6. Übungszettel zur Vorlesung
„Grundlagen der Analysis, Topologie und Geometrie“

SS 2019 — Prof. Dr. Linus Kramer
WWU Münster — Lara Beßmann

Aufgabe 6.1 (4 Punkte)
Seien X und Y zwei topologische Räume, sei Y Hausdorffsch und seien $f, g\colon X \to Y$ zwei stetige Abbildungen. Zeigen Sie, dass $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ abgeschlossen in X ist.

Aufgabe 6.2 (4 Punkte)
Definition: Ein topologischer Raum X heißt *zusammenhängend*, wenn X und $\emptyset$ die einzigen Teilmengen sind, die gleichzeitig offen und abgeschlossen sind.
Sei X ein normaler zusammenhängender Raum, der mindestens zwei verschiedene Punkte enthält. Zeigen Sie, dass X nicht abzählbar ist.

Aufgabe 6.3 (4 Punkte)
Sei $(X, \mathcal{T})$ ein Hausdorffraum und $\infty \notin X$. Wir definieren $\widehat{X} = X \cup \{\infty\}$ und

$$\widehat{\mathcal{T}} = \{U \mid U \in \mathcal{T} \text{ oder } U = \widehat{X} - K \text{ und } K \subseteq X \text{ ist kompakt } \}.$$

Zeigen Sie:

(i) $\widehat{\mathcal{T}}$ ist eine Topologie auf $\widehat{X}$.

(ii) Der Raum $(\widehat{X}, \widehat{\mathcal{T}})$ ist genau dann hausdorffsch, wenn jeder Punkt aus X eine kompakte Umgebung in X besitzt.

(iii) Wenn jeder Punkt aus X eine kompakte Umgebung besitzt, dann ist $\widehat{X}$ kompakt.

Aufgabe 6.4 (4 Punkte)
Definition: Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen X, Y heißt *offen* (bzw. *abgeschlossen*), wenn für jede offene Menge $U \subseteq X$ (jede abg. Menge $A \subseteq X$) auch $f(U)$ offen ($f(A)$ abgeschlossen) in Y ist.

(i) Sei $X = \prod_{j \in J} X_j$. Zeigen Sie, dass die Projektion pr_k für jedes $k \in J$ offen ist.

(ii) Ist pr_k für jedes $k \in J$ auch abgeschlossen?

***-Aufgabe** (4 Punkte)
Sei $C = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ die Cantor-Menge. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon \quad C &\quad\to\quad [0,1] \\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} &\quad\mapsto\quad \sum_{j=1}^{\infty} 2 \cdot \frac{a_j}{3^j} \end{aligned}$$

stetig und injektiv ist.

Abgabe bis: Donnerstag, den 16.5.2019, 8 Uhr.