für jedes $x \in X$ eine abzählbare Basis in x existiert.
>
> $(X, \mathcal{T})$ erfüllt das *zweite Abzählbarkeitsaxiom*, wenn $\mathcal{T}$ eine abzählbare Basis hat.

Gegeben sei $X = \mathbb{R}$, sowie $\mathcal{B}_d = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ und $\mathcal{B}_L = \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$. Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_d}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_L}$ die erzeugten Topologien. Zeigen oder widerlegen Sie:

(i) $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{B}_d})$ erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom.

(ii) $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{B}_d})$ erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom.

(iii) $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{B}_L})$ erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom.

(iv) $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{B}_L})$ erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom.

Aufgabe 3.2 (2+2 Punkte)

(i) Sei $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ mit der üblichen Ordnung $<$ gegeben. Sei $\mathcal{T}_<$ die Ordnungstopologie bezüglich $<$ auf $\mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{T}_<$ die diskrete Topologie ist.

(ii) Sei $\{0, 1\} \times \mathbb{N}$ mit der lexikographischen Ordnung gegeben. Sie $\mathcal{T}_{LO}$ die Ordnungstopologie bezüglich der lexikographischen Ordnung auf $\{0, 1\} \times \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{T}_{LO}$ nicht die diskrete Topologie ist.

Aufgabe 3.3 (4 Punkte)
Seien X und Y topologische Räume und sei $X = A \cup B$, wobei A, B beide abgeschlossen in X sind. Seien $f : A \to Y$ und $g : B \to Y$ zwei stetige Abbildungen bezüglich der Teilraumtopologie auf A bzw. B mit $f(x) = g(x)$ für alle $x \in A \cap B$. Sei $h : X \to Y$ definiert durch

$$x \mapsto \begin{cases} f(x), x \in A \\ g(x), x \in B. \end{cases}$$

Zeigen Sie: h ist stetig.

Aufgabe 3.4 (2+2 Punkte)
Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{T}_<)$ topologische Räume und seien $f, g : X \to Y$ zwei stetige Abbildungen.

(i) Zeigen Sie: Die Menge $\{x \in X \mid f(x) \leq g(x)\}$ ist abgeschlossen in X.

(ii) Sei $h : X \to Y$ definiert durch $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$. Zeigen Sie: h ist stetig.

***-Aufgabe** (4 Punkte)

Wohlordnungssatz: Jede nichtleere Menge kann wohlgeordnet werden.

Beweisen Sie den Wohlordnungssatz mit Hilfe von Zorns Lemma, indem Sie den Teilschritten (i) - (iv) folgen.

(i) Sei X eine nichtleere Menge. Sei

$$\mathcal{P} = \{(Y, <_Y) \mid Y \subseteq X, Y \neq \emptyset \text{ und } <_Y \text{ ist eine Wohlordnung auf } Y\}.$$

Zeigen Sie: $\mathcal{P} \neq \emptyset$.

(ii) Sei $\leq$ eine partielle Ordnung auf $\mathcal{P}$ definiert durch

$$\begin{aligned}(Y, <_Y) \leq (Z, <_Z) \Leftrightarrow Y \subseteq Z &\text{ und für alle } x, y \in Y \text{ gilt: } (x <_Y y \Leftrightarrow x <_Z y) \\ &\text{ und für alle } y \in Y, z \in Z - Y \text{ gilt: } y <_Z z.\end{aligned}$$

Zeigen Sie: $\mathcal{P}$ ist induktiv geordnet.

(iii) Zeigen Sie: Ist $(Y, <_Y) \in \mathcal{P}$ ein maximales Element bezüglich $\leq$, dann gilt $Y = X$.

(iv) Folgern Sie den Wohlordnungssatz.

Abgabe bis: Donnerstag, den 25.4.2019, 8 Uhr.