9. Übungszettel zur Vorlesung „Grundlagen der Analysis, Topologie und Geometrie“

SS 2019 — Prof. Dr. Linus Kramer
WWU Münster — Lara Beßmann

Aufgabe 9.1 (4 Punkte)

> **Definition:** Ein topologischer Raum X heißt *total unzusammenhängend*, wenn für alle $p \in X$ gilt $C(p) = \{p\}$.

Zeigen Sie:

(i) $\mathbb{Q}$ ist total unzusammenhängend.

(ii) Jedes nichtleere Produkt total unzusammenhängender Räume ist wieder total unzusammenhängend.

Aufgabe 9.2 (4 Punkte)
Sei X ein kompakter total unzusammenhängender Raum, $p \in X$ beliebig und N eine Umgebung von p. Zeigen Sie, dass es eine abgeschlossene offene Umgebung U von p gibt mit $U \subseteq N$.

Hinweis: Nutzen Sie Aufgabe 8.4.

Aufgabe 9.3 (4 Punkte)
Sei X ein kompakter topologischer Raum und sei $\emptyset \neq A \subseteq X$ abgeschlossen. Zeigen Sie:

(i) Die Abbildung $r_A\colon C(X,\mathbb{R}) \to C(A,\mathbb{R}), f \mapsto f|_A$ ist ein stetiger surjektiver Ringhomomorphismus.

(ii) Der Kern I_A von r_A ist genau dann ein maximales Ideal in $C(X,\mathbb{R})$, wenn $A = \{p\}$ gilt.

Aufgabe 9.4 (4 Punkte)
Sei X ein T_4-Raum, sei $A \subseteq X$ abgeschlossen und sei $f\colon A \to \mathbb{S}^m$ stetig, wobei $\mathbb{S}^m = \{v \in \mathbb{R}^{m+1} \mid ||v|| = 1\}$.
Zeigen Sie, dass es eine offene Teilmenge $U \subseteq X$ gibt mit $A \subseteq U$ und eine stetige Abbildung $F\colon U \to \mathbb{S}^m$ mit $F|_A = f$.

Abgabe bis: Donnerstag, den 6.6.2019, 8 Uhr.