5. Übungszettel zur Vorlesung
„Grundlagen der Analysis, Topologie und Geometrie“

SS 2019 | Prof. Dr. Linus Kramer
WWU Münster | Lara Beßmann

Aufgabe 5.1 (4 Punkte)
Seien X_i und Y_i für $i = 1, 2$ topologische Räume und $f_i : X_i \to Y_i$ für $i = 1, 2$ stetige Abbildungen. Sei $f : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ definiert durch $f(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$. Zeigen Sie, dass f stetig ist.

Aufgabe 5.2 (2+2 Punkte)
Sei $(X_j, \mathcal{T}_j)_{j \in J}$ eine Familie topologischer Räume und sei $X = \prod_{j \in J} X_j$ mit der Produkttopologie versehen. Sei $A = \prod_{j \in J} A_j$, wobei $A_j \subseteq X_j$ für jedes $j \in J$ ein Teilraum ist. Zeigen Sie:

(i) Die Teilraumtopologie auf A stimmt mit der Produkttopologie auf A überein.

(ii) Es gilt $\prod_{j \in J} \overline{A_j} = \overline{A}$.

Aufgabe 5.3 (4 Punkte)
Gelten die Aussagen (i) - (ii) aus Aufgabe 5.2 auch, wenn X und A mit der Box-Topologie versehen werden? Beweisen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 5.4 (2+2 Punkte)

(i) Sei X normal und sei $Y \subseteq X$ abgeschlossen. Zeigen Sie, dass Y normal in der Teilraumtopologie ist.

(ii) Zeigen Sie: Ein T_1-Raum X ist genau dann normal, wenn es für jede abgeschlossene Menge $A \subseteq X$ und jede offene Menge $U \subseteq X$ mit $A \subseteq U$ eine offene Menge $V \subseteq X$ gibt mit $A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

***-Aufgabe** (4 Punkte)
Sei $(\mathcal{T}_j)_{j\in J}$ eine Familie von Topologien auf einer Menge X. Sei $Y = \prod_{j\in J} X_j$, wobei $X_j = (X, \mathcal{T}_j)$ der mit der Topologie $\mathcal{T}_j$ versehene Raum X ist. Sei $\delta\colon X \to Y$ die diagonale Abbildung $\delta(x) = (x_j)_{j\in J}$ mit $x_j = x$ für jedes $j \in J$. Sei $\mathcal{T} = \{\delta^{-1}(U) \mid U \subseteq Y \text{ offen }\}$. Zeigen Sie:

(i) Es gilt $\mathcal{T} \supseteq \mathcal{T}_j$ für jedes $j \in J$.

(ii) $\mathcal{T}$ ist bezüglich $\supseteq$ die <u>kleinste</u> Topologie, die alle $\mathcal{T}_j$ enthält.

Abgabe bis: Donnerstag, den 9.5.2019, 8 Uhr.